Digitized by Google

Digitized by Google

BCU - Lausanne
1094788378
Digitized by Google

Digitized by Google

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE

DES

LIGNES COURBES

ALGÉBRIQUES.

Digitized by Google

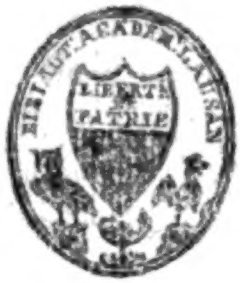
Digitized

INTRODUCTION
A
L'ANALYSE
DES
LIGNES COURBES
ALGÉBRIQUES.

Par

GABRIEL CRAMER,

Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.



A GENEVE,

Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.

M D C C L.

Digitized by Google

Digitized by Google

PREFACE

A Théorie des Lignes courbes fait une partie conſidérable des Mathématiques: Elle commence où finiſſent les Elémens, au delà deſquels on ne va point ſans elle. On ne ſauroit s'en paſſer dans les Sciences dont la perfection dépend de la Géométrie, telles que la Méchanique, l'Aſtronomie, la Phyſique. Les Syſtèmes modernes ſuppoſent néceſſairement cette connoiſſance.

Si l'étude en eſt utile, elle n'eſt pas moins agréable. Des variétés perpétuelles, rappellées conſtamment à l'unité, offrent à l'Eſprit un ſpectacle dont il ne ſe laſſe jamais.

Auſſi les Courbes ont-elles toujours fait un des

principaux objets des ſpéculations des Géométres. A peine la Géométrie ſortoit-elle de l'enfance, qu'elle s'occupa des Sections coniques: bientôt après elle admira les propriétés de la Conchoïde, de la Ciſſoïde, des Spirales, (Courbes très différentes de celles que nous déſignons par ce nom, & qui ſont les Hélices des Anciens) & de pluſieurs autres Lignes, dont le nom & la connoiſſance a péri avec la plûpart des monuments de l'ancienne Géométrie.

Dans ce qui nous en reſte, on voit que ſi les Anciens ont eu autant d'eſprit & de génie que les Modernes, ils leur cédent par la Méthode, par cet art infiniment utile de déduire d'un ſeul Principe univerſel un grand nombre de Vérités, de les ſoumettre à des Règles générales, de les développer par des conſéquences uniformes, & de les lier les unes aux autres de la maniére la plus propre à faire naître de nouvelles découvertes.

Ce que les Anciens avoient démontré ſur les Courbes, quelque important, quelque ſubtil qu'il fut, n'étoit pourtant qu'un amas de Propoſitions particuliéres, qui ne pouvoient guéres ſervir à en trouver d'autres, qu'autant que ces Recherches donnoient des éxemples & des modèles, qu'un Eſprit né Géométre s'efforçoit d'imiter. Une grande application & l'étude opiniatre d'une Courbe pouvoit y faire voir des propriétés ſinguliéres: L'Inventeur en étoit redevable à ſon génie, & ſouvent à la Fortune.

Digitized by Google

Il en étoit à peu près de même de toutes les branches des Mathématiques, juſqu'à l'invention de l'Algébre ; moyen ingénieux de réduire les Problèmes au Calcul le plus ſimple & le plus facile que la Queſtion propoſée puiſſe admettre. Cette clef univerſelle des Mathématiques en a ouvert la porte à pluſieurs Eſprits, pour leſquels elle eut toujours été fermée ſans ce ſecours : On peut dire que cette découverte a produit une véritable révolution dans les Sciences qui dépendent du Calcul.

Il y a donc, ce ſemble, de l'humeur, & une ſorte de caprice, à mépriſer une Méthode ſi utile, & à faire gloire de n'employer que l'Analyſe géométrique des Anciens. Celle-ci, je l'avoue, a ſur l'Algébre le mérite d'une évidence plus ſenſible, & d'une certaine élégance qui plaît infiniment : mais il s'en faut beaucoup qu'elle ſoit auſſi commode & auſſi univerſelle. Donnez lui donc, ſi vous voulez, la préférence ; mais ne donnez point d'excluſion à l'autre Méthode. Les Vérités mathématiques ne ſont pas ſi faciles à trouver, qu'on doive chercher du mérite à ſe fermer quelcune des routes qui peuvent y conduire.

C'eſt ſur-tout dans la Théorie des Courbes qu'on éprouve bien ſenſiblement l'utilité d'une Méthode auſſi générale que l'eſt celle de l'Algébre. DES CARTES, dont l'eſprit inventeur ne brille pas moins dans la Géométrie que dans la Philoſophie, n'eut pas plû-

plûtôt introduit la maniére d'exprimer la nature des Courbes par des équations algébriques, que cette Théorie changea de face. Les découvertes ſe multipliérent avec une extraordinaire facilité: chaque ligne de Calcul enfantoit de nouveaux Théorémes.

Par ce moyen, l'art ſupplé au génie, & le génie aidé d'un art ſi ſecourable a eu des ſuccès qu'il n'auroit jamais obtenu par ſes propres forces. Car ce qu'il y a d'admirable ici, c'eſt qu'on ne ſauroit découvrir par le moyen de l'Algébre quelque propriété d'une Courbe particuliére, qu'elle ne faſſe auſſi-tôt connoitre des propriétés ſemblables, ou analogues, dans une infinité d'autres Courbes.

Ajoutez que l'Algébre ſeule fournit le moyen de diſtribuer les Courbes en Ordres, Claſſes, Genres & Eſpéces: ce qui, comme dans un Arſenal où les armes ſont bien rangées, met en état de choiſir, ſans héſiter, celles qui peuvent ſervir dans la Réſolution d'un Problème propoſé.

C'eſt à l'Illuſtre Mr. NEWTON que la Géométrie eſt ſur-tout redevable de cette diſtribution. Son *Enumération des Lignes du troiſiéme Ordre* eſt un excellent modèle de ce qu'il faut faire en ce genre, & une preuve convaincante que ce grand Homme avoit pénétré juſqu'au fonds de ce que la Théorie des Courbes a de plus delié & de plus intéreſſant.

Il eſt facheux que Mr. NEWTON ſe ſoit contenté d'étaler ſes découvertes ſans y joindre les Démonſtrations,

Digitized by Google

trations, & qu'il ait préféré le plaiſir de ſe faire admirer à celui d'inſtruire.

Ce n'eſt pas que dans une Lecture attentive de ſon Traité on ne puiſſe apercevoir quelques traces de ſa Méthode: on découvre que ſes principaux guides dans ces Recherches ont été la Doctrine des *Séries infinies*, qui lui doit preſque tout, & l'uſage du *Parallélogramme analytique*, dont il eſt l'Inventeur: on peut même entrevoir qu'en quelques endroits il n'a pas ſuivi ces guides avec l'exactitude qu'on admire dans ſes autres ouvrages.

Ces légéres inadvertences n'ont pas échappé à Mr. STIRLING, qui a développé les Principes & la Méthode de Mr. NEWTON, dans l'excellent *Commentaire* qu'il nous a donné ſur ſon Livre. On y voit qu'il ne manquoit preſque rien à Mr. STIRLING pour donner une Théorie complette des Courbes, & qu'il n'auroit laiſſé que peu de choſes à dire, s'il ne s'étoit pas attaché avec trop de ſcrupule à ne point s'écarter de ſon Auteur.

Mr. NICOLE a donné, dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, une explication auſſi nette qu'exacte des Principes que Mr. NEWTON a pû ſuivre dans ſon Enumération des Lignes du troiſiéme Ordre: c'eſt grand dommage qu'un commencement ſi heureux n'aît pas eu de ſuite. Que ne pouvoit-on pas attendre du génie & du ſavoir de Mr. NICOLE?

On trouve dans le même Recueil quelques Mémoires

moires de Mr. DE BRAGELOGNE, rélatifs à une Enumération des Lignes du quatriéme Ordre, qu'il avoit entrepriſe à l'imitation de celle que Mr. NEWTON a donnée des Lignes du troiſiéme Ordre. Il y a de très bonnes choſes dans ces Mémoires; mais l'Auteur s'étant arrêté au milieu de ſa courſe, on ne voit pas ſi ſa Méthode étoit la plus propre à le mener avec exactitude & avec certitude à l'Enumération qu'il avoit en vue. Il s'étend aſſez ſur les Points multiples, qui ſervent de fondement à la ſubdiviſion des Genres en Eſpèces, & en Variétés; mais il ne dit rien, ou ne dit que peu de choſes, des Branches infinies, dont doit dépendre la Diviſion générale des Courbes de chaque Ordre en leurs Claſſes & Genres.

Voilà ce que j'avois devant les yeux lorſque je commençai cet Ouvrage. La longueur du tems qu'il a reſté entre mes mains devroit lui avoir donné un dégré de perfection, que je crains avec raiſon qu'on n'y trouve pas.

L'illuſtre Mr. Sr GRAVESANDE, qui m'honoroit de ſon amitié & dont la perte me ſera toujours amere, m'avoit communiqué ſes Recherches ſur les Séries, & ce qu'il avoit ajouté aux découvertes de Mrs TAYLOR & STIRLING. Quelques obſervations que je fis ſur ſa Méthode parurent lui plaire, & trop prévenu en ma faveur, il eut la bonté de me dire, qu'ayant la clé de la Théorie des Courbes il ne me ſeroit pas difficile d'en faire uſage. Si j'ai eu tort de l'en croire,

Digitized by Google

re, qu'on pardonne cette erreur au reſpect dont j'étois penétré pour ce grand Homme.

Cet Eſſai étoit à peu près fini, quand Mr. l'Abbé DE GUA fit paroître l'*Uſage de l'Analyſe de* DESCARTES *pour découvrir les propriétés des Lignes géométriques de tous les Ordres.* La ſubſtitution qu'il y fait du Triangle algébrique au Parallélogramme de NEWTON eſt une idée heureuſe, dont j'ai profité avec reconnoiſſance, auſſi bien que de quelques autres penſées ingénieuſes de cet Auteur : mais je n'ai pas cru devoir le ſuivre dans la mépriſe où il eſt tombé ſur les Branches infinies des Courbes & ſur leurs Points multiples, pour avoir négligé l'uſage des Séries infinies, ou pour avoir voulu juger d'une Série entiére par ſon ſeul premier terme.

J'aurois tiré une grande utilité de l'*Introduction à l'Analyſe des infiniment petits* de Mr. EULER, ſi ce Livre m'avoit été plûtôt connu. Son objet étant preſque le même que le mien, il n'eſt pas ſurprenant que nous nous ſoions ſouvent rencontré dans les Concluſions. Mais la différence des Méthodes eſt auſſi grande qu'elle peut l'être quand on travaille ſur un même ſujet: ce que je ne dis point pour préférer la route que j'ai priſe à celle qu'à tenu Mr. EULER; mais ſeulement pour avertir le Lecteur de cette diverſité. Voici une légere idée de l'ordre que j'ai cru devoir ſuivre.

Le premier Chapitre expoſe en général la nature

des Lignes courbes, & la maniére de les repréſenter par des Equations. On diviſe d'abord les Lignes en réguliéres & irréguliéres. Celles-ci n'ont ni Définition, ni Deſcription règlée & connue. Celles-là ſont décrites par une loi certaine, qui conſtitue leur eſſence ou leur nature. On diviſe enſuite les Lignes réguliéres, en celles qui peuvent être décrites ſur une ſuperficie plane, & celles qui ont une double courbure. Puis on expoſe la maniére d'exprimer par une Equation la nature des Lignes à ſimple courbure: invention heureuſe de DESCARTES, qui renferme le Principe, ou du moins le Germe, de tout ce que les Modernes ont découvert ſur les Courbes. Delà on paſſe à la diſtinction des Lignes en algébriques & méchaniques: on definit les Courbes exponentielles & les interſcendantes, qui tiennent en quelque ſorte le milieu entre les méchaniques, & les algébriques. On entre dans quelque détail ſur la maniére dont une Courbe algébrique eſt repréſentée par ſon Equation: On indique le moyen de diſcerner ſi une Equation propoſée exprime une ſeule Courbe, ou l'aſſemblage de pluſieurs. On parle des Branches de Courbes, finies ou infinies, réelles ou imaginaires. On fait voir en quel ſens le cours d'une Ligne algébrique eſt continu, quoique la Courbe puiſſe être compoſée de parties détachées. On montre enfin la maniére de décrire une Courbe en aſſignant la poſition d'une infinité de ſes points; non-

Digitized by Google

non-ſeulement lorſque ſon Equation peut être reſoluë, mais encore en pluſieurs autres cas. Il faut pourtant avouer qu'il manque une Méthode generale pour cela : ſi l'Algébre pouvoit la donner, on auroit, par cela ſeul, tout ce qui eſt néceſſaire pour la connoiſſance des Courbes.

On indique, dans le ſecond Chapitre, une maniére générale de transformer l'Equation d'une Courbe, quand on veut la raporter à d'autres coordonnées que celles dont le raport eſt exprimé par l'Equation propoſée. On donne, pour faire ces transformations, dans les cas les plus utiles & les plus communs, des maniéres abregées, qui peuvent être ſuperflues lorſque l'Equation eſt fort ſimple, mais qui deviennent preſque néceſſaires, ou du moins très commodes, quand cette Equation eſt d'un dégré aſſez élevé, ou qu'elle eſt compoſée d'un grand nombre de termes.

Le troiſiéme Chapitre développe la diviſion des Lignes algébriques ſelon leurs différents Ordres. On y voit les Equations générales de chacun de ces Ordres, le nombre de leurs termes, celui des Points donnés par leſquels on peut faire paſſer une Ligne d'un Ordre donné, & le nombre des Points dans leſquels une Ligne d'un Ordre donné peut rencontrer une Ligne du même Ordre, ou d'un autre Ordre auſſi donné. La Règle qui détermine ce nombre eſt très importante dans la Théorie des Cour-

bes, pluſieurs grands Géométres l'ont ſuppoſée, mais perſonne, que je ſache, n'en a donné la Démonſtration. On la prouve ici, par une maniére, expliquée dans l'Appendice N°. 2, de faire évanouir une grandeur indéterminée, au moyen de deux Equations dans leſquelles elle entre. C'eſt-là proprement un Problème de pure Algébre; mais les Méthodes connues ayant paru inſuffiſantes, on en a cherché une autre, qui rend la choſe facile au moyen d'une façon ſinguliére d'employer les nombres, ou chiffres, pour exprimer les indéterminées & leurs fonctions. L'uſage de cette Notation peut s'étendre à d'autres Recherches, & en général cette Méthode eſt aſſez féconde en Corollaires utiles dans l'Algébre.

La Règle démontrée dans le Chapitre précédent étant le fondement de la Méthode uſitée pour la conſtruction des Egalités, on en a pris occaſion de faire dans le Chapitre quatriéme quelques Remarques ſur cette conſtruction. On en dévelope le Principe; on en détermine l'étendue; on en marque les limitations. On indique la ſource des difficultés que Mr. ROLLE a élevées contre cette Méthode, & les moyens d'éviter ſurement les inconvénients qu'il y a trouvés. On propoſe enfin une maniére générale de fixer le nombre & la nature des racines d'une Egalité, de diſcerner les imaginaires des réelles, & parmi celles-ci les négatives des affirmatives. On l'ap-

Digitized by Google

l'applique aux Egalités du ſecond, troiſiéme & quatriéme dégré; ce qui eſt néceſſaire & ſuffiſant pour la ſuite de cet Eſſai.

Le Chapitre cinquiéme démontre un Théorème fort général ſur la valeur du produit de toutes les ordonnées d'une même abſciſſe; & il en fait l'application aux Courbes du ſecond & du troiſiéme Ordre. Ce ſeul Théorème renferme tout ce que les Anciens ont démontré ſur la comparaiſon du quarré de l'ordonnée avec le rectangle des portions du diamètre dans les Sections Coniques: ce qui fait la plus grande partie de ce qu'ils ont connu de ces Courbes. On l'étend à d'autres Cas dont les Anciens n'ont pas fait mention; & on donne les propriétés analogues des Courbes du troiſiéme Ordre. Il n'y a aucune difficulté à le ſuivre dans les Courbes des Ordres ſupérieurs.

Dans le Chapitre ſixiéme, on conſidere d'abord deux Lignes telles que la ſomme des ordonnées de l'une eſt égale à la ſomme des ordonnées de l'autre, ces ordonnées ayant une même abſciſſe. On fait voir que l'une de ces Lignes peut, en une infinité de Cas, être l'aſſemblage de pluſieurs Droites, & que toutes ces Droites peuvent ſe réduire à une ſeule, qui eſt alors le Diamètre de la Courbe. On démontre que chaque Courbe a néceſſairement un ou pluſieurs Diamètres. On définit les Diamètres curvilignes, & le Diamètre abſolu. On prouve que dans les Lignes du ſecond

cond Ordre tout Diamètre eſt un Diamètre abſolu, mais qu'il n'en eſt pas de même dans les Courbes des Ordres ſupérieurs. On enſeigne à chercher les Diamètres abſolus d'une Courbe. On explique ce que c'eſt qu'un Contre-Diamètre & un Centre général. On donne des Règles pour les trouver.

Il s'agit dans les Chapitres ſuivants de ce qu'il y a de plus remarquable dans le Cours d'une Ligne. Ce ſont ſes Branches infinies & ſes Points ſinguliers. C'eſt par les Branches infinies qu'on diviſe les Courbes de chaque Ordre en leurs Genres, & c'eſt par les Points ſinguliers qu'on ſubdiviſe en Eſpèces les Courbes de chaque Genre.

Pour déterminer ces Branches & ces Points, on n'a point de Méthode plus ſûre & plus générale que celle des Séries. C'eſt pour cela qu'on a crû devoir l'expliquer avec ſoin dans le Chapitre ſeptiéme; d'autant mieux que cette Méthode n'a été donnée juſqu'ici que d'une maniére imparfaite; qu'on a laiſſé ſans Démonſtration une partie du procédé qu'il faut ſuivre; & que ce procédé, de la façon qu'il eſt propoſé dans les Auteurs, conduit ſouvent à des réſultats bornés & par là vicieux. La vraye Méthode des Séries eſt fondée ſur le *Parallélogramme* de Mr. NEWTON, invention excellente, mais dont l'Auteur n'a pas donné la Démonſtration, dont il ſemble même n'avoir pas ſenti tout le prix. Après lui, Mrs. TAYLOR & STIRLING en ont étendu l'uſage; mais leurs

Rè-

Règles n'ont ni la généralité ni l'exactitude néceſſaires. Mr. S'GRAVESANDE les a rectifiées juſqu'à un certain point. Cependant ſa Méthode, qui n'eſt qu'un abrégé de la Méthode générale, n'en conſerve pas toute l'univerſalité; elle n'a lieu que dans certains Cas, & dans ces Cas elle n'eſt pas toujours autant abrégée qu'elle pourroit l'être: il en eſt même, où elle peut jetter dans l'erreur d'une énumération imparfaite. Pour éviter ces inconvéniens, on a crû devoir remonter aux Principes de la Méthode des Séries & en démontrer exactement le procédé. On en donne même l'Inveſtigation, & on indique quelques moyens d'abréger les calculs à la longueur deſquels la Méthode générale eſt ſujette: On s'eſt ici borné à ce qui eſt néceſſaire pour la Théorie des Courbes. La matiére eſt vaſte, & on pourroit en compoſer des Volumes ſans l'épuiſer.

Le Chapitre huitiéme eſt employé à déterminer le nombre, la nature, & la poſition des Branches infinies que peut avoir une Courbe dont l'Equation eſt donnée.

Ces Branches s'éloignent infiniment ou de l'Axe des abſciſſes, ou de celui des ordonnées, ou de l'un & de l'autre. Cela ſe diſcerne aiſément, preſque par la ſeule inſpection de l'Equation propoſée. On en indique la maniére; après quoi on explique la différence des Branches hyperboliques & paraboliques. On donne, pour cet effet, une idée des

Hyperboles & des Paraboles de tous les Ordres : on expoſe les variétés du nombre & de la poſition de leurs Branches, & on fait voir en quels Cas elles ſont réelles ou imaginaires. Enſuite on donne les moyens de reconnoitre ſi les Branches infinies qu'indique l'Equation d'une Courbe ſont imaginaires ou réelles ; de décider, dans ce dernier Cas, ſi elles ſont hyperboliques ou paraboliques, c'eſt-à-dire, ſi elles ont une Aſymptote droite, ou ſi elles n'en ont point ; & dans le Cas où elles ont cette Aſymptote, de déterminer ſa poſition ; de trouver, dans tous les Cas, leurs Aſymptotes-courbes, c'eſt-à-dire la Courbe la plus ſimple qui règle la poſition, &, pour ainſi dire, la marche des Branches infinies de la Courbe propoſée. Ces Règles ſont éclaircies par un grand nombre d'Exemples choiſis. Et ce Chapitre eſt terminé par quelques Théorèmes généraux ſur le nombre de Branches infinies & d'Aſymptotes droites, que peuvent ou ne peuvent pas avoir les Courbes des différents Ordres.

Dans le Chapitre neuviéme, on établit les Diviſions générales des Lignes Courbes, fondées ſur le nombre, la nature, & la poſition de leurs Branches infinies. On fait voir qu'il n'y a que trois Courbes du ſecond Ordre ; l'Ellipſe, ſous laquelle eſt compriſe le Cercle ; l'Hyperbole ; & la Parabole : ce qui donne, en peu de mots, ce qu'on appelle

pelle là Conſtruction des Lieux Géométriques. On réduit les Courbes du troiſiéme Ordre à quatre Claſſes, qui ſe ſubdiviſent en quatorze Genres, conformément à ce que Mr. NEWTON a établi dans ſon *Enumération des Lignes du troiſiéme Ordre*, dont cet article peut être regardé comme un petit Commentaire. Il y a neuf Claſſes des Courbes du quatriéme Ordre, & chacune ſe ſubdiviſe en divers Genres; mais l'énumération en eſt comme impoſſible. Il a donc fallu ſe borner à donner les Principes néceſſaires pour réduire à ſa Claſſe & à ſon Genre toute Courbe donnée de cet Ordre. On indique ſeulement que celles du cinquiéme Ordre ont onze Claſſes, & l'on propoſe une Règle générale ſur le nombre des Branches hyperboliques & paraboliques, que peuvent avoir les Courbes d'un Ordre quelconque.

Les Chapitres ſuivants ſont deſtinés à l'examen des Points ſinguliers d'une Courbe. Ces Points ſont ou Points multiples, ou Points d'Inflexion. Les Points multiples ſont ou doubles, ou triples, ou quadruples &c. Les Points d'Inflexion ont une Inflexion ou ſimple, ou double, ou triple, &c. Les Inflexions d'un dégré impair ſont viſibles; celles d'un dégré pair ſont inviſibles, & ne ſe manifeſtent que par le Calcul: on les nomme Serpentements.

On indique au Chapitre dixiéme la maniére de connoitre ſi un Point aſſigné d'une Courbe donnée eſt ſimple ou multiple ; & dans ce dernier Cas, quel eſt le dégré de ſa multiplicité ; de chercher ſi une Courbe d'Equation donnée a des Points multiples, où ils ſont, & quels ils ſont ; de marquer les conditions qui peuvent donner des Points multiples à une Courbe dont l'Equation ou la Conſtruction eſt donnée. Enfin on indique quel eſt le nombre de Points multiples que peuvent avoir les Courbes des différens Ordres, & quel peut être le dégré de leur multiplicité. On montre, par exemple, que les Courbes du cinquiéme Ordre ne peuvent avoir qu'un Point quadruple, & qu'alors elles ne peuvent avoir aucun autre Point multiple : qu'elle ne peuvent avoir qu'un ſeul Point triple, mais qu'avec celui-là elles peuvent avoir trois Points doubles ; enfin qu'elles peuvent avoir juſqu'à ſix Points doubles, quand elles n'ont aucun autre Point multiple.

Le Chapitre onziéme donne les moyens de diſcerner les différentes eſpèces des Points ſimples ou multiples, par le nombre & la poſition de leurs Tangentes. On y explique la maniére de mener les Tangentes d'un Point quelconque. Cette maniére, qui revient dans le fonds aux Méthodes connues & en particulier à celle des Infiniment petits, eſt

eſt démontrée ici par cette ſeule conſidération, que la Sécante d'une Courbe devient ſa Tangente lorſque les deux Points de ſection ſe réuniſſent en un ſeul. La ſolution du Problème des Tangentes mêne trop naturellement à celui *de Maximis & Minimis*, pour qu'il fut permis de n'en rien dire. La Méthode qu'on propoſe revient encore aux Méthodes connues; mais on y a joint quelques Remarques qui, ſans être abſolument nouvelles, ne ſont pas communes. Elles ſervent à diſcerner un *Maximum* d'un *Minimum*, & à diſtinguer les uns & les autres des Points multiples & des Points d'Inflexion, avec leſquels il eſt aiſé de les confondre. On tire de cette Méthode quelques uſages pour déterminer le cours des Lignes Courbes, & on finit par la maniére de trouver les Points d'Inflexion ſimple ou multiple, que peut avoir une Courbe d'Equation donnée.

On entre au Chapitre douziéme dans un plus grand détail ſur la courbure des Lignes Courbes en leurs différents Points. Elle ſe meſure par la courbure du Cercle, qui étant uniforme dans tout le contour d'un même Cercle, varie ſelon que le Cercle eſt plus grand ou plus petit. On enſeigne à trouver, pour chaque Point d'une Courbe donnée, le Cercle de même courbure. La méthode qu'on donne pour cela, & qui n'eſt qu'une ſuite des principes établis dans le Chapitre précé-

dent, réſoud facilement ces Problèmes: Trouver en quels Points de ſon cours une Courbe a une courbure donnée, une courbure infinie, une courbure infiniment petite, ſa plus grande ou ſa plus petite courbure, &c. On compare entr'elles les courbures infinies, & auſſi les courbures infiniment petites; & on en aſſigne les dégrés, en indiquant pour chaque Point, dont la courbure n'eſt pas finie, la Parabole de même courbure; car ici le Cercle eſt inutile, puiſque tout Cercle a une courbure finie. Cette comparaiſon laiſſe entrevoir une variété infinie dans les Points ſinguliers des Courbes. On n'en ſauroit épuiſer le détail. C'eſt aſſez d'en énumérer les eſpèces les plus ſimples, celles qui peuvent convenir aux Courbes des prémiers Ordres, autour deſquelles roulent nos ſpéculations. On a taché de le faire, dans le treiziéme & dernier Chapitre, pour tous les Points multiples dont ſont ſuſceptibles les Lignes des prémiers Ordres.

L'Appendice contient trois Démonſtrations qui auroient trop interrompu la ſuite du Diſcours ſi on les avoit inſérées où elles ſont citées. Il n'y a proprement que celle du N°. 2. qui ſoit néceſſaire. Elle eſt extraite d'un plus long Mémoire ſur ce même ſujet, lequel devroit faire partie d'un Traité d'Algébre.

Tel eſt le Plan que je me ſuis propoſé dans cet Eſſai.

Digitized by Google

Eſſai. C'eſt à mes Lecteurs à juger ſi je l'ai rempli. J'ai tant de graces à leur demander, que je ne leur ferai point d'excuſes, ni ſur le ſtyle, où je n'ai cherché que la clarté; ni ſur certains détails, que j'ai crû néceſſaires aux jeunes Géométres en faveur deſquels j'écris; ni ſur la longueur de cet Ouvrage, dont je ſuis moi-même ſurpris. Elle vient principalement du nombre d'Exemples que j'aporte pour illuſtrer les Règles que je donne. Je ſens fort bien que les Savans en voudroient moins, mais en échange les Commençans en déſireroient peut-être davantage. Je puis dire aux uns, que je ne crois pas avoir placé un ſeul Exemple ſans quelque raiſon particuliére; & j'oſe aſſurer les autres que je ne penſe pas qu'ils trouvent dans les Règles aucune difficulté qui ne ſoit éclaircie par quelque Exemple.

Digitized by Google

INTRODUCTION

A

L'ANALYSE

DES

LIGNES COURBES ALGEBRIQUES.

CHAPITRE I.

De la Nature des Lignes Courbes en général, & de leurs Equations.

1. TOUTE Ligne eſt *Réguliére* ou *Irréguliére*. Les Lignes irréguliéres ſont celles qui ſont décrites ſans aucune régle certaine, ou connuë. Tel eſt le trait que forme au hazard un Ecrivain. Ces Lignes ne ſont point l'objet de la Géométrie : elles ne lui donnent aucune priſe. Car un Géométre, pour chercher & dé-

PLANC. I.

montrer les propriétés d'une Ligne, doit partir de ſa Définition, ou, ce qui eſt la meme choſe, de la maniére dont cette Ligne peut être conſtruite ou décrite. Mais les Lignes irréguliéres n'ont aucune Définition ou Deſcription réglée & connuë, qui les diſtingue de toute autre Ligne. CHAP. I. §. I.

2. Les Lignes réguliéres ſont, au contraire, celles qui ſont décrites ſuivant une Loi conſtante qui détermine la poſition de tous leurs points. Il y a quelque propriété uniforme qui convient également à tous les points d'une même Ligne réguliére, & qui ne convient qu'à eux ſeuls. Cette propriété conſtituë la *Nature* ou l'*Eſſence* de cette Ligne. Ainſi la nature du Cercle conſiſte dans l'égalité de ſes raïons. C'eſt cette égalité des raïons qui diſtingue la circonférence d'un Cercle de toute autre Ligne courbe, & qui détermine la poſition de tous les points de la Ligne circulaire, en les fixant tous à une même diſtance du centre.

3. Cette Définition des Lignes réguliéres convient avec celle des *Lieux géométriques*. Les anciens Géométres donnoient ce nom aux Lignes, Droites ou Courbes, dont chaque point étoit également propre à réſoudre un Problême géométrique indéterminé.

Fig. 1. Si l'on propoſe, par exemple, de décrire, ſur une Ligne droite donnée AB, un Triangle d'une grandeur donnée: ce Problême eſt indéterminé; parce que ſur la Droite AB on peut décrire une infinité de Triangles égaux, qui ſeront tous de la grandeur donnée, & qui donneront ainſi une infinité de Solutions. Comme tous ces Triangles égaux AcB, ACB, A*c*B &c. ont leurs ſommets c, C, *c*, &c. ſur une même Droite cC*c* paralléle à AB [EUCL. I. 37], cette Droite cC*c* eſt ce qu'on appelle le *Lieu* des ſommets de tous les Triangles égaux à ACB décrits ſur la baſe AB.

De

CHAP. I. §. 3. De même, ſi l'on demande de décrire un Triangle rectangle ſur l'hypothenuſe donnée DE; on propoſe un Problême indéterminé. Car la circonférence DFE, décrite ſur le diamétre DE, a cette propriété [EUCL. III. 31] que ſi d'un de ſes points quelconque F on tire deux Droites FD, FE aux deux extrémités du diamétre DE, ces deux Droites feront avec le diamétre un Triangle rectangle. La circonférence DFE eſt donc le *Lieu* des ſommets de tous les Triangles rectangles qui ſe peuvent décrire ſur l'hypothenuſe donnée DE. PLANC. I. Fig. 2.

4. LES LIGNES ſe diviſent encore en celles qui peuvent être tracées ſur une ſurface plane, & celles qu'on ne peut décrire que ſur une ſurface courbe. Un grand Geométre moderne *, qui a conſideré ces derniéres, les appelle *Courbes à double courbure.* On conçoit qu'en général elles ſont plus compliquées que les *Courbes à ſimple courbure*, qui peuvent être décrites ſur un plan. Dans cette Introduction nous nous bornerons à celles-ci, dont les propriétés ſervent de fondement aux recherches qu'on peut faire ſur les autres.

5. DES CARTES † eſt le premier, je penſe, qui ait entrepris d'exprimer la nature des Lignes par des Equations algébriques. Voici comment il s'y eſt pris. Dans le plan, ſur lequel une Ligne comme M*M* eſt tracée, on choiſit à volonté un Point fixe, qu'on nomme l'*Origine*, par lequel on méne à diſcrétion deux Droites AB, AD. De chaque point M de la Ligne M*M* on méne des Droites MP, MQ paralléles aux Droites AB, AC, & qui y ſont terminées réciproquement. L'une, comme MP ou ſon égale AQ, ſe nomme l'*Ordonnée* ou l'*Appliquée.* L'autre, comme MQ ou Fig. 3.

* *Mr.* CLAIRAUT, *Recherche ſur les Courbes à double courbure.* 4°. Paris 1731.

† *Géométrie*, Livre I. & II.

Digitized by Google

PLANC. I. ſon égale AP, ſe nomme la *Coupée* ou l'*Abſciſſe*. C'eſt pourquoi la Droite AB s'apelle la *Ligne* ou l'*Axe des abſciſſes* ou des *coupées*, & la Droite AD la *Ligne* ou l'*Axe des ordonnées* ou des *appliquées*. Et l'on ſe ſert du mot de *coordonnées* pour exprimer en commun l'abſciſſe & l'ordonnée d'un même point. MP & MQ, ou MP & PA, ou enfin MQ & QA ſont les coordonnées du point M. CHAP. I. §. 5.

6. Chaque point d'une Ligne réguliére ayant une propriété commune [§. 2], qui caractériſe cette Ligne & diſtingue les points qui lui apartiennent de ceux qui ne lui apartiennent pas; cette propriété ſe réduit ordinairement à un certain raport entre les coordonnées, lequel ſe peut ſouvent exprimer par une Equation algébrique indéterminée. C'eſt cette Equation qu'on apelle l'*Equation de la Ligne* dont elle exprime la nature.

Fig. 4. Soit par ex. le Cercle m M *μ m M*, décrit du centre C avec le raion donné CM: On demande l'Equation qui exprime la nature de ſa circonférence. Qu'on prenne à volonté le Point A pour l'Origine, AB pour la Ligne des abciſſes, & AD perpendiculaire à AB pour la Ligne des ordonnées. Si d'un point M, pris à volonté ſur la circonference, on méne MP, MQ paralléles à AD, AB; elles ſeront les coordonnées du point M. On cherche donc l'équation indéterminée qui exprime leur raport d'une maniére générale, c'eſt-à-dire, qui exprime, non le raport particulier des Droites MP, MQ tracées dans la Figure, mais le raport général de l'abſciſſe & de l'ordonnée d'un point quelconque de la circonférence. Cette équation doit ſe déduire de la propriété commune à tous les points de la circonférence M *m M*, qui conſiſte en ce que chacun d'eux eſt à une même diſtance donnée CM du centre C. Cette propriété dépend donc & de la grandeur donnée du raion CM, & de la poſition donnée du centre C. La poſition du

Digitized by Google

CHAP. I. §. 6. du centre C par raport aux Droites AB, AD, auxquelles tout ſe doit raporter, eſt fixée en menant les Droites CF, CE parallèles à AB, AD. Car, le centre C & les Droites AB, AD étant donnés de poſition, la grandeur des Droites CF, CE eſt donnée; & réciproquement les Droites CE, CF étant données de poſition, la poſition du centre C eſt fixée. Déſignons ces Droites données par des lettres, en nommant CE, a; CF, b; & le raion CM, r. Les lettres a, b, r, marquent donc des *grandeurs conſtantes*, qui reſtent toujours les mêmes, en quelque endroit de la circonférence qu'on prenne le point M; parce que leur grandeur eſt indépendante du choix de ce point M. Mais ſi on déſigne l'abſciſſe AP, ou MQ, par la lettre x, & l'ordonnée MP, ou AQ, par la lettre y; ces deux lettres x & y exprimeront des *grandeurs variables*. Car, comme on cherche une équation qui convienne également à tous les points de la circonférence, une équation qui exprime également le raport des coordonnées AP, PM du point M, & des coordonnées $A\pi$, $\pi\mu$ de tout autre point μ de la circonférence; la lettre x doit déſigner indifféremment l'abſciſſe AP & l'abſciſſe $A\pi$, & en général une abſciſſe quelconque; & la lettre y doit marquer également l'ordonnée PM & l'ordonnée $\pi\mu$, & en général une ordonnée quelconque: obſervant ſeulement que, dans l'équation, x & y expriment les coordonnées d'un même point, mais quelconque. Pour fixer les idées, attachons nous au point M. Si ſon ordonnée MP coupe la droite CF en G, on aura GM $=$ MP $-$ PG $=$ MP $-$ CE $=y-a$, & CG $=$ CF $-$ FG $=$ CF $-$ AP $=b-x$. Mais le triangle CGM étant rectangle, les quarrés de GM & de CG enſemble ſont égaux au quarré de l'hypothenuſe CM. Donc $(y-a)^2+(b-x)^2=rr$, ou $yy-2ay+aa+bb-2bx+xx=rr$. Cette équation n'eſt pas particuliére au point M: elle convient auſſi bien à tout autre point de la cir-

PLANC. I.

PLANC. I. conférence, par ex. au point μ. Car, à ce point μ, on a $\mu\gamma = \mu\pi - \pi\gamma = \mu\pi - CE = y - a$, & $C\gamma = F\gamma - FC = A\pi - FC = x - b$. De plus $C\mu = CM = r$. Donc l'équation $\mu\gamma^2 + C\gamma^2 = C\mu^2$, que donne le triangle rectangle $C\gamma\mu$, exprimée analytiquement, eſt $(y-a)^2 + (x-b)^2 = rr$, ou $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, qui eſt préciſément la même que celle du point M. CHAP. I. §. 6.

Ainſi cette équation exprime analytiquement la nature du Cercle. Elle eſt du genre de celles que les Analyſtes nomment *indéterminées*, parce qu'elles contiennent deux inconuës, ou plutôt deux variables, qui ont chacune une infinité de valeurs, mais qui ſont tellement enchainées l'une à l'autre par le lien de l'équation, que la détermination d'une de ces variables emporte la détermination de l'autre. Dans cette équation $yy - 2ay + aa + xx - 2bx + bb = rr$, ſi l'on veut que la variable x répréſente l'abſciſſe déterminée AP, que je nommerai c, l'équation indéterminée ſe change en cette égalité déterminée $yy - 2ay + aa + cc - 2bc + bb = rr$, où y, qui n'eſt plus une variable mais ſeulement une inconnuë, exprime la valeur de l'ordonnée déterminée PM. Et ſi l'on donne à x la valeur d, que je ſuppoſe être celle de l'abſciſſe $A\pi$, l'équation indéterminée ſe transforme en cette égalité déterminée $yy - 2ay + aa + dd - 2bd + bb = rr$, où y maintenant déterminée exprime l'ordonnée $\pi\mu$.

7. On auroit trouvé une équation plus ſimple pour exprimer la nature du Cercle, en choiſiſſant mieux la poſition de l'origine. Si on l'avoit priſe au centre, laiſſant toûjours les coordonnées perpendiculaires l'une à l'autre, l'abſciſſe x auroit été CP, & l'ordonnée y auroit été PM; & le triangle rectangle CPM faiſant voir que les quarrés des deux coordonnées ſont enſemble égaux au quarré du rayon, on

Fig. 5.

Digitized by Google

CHAP. I. on auroit eu, pour l'équation du Cercle, $xx + yy = rr$. PLANC. I.

§. 7. Une même Ligne peut donc être déſignée par des Equations différentes, qui la repréſentent chacune, pour ainſi dire, ſous ſon point de vuë. Et l'Analyſe des Courbes conſiſte en partie à déterminer la poſition des Axes, de telle maniére qu'il en réſulte, pour exprimer une Courbe, l'équation la plus ſimple ou la plus convenable au but qu'on ſe propoſe.

8. MAIS, avant que d'aller plus loin, il eſt à propos de remarquer ici, qu'il y a des Courbes réguliéres dont on ne peut pourtant exprimer la nature par aucune équation analytique.

Si on décrit, par ex. ſur le diamêtre AB, un Cercle ADB, & qu'abaiſſant de chaque point D de la circonférence une perpendiculaire DP ſur le diamétre AB, on la prolonge en M juſqu'à-ce que PM ſoit égale à l'arc correſpondant AD : la Courbe AMC, qui paſſe par tous ces points M, ſera réguliére, étant décrite ſuivant une loi uniforme. On ne ſauroit pourtant la repréſenter par aucune équation algébrique, parce que prenant les Sinus verſes AP pour les abſciſſes, on n'a aucune maniére algébrique d'exprimer leur raport aux arcs AD, ou aux ordonnées PM qui ſont égales à ces arcs. Fig. 6.

Ces ſortes de *Courbes* ſont apellées *tranſcendantes*, *méchaniques*, ou *irrationelles* ; pour les diſtinguer de celles qu'on peut repréſenter par des équations algébriques, & qu'à cauſe de cela on nomme *Courbes algébriques*, *géométriques*, ou *rationelles*. C'eſt ſurtout pour les Courbes tranſcendantes qu'on a beſoin du *Calcul des infiniment petits*, qui fournit des équations propres à exprimer la nature de ces Courbes.

9. Entre

Digitized by Google

PLANC. I. 9. Entre ces deux genres de Courbes, les algébriques & les tranſcendantes, on peut placer le genre des *Courbes exponentielles*. C'eſt le nom qu'on donne aux Courbes dont la nature s'exprime par des équations, où il n'entre, à la vérité, aucune grandeur infinie ou infiniment petite, mais qu'on ne peut pourtant pas raporter aux équations algébriques ordinaires, parce qu'elles renferment des termes qui ont des expoſants variables. CHAP. I. §. 9

Une des plus ſimples Courbes en ce genre eſt la *Logarithmique*, repréſentée par l'équation $y = ba^x$. Sa nature conſiſte en ce que, les abſciſſes étant priſes en progreſſion arithmétique, les ordonnées ſont en progreſſion géométrique. Si on déſigne par l'unité la différence qui régne dans la progreſſion des abſciſſes, & par $1 : a$ la raiſon qui régne dans la progreſſion des ordonnées, on verra que ſi l'ordonnée à l'origine eſt b, les abſciſſes

0, 1, 2, 3, 4, 5, &c.

qui ſont en progreſſion arithmétique, auront les ordonnées $b = ba^0$, $ba = ba^1$, ba^2, ba^3, ba^4, ba^5, &c. en progreſſion géométrique. Donc en général à l'abſciſſe x répond l'ordonnée ba^x. Ainſi, nommant cette ordonnée y, l'équation de la Logarithmique ſera $y = ba^x$.

On peut rapporter a ce genre, ou plûtôt à un genre intermédiaire entre les Courbes exponentielles & les algébriques, celles que Mr. LEIBNITZ nomme *interſcendentes*. Ce ſont celles dans l'équation deſquelles on trouve quelques termes avec des expoſants irrationels: comme dans l'équation $y^{\sqrt{2}} + y = x$.

10. NÒTRE deſſein n'eſt point de parler ici de toutes ces ſortes de Courbes. Les algébriques nous offrent aſſez de ſingularités & de variétés. Elles ſont ou finies, ou infinies, ou

CHAP. I. §. 10. ou mixtes. Une *Courbe* eſt *infinie*, quand elle a des branches qui vont à l'infini, comme les Courbes A, B, C, D, E, F. Une *Courbe* eſt *finie*, quand, renfermée dans un eſpace borné, elle retourne ſur elle-même ; ſoit qu'elle ne faſſe qu'un ſimple tour, comme le Cercle, ou l'Ovale G, ſoit qu'elle ſe noüe & renoüe pluſieurs fois, comme un Huit-de-chiffre, ou un Las-d'amour, &c. H, I, K, L, M. Enfin, elle eſt *mixte*, quand après avoir fait quelques tours & détours dans un eſpace fini où elle repaſſe ſur elle-même, elle jette enfin des branches à l'infini, comme N, O, P, Q. La partie finie d'une Courbe qui renferme un eſpace s'apelle une *Feuille*, & le Point où la Courbe ſe coupe elle-même ſe nomme un *Nœud*. PLANC. I. *Fig.* 7. *Fig.* 8. *Fig.* 9.

11. TOUTES ces inflexions & ces courbures, & en général toutes les ſingularités des Courbes algébriques, dont le §. précédent n'indique qu'une partie, ſont ſi fidélement exprimées par l'équation qui en marque la nature, que la Courbe tracée ſur le papier ne préſente rien aux yeux qu'on ne puiſſe lire dans ſon équation, quand on entend ce langage. Il arrive même ſouvent que l'Analyſe trouve dans une Courbe, par le calcul de ſon équation, des ſingularités que les Sens ne pourroient jamais découvrir.

Pour ſe faire une idée de la maniére dont une équation repréſente le contour d'une Ligne, il faut concevoir que l'abſciſſe, qui eſt zéro à l'Origine, va en croiſſant par tous les degrés imaginables juſqu'à l'infini, tant négatif que poſitif. La lettre x, qui déſigne l'abſciſſe, prend donc ſucceſſivement une infinité de valeurs différentes, poſitives & négatives. Ces valeurs, ſubſtituées l'une après l'autre dans l'équation indéterminée de la Courbe, la transformeroient en autant d'égalités déterminées, où l'on ne verroit plus d'inconnuës que y, dont les valeurs ſont les racines

PLANC. I. de ces égalités. Ces valeurs, ou ces racines, expriment les ordonnées qui répondent à chaque abſciſſe. Ainſi chaque abſciſſe porte à ſon extrémité une ou pluſieurs ordonnées, ſuivant qu'il y a une ou pluſieurs racines de l'égalité en laquelle ſe transforme l'équation de la Courbe, quand on ſubſtituë à x la grandeur de l'abſciſſe. La Ligne, paſſant par toutes les extrémités de ces ordonnées, aura autant de branches qu'y a de valeurs différentes dans l'équation. Et quand l'Algébre peut donner ces valeurs, leur examen fait connoitre ſi les branches auxquelles elles ſe raportent ſont finies ou infinies, quel eſt leur cours, & leur poſition; en un mot, tout ce qu'elles ont de remarquable. CHAP. I. §. 11.

Ainſi dans l'équation du Cercle, qui a été donnée au § 6, $yy - 2ay + aa + bb - 2bx + xx = rr$, ou $yy - 2ay + aa = rr - bb + 2bx - xx$, ſoit $(y - a)^2 = rr - bb + 2bx - xx$, y a deux racines ou valeurs différentes, ſçavoir $a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$, & $a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$. C'eſt pourquoi chaque abſciſſe A P $[x]$ a deux ordonnées $[y]$ P M & P M. La Courbe a donc deux branches, qui ſont les deux demi-circonférences, la ſupérieure m M m, & l'inférieure m M m. La premiére paſſe par les ſommets de toutes les ordonnées PM $[y]$ égales à $a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$, & la ſeconde par les extrémités de toutes les ordonnées PM $[y]$ égales à $a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}$. Fig. 4.

Mais dans cette autre équation indéterminée $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, y n'a qu'une ſeule valeur $\frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$. Chaque abſciſſe de la Courbe, que cette équation repréſente, n'a donc qu'une ſeule ordonnée. A proprement parler, la Courbe n'a qu'une ſeule branche : mais cette branche eſt quelquefois comptée pour deux ; parce qu'elle s'étend à l'infini du côté poſitif & du côté négatif.

12. Non-

Digitized by Google

CHAP. I. §. 12. 12. Non-ſeulement l'équation d'une Courbe indique le nombre de ſes branches, elle marque encore leur poſition. Les valeurs poſitives de x marquent des abſciſſes poſitives, & les valeurs négatives de x déſignent des abſciſſes négatives. De même les ordonnées poſitives ſont indiquées par les valeurs poſitives de y, & les ordonnées négatives, par les valeurs négatives de y. L'uſage, mais arbitraire & libre, eſt de prendre les abſciſſes poſitives à la droite, les négatives à la gauche; les ordonnées poſitives au deſſus de l'Axe des abſciſſes, les négatives au deſſous. De là les noms donnés aux quatre angles que font entr'eux les deux Axes. L'angle BAD ſe nomme l'*Angle des abſciſſes & des ordonnées poſitives*, ou l'*Angle des coordonnées poſitives*, parce que tout point de la Courbe qui ſe trouve dans cet angle a ſon abſciſſe & ſon ordonnée poſitive. Par une raiſon ſemblable, BAd eſt l'*Angle des abſciſſes poſitives & des ordonnées négatives*, DAb l'*Angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives*, & enfin dAb ſe nomme l'*Angle des abſciſſes & des ordonnées négatives*, ou l'*Angle des coordonnées négatives*. Les deux angles oppoſés DAB, dAb s'apellent, d'un nom commun, les *Angles des coordonnées de même ſigne*, & les angles oppoſés BAd, bAD ſont les *Angles des coordonnées de différens ſignes*. BAD, BAd ſont les *Angles des abſciſſes poſitives*, DAb, dAb les *Angles des abſciſſes négatives*; BAD, DAb les *Angles des ordonnées poſitives*, BAd, bAd les *Angles des ordonnées négatives*. PLANC. I. Fig. 3.

13. Quand l'Analyſe peut réſoudre l'équation d'une Ligne; ſes racines font connoître la poſition des branches de cette Courbe, elles indiquent dans quel angle, ou dans quels angles, tombent ces branches. Lorſque, dans une racine, les x étant poſitives les y le ſont auſſi, la branche que repréſente cette racine eſt dans l'angle des coordonnées poſitives : mais ſi les x poſitives donnent des y négatives,

Pl. II. gatives, la branche eſt dans l'angle des abſciſſes poſitives & des ordonnées négatives. Que ſi les x négatives rendent les y poſitives, la branche tombe dans l'angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives : mais ſi aux x négatives répondent des y auſſi négatives, la branche tombe dans l'angle des coordonnées négatives. Chap. I. §. 13.

Ainſi dans la Courbe que repréſente l'éq : $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ou $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ [§. 11], l'équation fait voir qu'à l'Origine, où x eſt zéro, la valeur de y eſt $\frac{5}{6}a$. $Aa = \frac{5}{6}a$ eſt donc la grandeur de la *prémiére ordonnée*. Suppoſant enſuite x poſitive, on voit qu'à meſure qu'elle augmente, les termes $\frac{xx}{6a}$ & x augmentent auſſi, ſans que le terme conſtant $\frac{5}{6}a$ diminuë ; ce qui prouve que l'abſciſſe x croiſſant, l'ordonnée y [$= \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$], qui eſt poſitive, croit auſſi. Donc du côté des abſciſſes poſitives, la Courbe n'a qu'une branche ad, qui tombe toute entiére dans l'angle des coordonnées poſitives, & qui, partant de l'extrémité a de la prémiére ordonnée Aa, s'éloigne à l'infini & de l'Axe des abſciſſes & de l'Axe des ordonnées. Fig. 10.

Pour connoître le cours de cette Ligne du côté des abſciſſes négatives, on fera x négative, ce qui change l'éq. $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{5}{6}a$ en $y = \frac{xx}{6a} - x + \frac{5}{6}a$. Où l'on voit que x étant moindre que $6a$, $\frac{xx}{6a}$ eſt moindre que x, de façon que le terme conſtant $\frac{5}{6}a$ eſt moins augmenté par le terme poſitif $\frac{xx}{6a}$ que diminué par le terme négatif $-x$. L'ordonnée y va donc d'abord en décroiſſant, à meſure que

1.

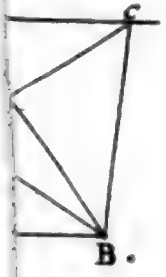
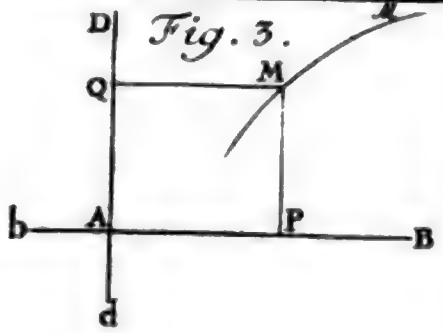


Fig. 2.

Fig. 3.



4.

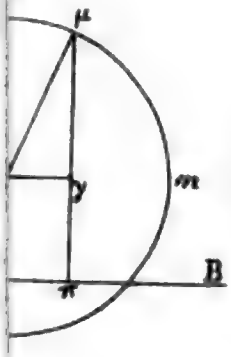


Fig. 5.

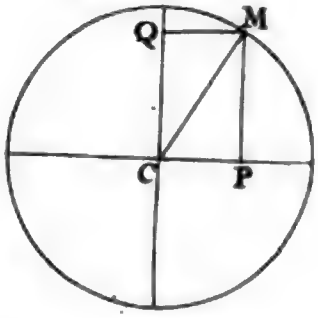


Fig. 6.

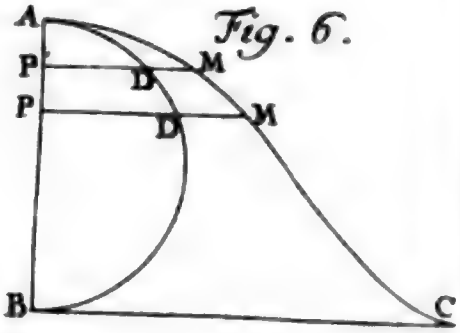


Fig. 7.

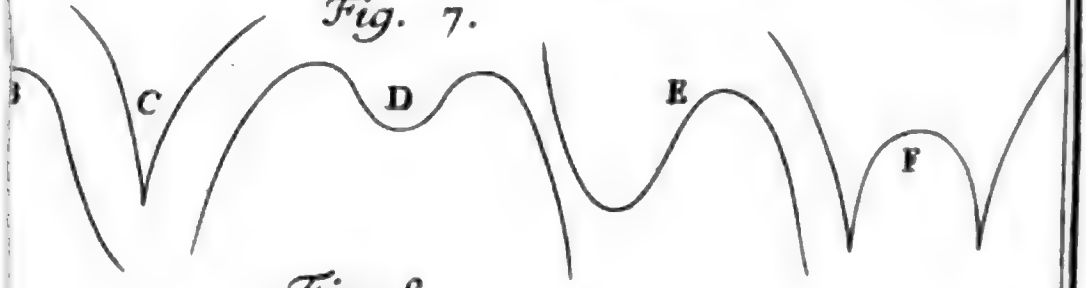


Fig. 8.

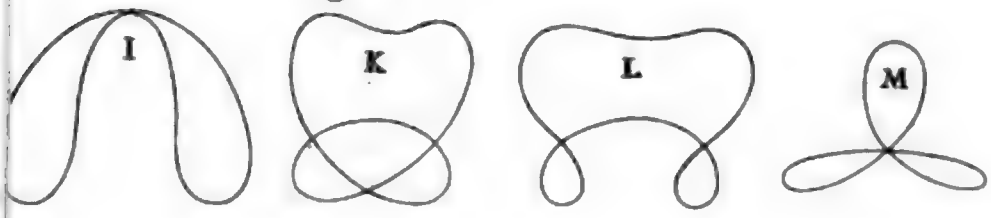
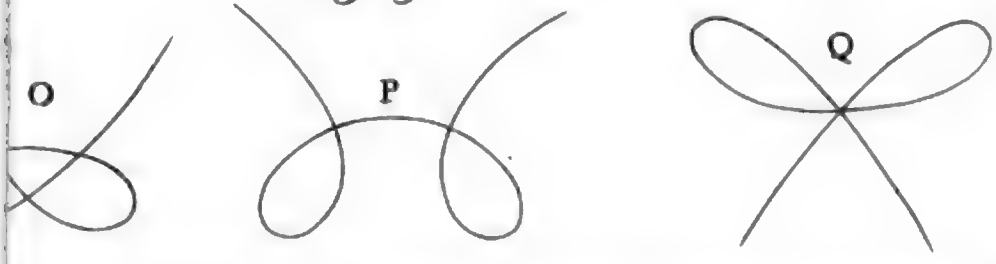


Fig. 9.



Digitized by Google

CHAP. I. §. 13. PL. II.

que x négative augmente, ſi bien que y, qui étoit à l'Origine $\frac{1}{6}a$, diminuë juſqu'à devenir zéro, quand x eſt devenuë a. Car alors y eſt $\frac{aa}{6a} - a + \frac{1}{6}a = 0$. Si donc on prend l'abſciſſe négative AE égale à a, l'ordonnée de cette abſciſſe ſera zéro, c'eſt-à-dire, que la Courbe aE paſſera par le point E de l'Axe des abſciſſes. L'abſciſſe x continuant à croître du côté négatif, les ordonnées deviennent négatives, & reſtent négatives juſqu'à-ce que x ſoit devenuë $5a = AI$. Alors l'ordonnée eſt de nouveau égale à zéro [$y = \frac{25aa}{6a} - 5a + \frac{1}{6}a = 0$]. La Courbe, après s'être enfoncée au deſſous de l'Axe des abſciſſes juſqu'à un certain terme, remonte & coupe de nouveau cet Axe au point I, éloigné de l'Origine A de la diſtance $5a$. L'abſciſſe x continuant à croître, toûjours du côté négatif, l'ordonnée y redevient poſitive, & ſe trouve égale à la prémiére ordonnée Aa [$\frac{1}{6}a$] quand x vaut $6a$. Après quoi x croiſſant toûjours, le terme poſitif $\frac{xx}{6a}$ l'emporte toûjours ſur le terme négatif $-x$, & l'ordonnée y va toûjours en augmentant à meſure que l'abſciſſe augmente, ce qui donne la branche infinie Im, qui s'éloigne à l'infini de l'un & de l'autre Axe.

On ſaiſira parfaitement ce détail, & on verra ſenſiblement quel eſt le cours de la Ligne, ſi on ſubſtituë ſucceſſivement, dans l'éq: $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{1}{6}a$, différentes valeurs au lieu de x, comme $3a$, $2a$, a, 0, $-a$, $-2a$, $-3a$, $-4a$, $-5a$, $-6a$, $-7a$, *&c.* & l'on trouvera qu'à ces abſciſſes répondent les ordonnées $5\frac{1}{3}a$, $3\frac{1}{2}a$, $2a$, $\frac{1}{6}a$, 0, $-\frac{1}{4}a$, $-\frac{3}{4}a$, $-\frac{1}{2}a$, 0, $\frac{1}{6}a$, $2a$, *&c.* Ce calcul fait, onpourra *décrire par points* cette portion de la Courbe

Pl. II. be qui s'étend depuis l'abſciſſe $3a$ juſqu'à l'abſciſſe $-7a$, c'eſt-à-dire, qu'on pourra aſſigner onze points de la Courbe, aſſez près les uns des autres, pour qu'il ſoit aiſé de la décrire avec quelque exactitude en traçant d'une main hardie une Ligne courbe par ces onze points. Pour cet effet, ayant mené deux Droites AP, AQ, qui ſe croiſent, Fig. 10. à angles droits ſi l'on veut, au point A choiſi pour l'Origine, on prendra ſur l'Axe des abſciſſes AP, du côté droit, trois parties AB, BC, CD égales à la Droite donnée a, pour avoir les trois abſciſſes poſitives $AB = a$, $AC = 2a$ & $AD = 3a$, & du côté gauche ſept parties auſſi égales à a, pour avoir les ſept abſciſſes négatives $AE = -a$, $AF = -2a$, $AG = -3a$, $AH = -4a$, $Al = -5a$, $AL = -6a$, $AM = -7a$. Par les points D, C, B, E, F, G, H, l, L, M, on ménera des paralléles à AQ, qui ſeront les ordonnées de ces abſciſſes, & on leur donnera les longueurs convenables, en faiſant $Dd = 5\frac{1}{3}a$, $Cc = 3\frac{1}{3}a$, $Bb = 2a$, $Aa = \frac{1}{3}a$, $Ff = -\frac{1}{2}a$, $Gg = -\frac{2}{3}a$, $Hh = -\frac{1}{2}a$, $Ll = \frac{1}{6}a$, $Mm = 2a$. Les points d, c, b, a, E, f, g, h, l, l, m, ainſi déterminés ſont tout autant de points de la Courbe que repréſente l'éq: $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{1}{6}a$ ou $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$: & comme ils ſont aſſez près les uns des autres, ſi la Droite a eſt fort petite, on ſe repréſentera aſſez bien la forme Fig. 11. de cette Courbe, en traçant une Ligne par tous ces points.

Chap. I. §. 13.

Autre Exemple. Si on examine de même la Courbe repréſentée par l'éq: $xxy + 2axy - axx + aay = 0$, ou $y = \frac{axx}{xx + 2ax + aa} = a\left(\frac{x}{a+x}\right)^2$, on verra que $x = 0$ donne auſſi $y = 0$, ce qui montre que la Courbe paſſe par l'Origine A. Prenant enſuite ſucceſſivement diverſes abſciſſes, toutes poſitives & toûjours plus grandes, c'eſt-à-dire x augmentant toûjours, le numérateur & le dénominateur

Digitized by Google

CHAP. I. §. 13. PL. II.

nateur de la fraction $\frac{x}{a+x}$ augmentent auſſi ; mais le numérateur augmente plus à proportion que le dénominateur. Ainſi la fraction $\frac{x}{a+x}$ & la valeur $a(\frac{x}{a+x})^2$ de l'ordonnée y vont en croiſſant, de ſorte que la branche AB, qui eſt du côté des abſciſſes poſitives, eſt toute entiére au deſſus de la Ligne des abſciſſes, & s'en éloigne de plus en plus. Elle ne s'en éloigne pourtant pas à l'infini, mais ſeulement d'une diſtance égale à la Droite donnée a. Car quand x ſeroit infinie, elle ſeroit cenſée égale à $a+x$, & y qui eſt toujours $a(\frac{x}{a+x})^2$ ſeroit égale à $a(\frac{x}{x})^2 = a$.

Du côté des abſciſſes négatives, le cours de cette Courbe eſt plus ſingulier. Pour le reconnoître, on fera x négative dans l'éq : $xxy + 2axy - axx + aay = 0$ de la Courbe, ce qui la transforme en $xxy - 2axy - axx + aay = 0$, qui ſe réduit à $y = a(\frac{x}{a-x})^2$ ou $a(\frac{x}{x-a})^2$, ſuivant que x eſt plus grande ou plus petite qu'a. Voïons d'abord quelles ordonnées répondent aux abſciſſes plus petites qu'a. Il eſt clair que plus x augmente, plus le numérateur de la fraction $\frac{x}{a-x}$ augmente, & plus le dénominateur diminuë. L'augmentation de l'un & la diminution de l'autre concourent à faire augmenter la fraction. Ainſi l'ordonnée $y\,[= a(\frac{x}{a-x})^2]$ augmente avec l'abſciſſe, mais ſi rapidement qu'elle devient infinie quand l'abſciſſe x [AC] eſt devenuë égale à a. Car alors y [CD] eſt $= a(\frac{a}{a-a})^2 = \frac{a^3}{00}$. Or une grandeur finie a^3 diviſée par le zéro repréſente l'infini, parce que le fini contient une

Pl. II. une infinité de fois le zéro ou plûtôt l'infiniment petit. Après cela l'abſciſſe x étant plus grande qu'a, l'ordonnée $y = a(\frac{x}{x-a})^2$ eſt d'abord exceſſivement grande, parce que le dénominateur $x - a$ eſt exceſſivement petit. Mais à meſure que x augmente, le dénominateur augmente & même dans une plus grande proportion que le numérateur, de ſorte que la fraction diminuë & avec elle l'ordonnée y. Cependant cette diminution a ſes bornes: car quand l'abſciſſe eſt infinie, le dénominateur $x - a$ eſt cenſé égal au numérateur x, puiſqu'il n'en différe que de la grandeur finie a qui n'eſt rien auprès de l'infinie x. Alors donc y eſt $a(\frac{x}{x})^2 = a$. Cette branche EF de la Courbe, qui répond aux abſciſſes négatives plus grandes qu'a, vient donc de l'infini en s'aprochant de l'Axe des abſciſſes : mais elle n'en aproche point plus que de la diſtance a. Et tout le cours de la Ligne eſt à peu près tel que le repréſente BADEF dans la *Fig.* 11, qui a été tracée par points, ſuivant le calcul des ordonnées, dont voici le réſultat. Chap. I. §. 13.

$x = inf., 3a, 2a, a, 0, -\frac{1}{4}a, -\frac{1}{2}a, -\frac{3}{4}a, -a, -1\frac{1}{2}a, -2a, -3a, -inf.$

$y = a, \frac{9}{16}a, \frac{4}{9}a, \frac{1}{4}a, 0, \frac{1}{9}a, a, 9a, inf., 9a, 4a, \frac{9}{4}a, a.$

14. De ces deux Exemples, quoique particuliers, on peut tirer deux Concluſions, qu'on verra ſans peine être générales.

La prémiére, c'eſt qu'une Ligne algébrique paſſe par l'Origine, quand ſon équation eſt telle que x étant ſuppoſée égale à zéro, $y = 0$ en eſt une des racines; ou, ſi l'on aime mieux, quand y étant ſuppoſée égale à zéro, $x = 0$ en eſt une des racines.

Ainſi, dans le ſecond Exemple [§. *préc.*], ſi l'on fait $x = 0$, l'éq : $xxy + 2axy - axx + aay = 0$ ſe réduit à

$aay = 0$

Digitized by Google

CHAP. I. §. 14. $aay = o$, dont $y = o$ eſt la ſeule racine. Donc à l'abſciſſe zéro, c'eſt-à-dire à l'Origine, l'ordonnée eſt zéro. La prémiére ordonnée eſt donc ſans longueur, elle ſe réduit à un point, & la Courbe, qui paſſe eſſentiellement par le ſommet de toute ordonnée, paſſe par l'Origine. PL. II.

Or $x = o$ donne $y = o$, toutes les fois que dans l'équation d'une Ligne il n'y a aucun terme tout conſtant, aucun terme qui ne renferme ni x ni y. Car, dans cette équation là, ſi l'on fait $x = o$, tous les termes où il y a quelque x s'évanouiſſent, & tous les termes qui reſtent ſont multipliés par y, puiſqu'il n'y avoit aucun terme qui n'eut ou x ou y. Ces termes reſtans s'évanouiroient donc par la ſuppoſition de $y = o$. Il ſont donc entr'eux une équation dont $y = o$ eſt une racine. Ainſi à l'abſciſſe $x = o$ répond au moins une ordonnée $y = o$. Donc la Ligne, dans l'équation de laquelle il n'y a aucun terme tout conſtant, paſſe par l'Origine.

15. La ſeconde Concluſion, c'eſt qu'on trouvera en quels points une Ligne algébrique coupe l'Axe des ordonnées, en faiſant $x = o$ dans l'équation de cette Ligne. Les valeurs de y dans l'équation transformée détermineront les points où la Ligne rencontre l'Axe des ordonnées.

Ainſi dans le premier Exemple du §. préc. en faiſant $x = o$ dans l'éq: $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{1}{6}a$, on la réduit à $y = \frac{1}{6}a$. C'eſt pourquoi la Courbe ne paſſe pas par l'Origine A, parce que $x = o$ ne donne pas $y = o$: mais elle paſſe par le point a de la Ligne des ordonnées, qui eſt à la diſtance $Aa = \frac{1}{6}a$ de l'Origine, parce que $x = o$ donne $y = \frac{1}{6}a$. Fig. 10.

De même, on aura les points où une Ligne algébrique coupe l'Axe des abſciſſes, en cherchant les valeurs de

Pl. II. x dans l'équation transformée par la ſubſtitution de zéro au lieu de y.

Dans la même équation, $y = \frac{xx}{6a} + x + \frac{1}{6}a$ ou $xx + 6ax + 5aa - 6ay = 0$, ſi l'on fait $y = 0$, on aura $xx + 6ax + 5aa = 0$, qui a deux racines $x = -a$, & $x = -5a$. Ce qui montre que la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes en deux points E, I; ſçavoir, aux extrémités des abſciſſes AE [$-a$] & AI [$-5a$].

16. C'est donc les abſciſſes & les ordonnées, qui, ſuivant qu'elles ſont poſitives ou négatives, déterminent la poſition des branches d'une Ligne algébrique, & qui font connoître dans lequel des quatre angles des coordonnées elles ſe trouvent. Ces ordonnées méritent encore plus d'être conſidérées quand l'équation les donne imaginaires *, quand elle les détermine à ceſſer d'être poſſibles. Alors la Courbe manque dans toute l'étenduë où les ordonnées ſont imaginaires. Elle manque tout-à-fait, ou, pour mieux dire, l'équation ne repréſente aucune Courbe, lorſque ſes racines ſont toûjours imaginaires.

Telle eſt l'équation $yy + xx + rr = 0$, dont les racines $y - \sqrt{(-rr - xx)} = 0$, & $y + \sqrt{(-rr - xx)} = 0$ ſont eſſentiellement imaginaires, quelque valeur qu'on donne à x.

Mais il arrive plus ſouvent que la Courbe ne manque qu'en partie. Cela a lieu quand les racines qui expriment les ordonnées ſont réelles dans une certaine étenduë, & imaginaires dans une autre étenduë. Soit que la Courbe renfermée, comme le Cercle, dans un certain eſpace ne s'étende point au-delà, ni d'un côté ni de l'autre. Soit qu'allant à l'infini d'un côté elle ne paſſe point certaines bornes

* *Hiſt. de l'Acad.* 1729. pag. 42.

Digitized by Google

CHAP. I. §. 16. bornes de l'autre. Soit qu'étenduë à l'infini de part & d'autre elle laiſſe dans le milieu un ou pluſieurs eſpaces où les ordonnées ſont imaginaires. Alors il y a dans ce milieu des vuides qui ſéparent les parties de la Courbe. PL. II.

Soit propoſée l'équation $y^4 - 96yy - x^4 + 100xx = 0$, qui, réſoluë par la méthode ordinaire pour les équations du ſecond degré, ſe trouve avoir ces quatre racines,

$$y = +\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$
$$y = +\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$
$$y = -\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$
$$y = -\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$$

Où l'on voit 1°. Qu'en général à chaque abſciſſe x répondent quatre ordonnées y, hors les cas où quelques-unes, ou bien les quatre, deviennent imaginaires.

2°. Que les deux prémiéres racines, étant poſitives, indiquent des branches qui ſont au deſſus de la Ligne des abſciſſes, au lieu que les branches repréſentées par les deux derniéres racines, qui ſont négatives, tombent au deſſous de la Ligne des abſciſſes (§. 13).

3°. Que la prémiére & troiſiéme racine étant préciſément les mêmes, ſi ce n'eſt que la prémiére eſt poſitive & la troiſiéme négative; la branche que repréſente la prémiére eſt ſemblable à celle que déſigne la troiſiéme, mais dans une poſition renverſée, l'une étant au deſſus & l'autre au deſſous de l'Axe des abſciſſes. Ce qui ayant auſſi lieu pour la ſeconde & quatriéme racine, il ſuit que l'Axe des abſciſſes partage la Courbe en deux parties qui ſe reſſemblent; & même, ſi les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes, en deux parties exactement égales & ſemblables, & qui ſe regardent mutuellement, de ſorte que l'une eſt, pour ainſi dire, l'image ou la contr'épreuve de l'autre.

Pl. II. 4°. Que dans ces quatre racines, comme il n'y a que des puiſſances paires de x, ſçavoir, x^2 & x^4, qui ſont également puiſſances de x & de $-x$; chaque abſciſſe négative a les mêmes ordonnées que l'abſciſſe poſitive égale : de ſorte que le côté gauche de la Courbe eſt tout pareil à ſon côté droit ; ou, ce qui eſt la même choſe, que l'Axe des ordonnées partage, comme celui des abſciſſes, la Courbe en deux parties ſemblables. Chap. I. §. 16.

Il ſuffira donc d'examiner les ordonnées poſitives qui répondent aux abſciſſes poſitives, de voir ce que donne x poſitive dans les deux prémiéres racines de l'équation. Car quand on aura les branches de la Courbe dans l'angle des coordonnées poſitives, on aura le cours entier de cette Ligne, puiſqu'il eſt exactement le même dans les trois autres angles.

Voyons donc d'abord quelles branches fournit la prémiére racine $y = \sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$. Cette racine ſera réelle, tant qu'on donnera à x une valeur qui rende $x^4 - 100xx + 2304$ poſitive. Car cette grandeur étant poſitive, ſa racine quarrée précédée du ſigne $+$ eſt réelle & poſitive, laquelle avec 48 fait une ſomme poſitive, dont la racine quarrée $\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ eſt réelle. Si au contraire on donne à x une grandeur qui rende $x^4 - 100xx + 2304$ négative, la racine quarrée de cette grandeur négative eſt imaginaire, & y, dont l'expreſſion $\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ renferme cette racine quarrée, eſt imaginaire. L'exiſtence ou non-exiſtence des branches repréſentées par cette racine, dépend donc de ce que la grandeur $x^4 - 100xx + 2304$ eſt poſitive ou négative. Pour déterminer ce qu'elle eſt, on cherchera les racines $xx - 36 = 0$ & $xx - 64 = 0$ de l'éq: $x^4 - 100xx + 2304 = 0$, afin de réduire cette grandeur en ſes deux facteurs $(xx - 36) \times (xx - 64)$. On réduira de même $xx - 36$ en ſes deux facteurs

CHAP. I. §. 16. facteurs $(x-6)\times(x+6)$ & $xx-64$ en ſes deux fa- PL. II.
cteurs $(x-8)\times(x+8)$. Ainſi la grandeur $x^4-100xx+2304$ eſt réduite en ſes quatre facteurs $(x+6)\times(x-6)\times(x+8)\times(x-8)$. Elle ſera donc poſitive, ſi ces quatre facteurs ſont poſitifs, ou s'il y en a deux ſeulement : mais elle ſera négative, ſi un ſeul de ſes facteurs, ou trois, ſont poſitifs. Comme on ſuppoſe x poſitive, les deux facteurs $x+6$ & $x+8$ ſont eſſentiellement poſitifs. Donc $x^4-100xx+2304$ eſt une grandeur poſitive, quand $x-6$ & $x-8$ ſont tous deux poſitifs ou tous deux négatifs : elle eſt négative, quand x tombant entre 6 & 8 rend $x-6$ poſitif & $x-8$ négatif.

La racine $y=+\sqrt{(48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)})}$ donne donc deux branches ſéparées par l'intervalle qui tombe entre les abſciſſes $x=6$ & $x=8$. Examinons ces deux branches l'une après l'autre.

D'abord, ſi $x=0$, on aura $y=\sqrt{(48+\sqrt{2304})}=\sqrt{(48+48)}=\sqrt{96}$. C'eſt la grandeur de la prémiére ordonnée de cette branche. Enſuite, x prenant quelque grandeur, $-100xx$ retranche plus de 2304 que x^4 ne lui ajoute : enſorte que l'ordonnée va en décroiſſant à meſure que l'abſciſſe augmente, juſqu'à-ce que $x=6$ faiſant $x^4-100xx+2304$ égal à zéro réduiſe y à $\sqrt{48}$. La prémiére branche CB va donc en s'aprochant de la Fig. 12. Ligne des abſciſſes, dès le point C extrémité de la prémiére ordonnée $AC=\sqrt{96}$ juſqu'au point B extrémité de l'ordonnée $PB=\sqrt{48}$, qui répond à l'abſciſſe $AP=6$.

L'autre branche, que déſigne la même racine $y=\sqrt{(48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)})}$ commence à l'abſciſſe $x=8=AQ$. Cette valeur de x rendant $x^4-100xx+2304$ égal à zéro, donne $y=QD=\sqrt{48}$. Dès lors x croiſſant augmente la grandeur $x^4-100xx+2304$ & par conſéquent l'ordonnée $y\,[+\sqrt{(48+\sqrt{(x^4-100xx+2304)})}]$

PL. II. Cette racine marque donc une branche DE, qui part du point D & va en s'éloignant à l'infini de l'Axe des abſciſſes & de celui des ordonnées. CHAP. I. §. 16.

Voyons à préſent quelles branches donne la ſeconde racine $y = \sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$.

On voit d'abord que cette racine eſt imaginaire, comme la précédente, tant que $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ eſt imaginaire; c'eſt-à-dire, dans tout l'intervalle compris entre les abſciſſes $x = 6$ & $x = 8$, où la Courbe n'a ni ordonnée ni branche.

Outre cela, cette ſeconde racine eſt imaginaire quand $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ ſurpaſſe 48, parce qu'alors $48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ eſt négative, & ſa racine quarrée, qui eſt la valeur de y, imaginaire. Or $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ ſurpaſſe 48, quand ſon quarré $x^4 - 100xx + 2304$ ſurpaſſe le quarré de 48, qui eſt 2304, quand $x^4 - 100xx > 0$, ou $x^4 > 100xx$, quand $xx > 100$, ou $x > 10$.

La racine $y = \sqrt{(48 - (x^4 - 100xx + 2304))}$ eſt donc imaginaire, 1°. quand x tombe entre 6 & 8, & 2°. quand x ſurpaſſe 10. Elle eſt au contraire réelle, 1°. quand x eſt moindre que 6, & 2°. quand x tombe entre 8 & 10. Elle indique donc, comme la précédente, deux branches, mais dans une poſition bien différente. Conſidérons-les l'une après l'autre.

Si on fait $x = 0$, on aura $y = \sqrt{(48 - \sqrt{2304})} = \sqrt{(48 - 48)} = 0$. La prémiére branche paſſe donc par l'Origine. Enſuite x croiſſant, $x^4 - 100xx + 2304$ décroit, & par conſéquent $\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$, ou y, augmente, juſqu'à-ce que x devenuë égale à $6 = AP$, donne $x^4 - 100xx + 2304 = 0$, & $y = \sqrt{48} = PB$. Cette racine exprime donc la branche AB, qui, partant de l'Origine A, va ſe joindre à l'extrémité B de la prémiére branche CB indiquée par l'autre racine.

On

CHAP. I. *§.* 16. On a déja dit que toutes les abſciſſes entre AP = 6, & AQ = 8 n'ont que des ordonnées imaginaires. Mais $x = AQ = 8$ rend $x^4 - 100xx + 2304$ égal à zéro, & donne $y = \sqrt{(48 - 0)} = \sqrt{48} = QD$. Enſuite x augmentant, $x^4 - 100xx + 2304$ augmente, & $\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ diminuë, juſqu'à-ce que $x = 10$ rende $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ égale à $\sqrt{2034} = 48$ & $y = \sqrt{(48 - 48)} = 0$. La Courbe paſſe par l'extrémité de l'abſciſſe $x = 10 = AF$. Donc la ſeconde branche qu'indique la racine $y = \sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ eſt la branche DF, qui, partant de l'extrémité D de la branche DE indiquée par la prémiére racine, vient ſe terminer au point F de l'Axe des abſciſſes. PL. II.

On voit par tout ce détail que dans l'angle CAF des coordonnées poſitives, la Courbe pouſſe les branches ABC, FDE; auxquelles joignant de ſemblables branches dans les trois autres angles des coordonnées, on aura la Courbe entiére formée d'un Huit-de-chifre, qui ſe nouë à l'Origine, & de deux autres parties ſéparées, qui, après avoir ſerpenté à droite & à gauche, mais à quelque diſtance du Huit-de-chifre, jettent quatre branches à l'infini, une dans chacun des quatre angles des coordonnées.

On remarquera ſenſiblement tous ces détours en traçant la Courbe par points, ſuivant le Calcul ci-joint, où les grandeurs radicales ont été réduites à des approximations en fractions décimales. Fig. 12.

Soit

Pl. II. §. 16.

Soit $x = 0$, la 1e. y ſera $= \sqrt{(48+\sqrt{2304})} = 9.798-$, & la 2e. $y = \sqrt{(48-\sqrt{2304})} = 0$

$= 1. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{2205})} = 9.744+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{2205})} = 1.021+$

$= 2. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{1920})} = 9.582+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{1920})} = 2.045-$

$= 3. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{1485})} = 9.302+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{1485})} = 3.076+$

$= 4. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{960})} = 8.887+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{960})} = 4.125+$

$= 5. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{429})} = 8.289+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{429})} = 5.224-$

$= 6. \ldots \sqrt{(48+0)} = 6.928+ \ldots \sqrt{(48-0)} = 6.928+$

$= 7. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{-195})} = imag. \ldots \sqrt{(48-\sqrt{-195})} = imagin.$

$= 8. \ldots \sqrt{(48+0)} = 6.928+ \ldots \sqrt{(48-0)} = 6.928+$

$= 9. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{765})} = 8.698+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{765})} = 4.510+$

$= 10. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{2304})} = 9.798+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{2304})} = 0$

$= 11. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{4845})} = 10.845+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{4845})} = imag.$

$= 12. \ldots \sqrt{(48+\sqrt{8640})} = 11.856+ \ldots \sqrt{(48-\sqrt{8640})} = imag.$

&c. &c. &c.

17. On peut remarquer dans cette Courbe, & la même choſe a lieu dans toute autre qui a des ordonnées imaginaires, qu'une prémiére ou derniére ordonnée réelle, celle qui ſert de limite aux ordonnées réelles & aux imaginaires, eſt proprement une double ordonnée, ou, ſi l'on veut, deux ordonnées égales réunies & confondues en une ſeule.

Fig. 12. Telles ſont les ordonnées PB & QD qui répondent aux abſciſſes $AP = 6$ & $AQ = 8$, & aux ſommets B, D deſquelles ſe terminent les branches CB, AB & ED, FD. Si l'on fait $x = 6$, ou $x = 8$, la grandeur radicale $\sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)}$ devient zéro, & les deux racines $+\sqrt{(48 + \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ & $+\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ ſe réduiſent l'une & l'autre à $\sqrt{48}$, & deviennent égales. Donc, au lieu qu'en général, dans cette Courbe, chaque abſciſſe a deux ordonnées poſitives, les abſciſſes $AP = 6$ & $AQ = 8$ n'ont qu'une ſeule ordonnée poſitive PB, QD, ou, ſi l'on veut, elles en ont deux, mais égales & réunies. Plus l'abſciſſe $A\pi$ aproche de devenir égale à AP, plus π s'aproche de P, plus auſſi les ſommets ζ & β des ordonnées $\pi\zeta$, $\pi\beta$ s'aprochent l'un de

CHAP. I. de l'autre, juſqu'à-ce que Aπ devenant AP, le point π PL. II.
§. 17. tombant ſur P, les ſommets β & ζ tombent l'un ſur l'autre & tous deux enſemble ſur B.

Telles ſont auſſi les ordonnées que repréſentent les racines $+\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$ & $-\sqrt{(48 - \sqrt{(x^4 - 100xx + 2304)})}$, lorſqu'on fait $x = 10 = AF$. Cette ſuppoſition rend ces deux racines égales à zéro, & par conſéquent égales entr'elles. Ici donc, deux ordonnées, une poſitive & une négative, deviennent égales & ſe réuniſſent en une ſeule ordonnée égale à zéro. Et cette ordonnée, ou plûtôt ce point F, eſt une limite qui ſépare les ordonnées réelles des imaginaires, une borne où viennent ſe terminer les deux branches DF, dF.

18. Ceci a généralement lieu dans toutes les Lignes algébriques, qui ont des ordonnées imaginaires, & ſuit néceſſairement de ce que l'Algébre enſeigne ſur les racines imaginaires, qu'elles ſont toûjours en nombre pair dans une équation, & qu'elles vont, pour ainſi dire, deux à deux : en ſorte qu'ayant été réelles juſqu'à un certain point, ſi elles deviennent imaginaires au-delà, elles ſont égales en ce point, ſoit qu'elles y ayent une grandeur finie, ſoit qu'elles y deviennent infinies, ſoit qu'elles s'anéantiſſent & ſe réduiſent à zéro. Car une racine ne paſſe du réel à l'imaginaire, * que parce que dans ſon expreſſion il entre, ſous un ſigne radical d'un expoſant pair, quelque grandeur, qui de poſitive devient négative : ce qui ne ſe peut faire ſans qu'elle paſſe par le zéro. Mais l'équation aura toûjours une autre racine exprimée de la même maniere que la précédente, ſi ce n'eſt que la grandeur radicale a un ſigne contraire. Dont la raiſon eſt que

* *Uſage de l'Analyſe de* DES CARTES, *&c.* par Mr. l'Abbé DE GUA. pag. 423.

Digitized by Google

Pl. II. chaque racine d'un expoſant impair eſt également poſitive & négative, & par conſéquent double. Lors donc que cette grandeur radicale paſſe par le zéro; les expreſſions de ces deux racines ne différent plus l'une de l'autre, les ordonnées qu'elles repréſentent ſont égales. Ch. II. §. 18.

Si, par ex. $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$ eſt la racine d'une équation indéterminée; cette équation aura auſſi ces trois autres racines, $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{-\sqrt{(2ax - xx)}}$, $y = \frac{ab - a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, & $y = \frac{ab - a\sqrt{(xx - aa)}}{-\sqrt{(2ax - xx)}}$. Car ſi l'on veut débaraſſer de ſignes radicaux l'équation $y = \frac{ab + a\sqrt{(xx - aa)}}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, on aura d'abord $y\sqrt{(2ax - xx)} = ab + a\sqrt{(xx - aa)}$, & quarrant $yy(2ax - xx) = a^2b^2 + 2aab\sqrt{(xx - aa)} + aa(xx - aa)$; enſuite tranſpoſant $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = 2aab\sqrt{(xx - aa)}$, & quarrant derechef $(yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa))^2 = 4a^4bb(xx - aa)$. Or cette équation, ainſi dégagée de l'irrationalité, a les quatre racines indiquées ci-deſſus. Car, ſi l'on en tire la racine quarrée, on aura également $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = +2aab\sqrt{(xx - aa)}$, & $yy(2ax - xx) - aabb - aa(xx - aa) = -2aab\sqrt{(xx - aa)}$, parce que la racine quarrée de $xx - aa$ a également le ſigne + & le ſigne —. Ces deux équations étant miſes ſous cette forme $yy = \frac{aabb + 2aab\sqrt{(xx - aa)} + aa(xx - aa)}{(2ax - xx)}$, & $yy = \frac{aabb - 2aab\sqrt{(xx - aa)} + aa(xx - aa)}{2ax - xx)}$; ſi l'on en tire la racine quarrée, la prémiére donne $y = ab +$

Ch. II. §. 18. $\frac{ab+a\sqrt{(xx-aa)}}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, & $y=\frac{ab+a\sqrt{(xx-aa)}}{-\sqrt{(2ax-xx)}}$; & Pt. II. la ſeconde donne $y=\frac{ab-a\sqrt{(xx-aa)}}{\sqrt{(2ax-xx)}}$, & $y=\frac{ab-a\sqrt{(xx-aa)}}{-\sqrt{(2ax-xx)}}$, parce que la racine quarrée de $2ax-xx$ peut prendre également le ſigne $+$ & le ſigne $-$. Ainſi l'équation rationelle $(yy(2ax-xx)-aabb-aa(xx-aa))^2=4a^4bb(xx-aa)$ a ces quatre racines, qu'on repréſente, au moyen du ſigne ambigu $\pm$, par cette ſeule expreſſion $y=\frac{ab\pm a\sqrt{(xx-aa)}}{\pm\sqrt{(2ax-xx)}}$.

Si l'on fait $x=a$, ce qui rend $xx-aa=0$, la prémiére & la troiſiéme racine deviennent l'une & l'autre égales à $+\frac{ab}{a}=+b$, la ſeconde & la quatriéme à $-b$. Ces racines devenant égales conſervent une grandeur finie, à moins que b ne ſoit $=0$; en quel cas elles deviennent nulles toutes les deux. Mais ſi l'on fait $x=2a$, ce qui rend $2ax-xx=0$, les quatre racines deviennent infinies, étant égales au fini $ab\pm a\sqrt{3aa}$ diviſé par le zéro.

19. Par conſéquent, toute branche de Courbe, ou a un cours infini, ou vient ſe rejoindre à une autre branche de Courbe *. Car ſi une branche ſe terminoit bruſquement, & paſſoit de l'être au non-être, ſans aboutir à aucune autre branche, la racine qui repréſente les ordonnées de cette branche paſſeroit du réel à l'imaginaire ſans devenir égale à une autre racine: ce qui eſt impoſſible [§. *précéd.*].

C'eſt ce qu'on veut dire quand on aſſure que le cours

 d'une

* *Uſage de l'Analyſe de* DES CARTES, *&c.* pag. 424.

Pl. II. d'une Ligne algébrique eſt continu *. Car du reſte une Courbe peut avoir des parties détachées, qui paroiſſent jettées çà & là : ce qui n'empêche pas qu'on ne la regarde comme une ſeule Courbe, parce que ſes parties ſéparées conſervent une continuité ſecréte par le lien de l'équation. Mais ceci demande un éclairciſſement. Chap. I. §. 19.

20. Une ſeule équation peut repréſenter l'aſſemblage ou le ſyſtême de pluſieurs Lignes tracées ſur un plan. C'eſt lorſque cette équation eſt le produit de pluſieurs équations rationelles, qui repréſentent diverſes Lignes raportées à une même Origine & aux mêmes Axes. Car ſi l'on diſpoſe pluſieurs équations de maniere que leur ſecond membre ſoit le zéro, & qu'on les multiplie les unes par les autres ; leur produit eſt une équation qui a pour ſes racines toutes les racines des équations dont elle eſt formée. Donc, puiſque chaque racine d'une équation indéterminée exprime une branche de la Ligne que cette équation repréſente [§. 11], le produit de pluſieurs équations déſigne la Courbe qui a toutes les branches des Lignes particuliéres dont les équations ont concouru à former ce produit. Elle repréſente donc le ſyſtême de toutes ces Lignes.

Fig. 13. Par ex. ſi deux Cercles égaux ſont tracés ſur un même plan, & qu'on prenne pour l'Origine le centre A de l'un, les coordonnées é ant à angles droits, on aura, pour repréſenter les deux circonférences r M R M, q m Q m, l'équation compoſée de celles des §§. 6 & 7,

$$(yy - 2ay + aa + bb - 2bx + xx - rr) \times (yy + xx - rr) = 0$$

* Stirling, *Linea tertii ordinis* Newtonianæ &c. 8°. *Oxon.* 1717. pag. 4.

ou

CHAP. I. §. 20. ou $y^4 - 2ay^3 + 2x^2y^2 - 2ax^2y + x^4 = 0$ PL. II.

$$\begin{array}{l} -2bxy^2 + 2ar^2y - 2bx^3 \\ +aay^2 \quad +aax^2 \\ +bby^2 \quad +bbx^2 \\ -2rry^2 \quad -2rrx^2 \\ \qquad +2br^2x \\ \qquad -aarr \\ \qquad -bbrr \\ \qquad +r^4 \end{array}$$

Car cette équation eſt équivalente à celle-ci, $(y - a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}) \times (y - a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)}) \times (y - \sqrt{(rr - xx)}) \times (y + \sqrt{(rr - xx)}) = 0$, où ſes quatre racines ſont ſéparées. Donc à chaque valeur de x répondent quatre valeurs de y, chaque abſciſſe AP a quatre ordonnées PM, Pm, PM, Pm, ſi ce n'eſt lorſqu'elles deviennent imaginaires. La racine $y - a - \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)} = 0$ repréſente le demi-cercle rMR : La racine $y - a + \sqrt{(rr - bb + 2bx - xx)} = 0$ marque le demi-cercle RMr : La racine $y - \sqrt{(rr - xx)} = 0$ déſigne le demi-cercle q m Q : Et la racine $y + \sqrt{(rr - xx)} = 0$ exprime le demi-cercle Qm q. L'équation qui a ces quatre racines repréſente donc les deux circonférences r M R M, q m Qm.

21. Par conſéquent, lorſqu'une équation peut être diviſée en d'autres équations rationelles, la Ligne qu'elle repréſente eſt le ſyſtême de différentes Lignes. Mais lors qu'une équation eſt irréductible, lorſqu'elle n'a point de diviſeurs rationels, la Ligne qu'elle exprime doit être cenſée une ſeule Ligne, encore qu'elle ait des branches détachées les unes des autres.

L'équation $y - \sqrt{(rr - xx)} = 0$ exprime le ſeul demi-cercle

Pl. II. mi-cercle q m Q. Mais ſi l'on veut ôter l'irrationalité [en faiſant $y = \sqrt{(rr - xx)}$, & quarrant l'un & l'autre membre], on aura $yy + xx - rr = 0$, qui, avec la racine $y - \sqrt{(rr - xx)} = 0$, renferme encore la racine $y + \sqrt{(rr - xx)} = 0$, qui exprime le demi-cercle q m Q. On ne ſauroit donc repréſenter le demi-cercle q m Q par une équation rationelle, ſans qu'elle exprime en même tems le demi-cercle q m Q. Ces deux demi-cercles appartiennent donc à une même Courbe. Chap. I. §. 21.

Et l'on voit généralement qu'on ne peut donner une équation rationelle d'une Courbe mêlée, ou compoſée de portions de différentes Lignes : parce que cette équation rationelle exprimera auſſi les autres portions de ces Lignes, qu'on ne voudroit pas exprimer. Ainſi l'équation de l'Ovale compoſée de quatre arcs de Cercle, repréſente, ſi elle eſt rationelle, non ſeulement ces quatre arcs, mais les quatre circonférences entiéres.

Il faut ſeulement remarquer que les équations, dans leſquelles une autre peut ſe décompoſer, ſont cenſées rationelles, quand l'irrationalité n'affecte point les variables x & y, mais ſeulement leurs coëfficiens ou les conſtantes.

Ainſi l'éq : $y^4 - 2bbyy - abxx + b^4 = 0$ ſe pouvant diviſer en ces deux-ci, $yy - x\sqrt{ab} - bb = 0$ & $yy + x\sqrt{ab} - bb = 0$, elle ne ſera pas cenſée repréſenter une ſeule Courbe, mais l'aſſemblage de deux Courbes, dont la nature s'exprime par les deux équations qui compoſent la Propoſée.

22. AVANT de finir ce Chapitre, ajoutons un mot ſur la manière de décrire une Courbe par points, qui a été indiquée aux §§. 13 & 16. Dans cette recherche de pluſieurs points d'une Ligne algébrique dont l'équation eſt donnée, nous avons pris des ſuites d'abſciſſes en progreſſion arithmétique ; & c'eſt ſans doute ce qu'il y a de mieux,

CHAP. I. §. 22. mieux, quand on n'a pas des raiſons particuliéres pour faire ſon calcul autrement. Il n'y avoit point de pareilles raiſons dans les Exemples du §. 13. Mais dans celui du §. 16, ce choix des abſciſſes a jetté dans des extractions de racines quarrées, qui ont obligé à ſe contenter d'avoir les valeurs des ordonnées ſimplement par approximation. On peut ſouvent éviter cet embarras, en cherchant uniquement les abſciſſes & les ordonnées qui ſont rationelles *, & en employant dans cette vûë les méthodes de DIOPHANTE, & autres ſemblables, qui ſervent à éviter les nombres irrationels. PL. II.

Un *Exemple* aſſés ſimple fera comprendre cet uſage. Soit propoſée l'éq : $x^3y^2 - 10x^2y + 60 = 0$, dont les racines ſont $y = \frac{5+\sqrt{(25-\frac{60}{x})}}{x}$ & $y = \frac{5-\sqrt{(25-\frac{60}{x})}}{x}$. Si on ſuppoſe ſucceſſivement $x = 0, 1, 2, 3, 4$, *&c.* il arrivera fort ſouvent que $\sqrt{(25-\frac{60}{x})}$, & par conſéquent y ſera une grandeur irrationelle; ce qui engageroit à des calculs pénibles & ne permettroit pas une entiére exactitude. Mais ſi au lieu de prendre les x en progreſſion arithmétique, on choiſit celles qui donnent des y rationelles, le calcul ſera plus facile, & néanmoins auſſi propre à donner une idée de la Courbe.

D'abord, il eſt clair que l'abſciſſe x étant poſitive & petite, l'ordonnée $y\,[= \frac{5 \pm \sqrt{(25-\frac{60}{x})}}{x}]$ ſera imaginaire: parce que x étant petite, $\frac{60}{x}$ eſt grande, & $25-\frac{60}{x}$ négative.

* *Hiſt. de l'Acad.* 1712. pag. 55.

Pl. II. négative. Donc $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$, & par conſéquent y eſt imaginaire, tant que 25 eſt plus petit que $\frac{60}{x}$, tant que $25x < 60$, ou que $x < \frac{60}{25} = 2\frac{1}{5}$. Mais auſſi tôt que x eſt égale à $2\frac{1}{5}$, y commence à être réelle, & comme en ce point $25 - \frac{60}{x}$ eſt zéro, à l'abſciſſe $= 2\frac{1}{5}$ répondent deux ordonnées poſitives égales chacune à $\frac{5}{2\frac{1}{5}} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}$. Chap. I. §. 22.

Pour avoir, après cela, une ſuite d'abſciſſes & d'ordonnées rationelles, on fera ſucceſſivement $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$ égal à 1, 2, 3, 4, &c. & on trouvera que

$\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 1$ donne $x = 2\frac{1}{2}$, la 1e. $y = 2\frac{1}{2}$, & la 2e. $y = 1\frac{3}{5}$.
$= 2$ . . $= 2\frac{6}{7}$ . . $= 2\frac{9}{10}$ . . $= 1\frac{1}{20}$
$= 3$ . . $= 3\frac{1}{4}$ . . $= 2\frac{1}{13}$ . . $= \frac{8}{15}$
$= 4$ . . $= 6\frac{2}{3}$ . . $= 1\frac{7}{20}$ . . $= \frac{1}{20}$

Si l'on fait enſuite $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 5$, on trouvera $\frac{60}{x} = 0$, ce qui donne x infinie, & $y = \frac{5 \pm \sqrt{25}}{\infty} = \frac{10 \text{ ou } 0}{\infty}$, qui eſt le zéro, ou l'infiniment petit. Continuant à ſuppoſer $\sqrt{(25 - \frac{60}{x})}$ égale à 6, 7, 8, &c. on aura x négative

$\sqrt{(25 - \frac{60}{x})} = 6$. $x = -5\frac{5}{11}$. 1e. $y = -2\frac{1}{25}$. 2e. $y = \frac{11}{60}$
$= 7$. $= -2\frac{1}{2}$ . . $= -4\frac{1}{5}$ . . $= \frac{4}{5}$
$= 8$. $= -1\frac{7}{15}$ . . $= -8\frac{9}{20}$ . . $= 1\frac{19}{20}$
$= 9$. $= -1\frac{2}{4}$ . . $= -13\frac{1}{15}$ . . $= 3\frac{11}{15}$
$= 10$. $= -\frac{4}{5}$ . . $= -18\frac{1}{4}$ . . $= 6\frac{1}{4}$
&c. &c. &c. &c.

On

CHAP. I. §. 22. PL. II.

On trouvera peut-être trop de vuide entre l'abſciſſe $6\frac{1}{3}$ & l'abſciſſe infinie poſitive, qui réſultent des ſuppoſitions, $\sqrt{(25-\frac{60}{x})}=4$ & $\sqrt{(25-\frac{60}{x})}=5$, comme auſſi entre l'abſciſſe infinie négative & l'abſciſſe $-5\frac{1}{11}$ que donnent les ſuppoſitions $\sqrt{(25-\frac{60}{x})}=5$, & $\sqrt{(25-\frac{60}{x})}=6$. Pour remplir ces vuides, on peut ſuppoſer $\sqrt{(25-\frac{60}{x})}$ égale à quelcun des nombres rompus, qui ſe trouvent entre 4 & 5 & entre 5 & 6. Par exemple,

$\sqrt{(25-\frac{60}{x})}=4\frac{1}{3}$ donne $x=9\frac{9}{14}$, la 1e. $y=\frac{182}{405}$ & la 2e. $y=\frac{28}{405}$.

$=4\frac{2}{3}$ . . $=18\frac{28}{45}$ . . $=\frac{551}{1620}$ . . $=\frac{19}{1562}$

: : : : : :

$=5\frac{1}{3}$ . . $=-17\frac{11}{31}$ . . $=-\frac{361}{1620}$ . . $=\frac{1}{1620}$

$=5\frac{2}{3}$ . . $=-8\frac{9}{32}$ . . $=-1\frac{239}{795}$ . . $=\frac{64}{795}$

Prenant donc toutes les abſciſſes qui ſont ici marquées, & leur donnant à chacune les deux ordonnées qui ſont calculées, on aura pluſieurs points de la Courbe, par leſquels on reconnoit que ſon cours eſt à peu près tel que le repréſente la *Fig.* 14.

Cet Exemple ſuffit pour donner une idée de cette méthode, & pour faire juger des facilités qu'elle aporte dans le Calcul. Il eſt ſeulement fâcheux qu'elle ne ſoit pas générale, & que les artifices de DIOPHANTE ſoient ſi bornés. On peut quelquefois trouver d'autres tours qui réuſſiſſent dans des cas, où ces moyens ne ſuffiroient pas.

23. Il eſt, par exemple, très ſouvent utile de prendre une troiſiéme indéterminée, dont les raports à x & à y peu-

Pl. II. vent être beaucoup plus ſimples que celui de y à x. Car il peut arriver que l'équation en x & y ſoit fort compoſée & qu'on puiſſe trouver une variable z qui aura des raports aſſez ſimples avec x & avec y. Alors, au moyen de cette indéterminée z, on trouvera tant de points qu'on voudra de la Ligne algébrique dont x & y ſont les coordonnées. Chap. I. §. 23.

Ainſi, ſi l'on propoſe la Courbe dont la nature eſt exprimée par l'éq: $y^4 + x^2y^2 + 2y^3 - x^3 = 0$, il ſeroit difficile d'en tirer la valeur d'y ou d'x, puiſqu'il faudroit réſoudre pour l'une une équation du troiſiéme, & pour l'autre, une équation du quatriéme degré. Mais ſi l'on ſuppoſe $x = yz$, on transformera l'équation propoſée en $y^4 + y^4z^2 + 2y^3 - y^3z^3 = 0$, qui, diviſée par y^3, ſe réduit à $y + yz^2 + 2 - z^3 = 0$, ou à $y = \frac{z^3 - 2}{z^2 + 1}$. On a donc x, qui eſt $= yz$, égal à $\frac{z^4 - 2z}{zz + 1}$. Et, au moyen de ces deux équations, donnant ſucceſſivement à z différentes valeurs, on aura les valeurs correſpondantes de y & de x, ſans être obligé à extraire aucune racine.

Si

CHAP. I. §. 23. PL. II.

Si l'on fait $z = -4$, on aura $y = -3\frac{11}{17}$ & $x = 15\frac{9}{17}$

$= -3$ . . .	$= -2\frac{9}{10}$ . .	$= 8\frac{7}{10}$
$= -2$ . . .	$= -2$ . . .	$= 4$
$= -1$ . . .	$= -1\frac{1}{2}$ . .	$= 1\frac{1}{2}$
$= -\frac{3}{4}$ . . .	$= -1\frac{11}{20}$ . .	$= 1\frac{13}{80}$
$= -\frac{1}{2}$ . . .	$= -1\frac{7}{10}$ . .	$= \frac{17}{20}$
$= -\frac{1}{4}$ . . .	$= -1\frac{61}{69}$ . .	$= \frac{179}{272}$
$= 0$	$= -2$ . .	$= 0$
$= \frac{1}{4}$	$= -1\frac{58}{59}$ . .	$= -\frac{127}{272}$
$= \frac{1}{2}$	$= -1\frac{1}{2}$ . .	$= -\frac{1}{4}$
$= \frac{3}{4}$	$= -1\frac{1}{130}$ . .	$= -\frac{303}{400}$
$= 1$	$= -\frac{1}{2}$ . . .	$= -\frac{1}{2}$
$= 1\frac{1}{2}$	$= +\frac{11}{16}$ . .	$= +\frac{33}{32}$
$= 2$	$= +\frac{1}{9}$ . .	$= +2\frac{2}{5}$
$= 3$	$= +2\frac{1}{2}$ . .	$= +7\frac{1}{2}$
$= 4$	$= +3\frac{11}{17}$ . .	$= +14\frac{10}{17}$
&c.	*&c.*	*&c.*

On prendra donc les ordonnées y qui ſont ici calculées, & on leur donnera les abſciſſes x déterminées par le Calcul, & on aura aſſez de points de la Courbe pour en tracer une partie qui donnera quelque idée de ſon cours. Voyez *Fig.* 15.

Autre Exemple. Si l'on propoſe l'éq : $2y^5 - 10xy^3 + 15x^3 = 0$, dont on ne pourroit avoir les racines y ou x, que par la réſolution d'une équation du cinquiéme ou du troiſiéme degré; on pourra faire $y = \frac{1}{2}xz$, ce qui transformera l'équation propoſée en celle-ci $\frac{1}{16}x^5z^5 - \frac{1}{4}x^4z^3 + 15x^3 = 0$, ou, diviſant par $\frac{1}{16}x^3$, en $x^2z^5 - 20xz^3 + 240 = 0$, qui par raport à x n'eſt que du ſecond degré, & a pour racines $x = \frac{10 \pm 2\sqrt{(25 - \frac{60}{z})}}{zz}$,

d'où l'on tire $y\,[=\frac{1}{2}xz]=\frac{5\pm\sqrt{(25-\frac{60}{z})}}{z}$. Or c'eſt ici l'équation du §. 22. Faiſant donc ſucceſſivement $\sqrt{(25-\frac{60}{z})}$ égal à 0, 1, 2, 3, &c. on aura des valeurs rationelles de z & y, par leſquelles on trouvera celles de x, en prenant $x=\frac{2y}{z}$. Voici le réſultat du Calcul.

$\sqrt{(25-\frac{60}{z})}=0$, $z=2\frac{2}{5}$, 1e.$y=2\frac{1}{12}$, 1e.$x=1\frac{106}{144}$, 2e.$y=2\frac{1}{12}$, 2e.$x=1\frac{106}{144}$

$=1$.	$=2\frac{1}{2}$.	$=2\frac{2}{5}$.	$=1\frac{23}{25}$ . .	$=1\frac{3}{5}$ . .	$=1\frac{7}{25}$
$=2$.	$=2\frac{6}{7}$.	$=2\frac{9}{10}$.	$=1\frac{143}{200}$.	$=1\frac{1}{20}$.	$=\frac{147}{200}$
$=3$.	$=3\frac{3}{4}$.	$=2\frac{2}{15}$.	$=1\frac{31}{225}$ . .	$=\frac{8}{15}$.	$=\frac{64}{225}$
$=4$.	$=6\frac{2}{3}$.	$=1\frac{7}{20}$.	$=\frac{81}{200}$ . .	$=\frac{3}{20}$.	$=\frac{9}{100}$
$=4\frac{1}{2}$.	$=14\frac{1}{17}$.	$=1\frac{3}{240}$.	$=\frac{5511}{18800}$.	$=\frac{17}{240}$.	$=\frac{289}{18800}$
$=5$.	$=infini$.	$=inf.pet.$	$=inf.petit$	$=inf.pet.$	$=inf.p.$
$=5\frac{1}{2}$.	$=-11\frac{3}{7}$.	$=-\frac{147}{160}$.	$=\frac{441}{6400}$.	$=\frac{7}{160}$.	$=-\frac{241}{6400}$
$=6$.	$=-5\frac{5}{11}$.	$=-2\frac{1}{60}$.	$=\frac{1331}{1800}$.	$=\frac{11}{60}$.	$=-\frac{121}{1800}$
$=7$.	$=-2\frac{1}{2}$.	$=-4\frac{4}{5}$.	$=3\frac{21}{25}$.	$=\frac{4}{5}$.	$=-\frac{16}{25}$
$=8$.	$=-1\frac{7}{13}$.	$=-8\frac{9}{20}$.	$=10\frac{197}{200}$.	$=1\frac{19}{20}$.	$=-2\frac{107}{200}$
$=9$.	$=-1\frac{1}{14}$.	$=-13\frac{1}{119}$.	$=24\frac{36}{225}$.	$=3\frac{11}{15}$.	$=-6\frac{218}{225}$
$=10$.	$=-\frac{4}{7}$.	$=-18\frac{1}{4}$.	$=65\frac{5}{8}$.	$=6\frac{1}{4}$.	$=-21\frac{7}{8}$
&c.	*&c.*	*&c.*	*&c.*	*&c.*	*&c.*

On pourra ainſi décrire cette Courbe par points. Mais ſi l'on aime mieux une Conſtruction géométrique, on pourra s'y prendre de cette maniére. Qu'on décrive la Courbe Mm, dont AP [z] & PM [y] ſont les coor-

Fig. 16. num. 1.

données, & dont l'équation eſt $y=\frac{5\pm\sqrt{(25-\frac{60}{z})}}{z}$, ou

$z^{3}yy-$

CHAP. I. §. 23. $z^3yy - 10zzy + 60 = 0$ [§. préc.], & qu'on méne BN, PL. II. paralelle à l'Axe des ordonnées AQ, par le point B dont la diſtance à l'Origine eſt $AB = 2$. Puis tirant, comme on voudra, par l'Origine A, une Droite qui coupe BN au point N, & la Courbe Mm aux points M, m, *m*, on abaiſſera de ces points les ordonnées MP, mp, *mp*, & prenant à part [*n°.* 2] $\beta\nu = BN$ pour une abſciſſe, on lui donnera les ordonnées $\nu\Pi$, $\nu\pi$, $\nu\varpi$ égales à MP, mp, *mp*, & on aura les points Π, π, ϖ de la Courbe dont l'équation eſt $2y^3 - 10xy^3 + 15x^3 = 0$.

Car le raport des PM [y] aux AP [z], dans la Courbe Mm, s'exprime par l'éq: $z^3yy - 10z^2y + 60 = 0$. Et le raport des AP [z] aux BN ou $\beta\nu$ [x] s'exprime par l'éq: $z = \frac{2y}{x}$, puiſque les triangles ſemblables ABN, APM donnent cette proportion, AP [z]: PM [y] = AB [2]: BN [x]. Donc en ſubſtituant $\frac{2y}{x}$ pour z dans l'éq: $z^3yy - 10z^2y + 60 = 0$, on aura l'éq: $\frac{8y^5}{x^3} - \frac{40y^3}{xx} + 60 = 0$, ou $2y^3 - 10xy^3 + 15x^3 = 0$ pour exprimer le raport des PM ou $\Pi\nu$ [y] aux BN ou $\beta\nu$ [x], dans la Courbe $\pi\beta\Pi\varpi\beta\,\&c.$

Mais ces artifices algébriques ne s'étendent pas à tous les cas poſſibles. Et on ne peut guéres ſe flatter que l'Algébre donne un jour une Solution complette & générale des équations de degrés quelconques. Il faut donc chercher d'autres routes qui nous ménent à la connoiſſance des Lignes Courbes, qui eſt le but de ce Traité.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Des transformations que ſubit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées.

24. LA POSITION de l'Origine & de la Ligne des abſciſſes & des ordonnées étant arbitraire (§. 5), on peut la changer à volonté : ce qui fait naître diverſes équations (§. 7.) qui toutes repréſentent la même Courbe. Il eſt important pour l'Analyſe de ſavoir transformer l'équation qui exprime le raport des coordonnées d'une Ligne en une autre équation qui exprime le raport d'autres coordonnées quelconques de la même Ligne. §. 24.

Pl. III. Fig. 17. Pour le faire d'une maniére générale ; ſoit MN une Ligne algébrique, dont la nature eſt exprimée par une équation quelconque, qui marque le raport des coordonnées AP [x] & PM [y]. On demande l'équation qui donne le raport d'autres coordonnées, telles que BQ [z] & QM [u]. On ſuppoſe donc que les Origines A & B ſont données de poſition, auſſi bien que les Axes AP, AH; BQ, BI. Par les points B & Q, extrémités de l'abſciſſe BQ, ſoient menées les Droites BC, QE paralléles à AH, & terminées à AP, & les Droites BD, QF paralléles à AP, & terminées à PM. Nommons AC, m & BC, n. De plus, comme tous les angles des triangles BQG, & MQF ſont donnés, la raiſon de leurs cotés eſt donnée. Que celle de BQ à BG ſoit exprimée par la raiſon de 1 à p. Donc BG $= pz$: car $1 : p =$ BQ [z] : BG [pz]. Que la raiſon de BQ à QG ſoit déſignée par $1 : q$, & QG ſera $= qz$. De même, ſi l'on exprime

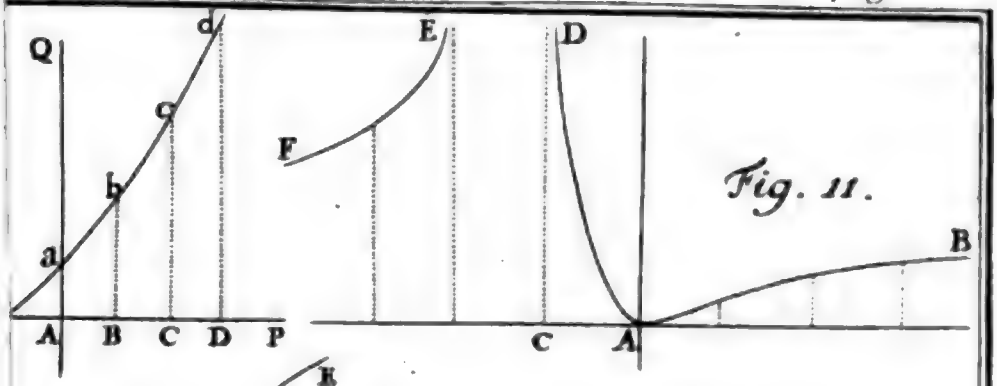
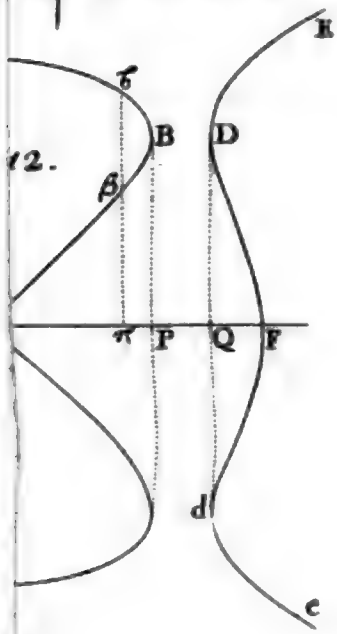
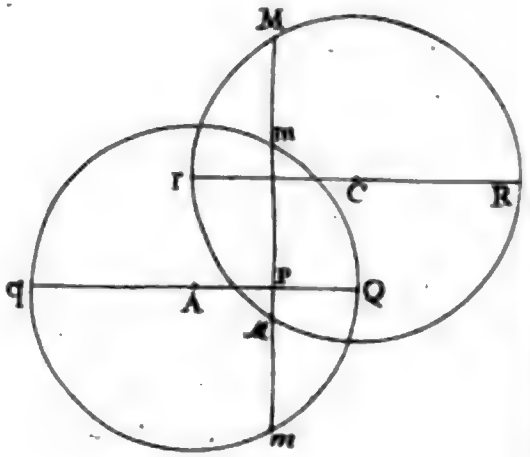


Fig. 11.



12.

Fig 13



4.

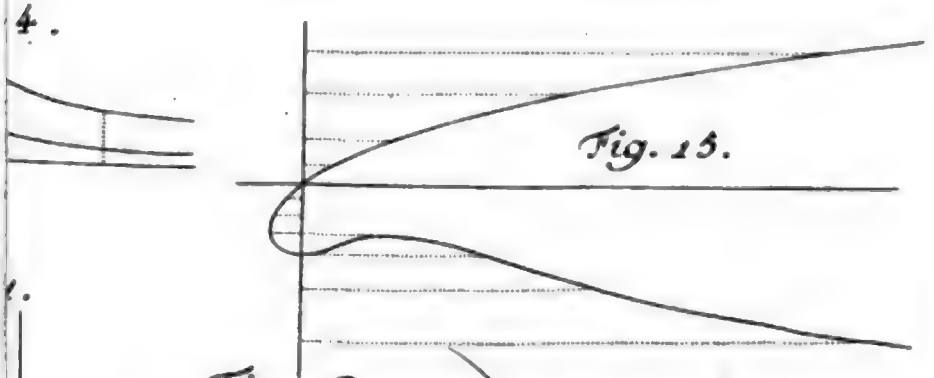
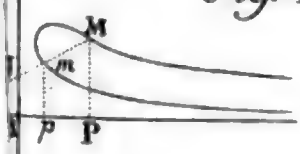
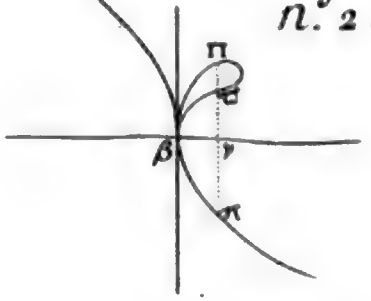


Fig. 15.

Fig. 16.



n.° 2.



Digitized by Google

CHAP. II. §. 24. exprime la raiſon de QM à QF par $1 : r$, & celle de QM à MF par $1 : s$, QF ſera $= ru$, & MF $= su$. Donc, puiſque AP $[x] =$ AC $+$ CE $+$ EP $=$ AC $[m] +$ BG $[pz] +$ QF $[ru]$, & puiſque PM $[y] =$ PD $+$ DF $+$ FM $=$ BC $[n] +$ QG $[qz] +$ MF $[su]$, on aura $x = m + pz + ru$, & $y = n + qz + su$. Où il arrive que, ſuivant la poſition des Origines A, B, & des Axes AP, AH; BQ, BI, quelques-unes des grandeurs exprimées par les Lettres m, n; p, q; r, s peuvent être négatives. Mais quoiqu'il en ſoit, ſi dans l'équation qui exprime le raport des coordonnées x & y, on ſubſtitue $m+pz+ru$ à x, & $n+qz+su$ à y, la transformée exprimera le raport des coordonnées z & u *. PL. III.

25. SOUS cette formule générale ſont compris tous les cas particuliers.

I°. Si l'on veut, par ex. conſerver l'Origine, mais changer les Axes, on ſuppoſera que le point B tombe ſur A : ce qui rend AC $[m]$ & BC $[n]$ égales à zéro. Donc $x = pz + ru$, & $y = qz + su$. Fig. 18.

II°. Si l'on veut conſerver l'Origine & la Ligne des abſciſſes, mais changer la poſition des ordonnées, en les faiſant paralléles à AI, au lieu qu'elles l'étoient à AH : non-ſeulement AC $[m]$ & BC $[n]$ ſont égales à zéro, mais encore le triangle BQG ſe réduit à la droite BQ, BG $[pz]$ devient BQ $[z]$ & QG $[qz]$ devient zéro. Donc $x = z + ru$, & $y = su$. Fig. 19.

III°. Si l'on veut changer ſeulement la poſition de la Ligne des abſciſſes, ſans toucher à la poſition des ordonnées : alors BC $[n]$ & QF $[ru]$ ſont égales à zéro, & FM $[su]$ ſe confond avec QM $[u]$. Donc $x = m + pz$, & $y = qz + u$. Ou, ſi la nouvelle Ligne des abſciſſes Fig. 20.

BQ

* *Uſage de l'Analyſe, &c.* pag. 338. & ſuiv.

Pl. III. BQ passe par l'Origine primitive A, $x = pz$ & $y = qz +$ Chap. II. §. 25.
u, parce qu'alors AC [m] est aussi nulle.

IV°. Si, sans changer la position des coordonnées,
Fig. 21. on veut simplement transporter l'Origine de A en B; les triangles BGQ, MFQ disparoissent; BG [pz] devient BQ [z], & MF [su] devient MQ [u], mais CG [ru] & FQ [qz] sont égales à zéro. Donc $x = m \pm z$ & $y = n \pm u$.

V°. Si l'Origine est transportée sur un autre point de la Ligne des abscisses; comme les ordonnées ne changent pas, il suffit de faire $x = m \pm z$. Et si l'on transporte l'Origine sur un autre point de la Ligne des ordonnées, comme cela ne change rien aux abscisses, on fera simplement $y = n \pm u$.

VI°. Je ne dis rien de deux autres changemens moins considérables; dont l'un consiste à changer $+x$ en $-x$; ce qui est prendre les abscisses positives pour les négatives, & réciproquement; c'est-à-dire, renverser la figure de droite à gauche: ou à changer $+y$ en $-y$; ce qui est regarder comme négatives les ordonnées qu'on avoit prises pour positives, ou renverser la figure de haut en bas: Et dont l'autre consiste à changer x en y & y en x: ce qui revient à prendre les abscisses pour ordonnées & les ordonnées pour abscisses, à faire faire à la Courbe un quart de conversion.

26. Ces transformations sont d'un grand usage pour l'Analyse des Courbes. Il est donc à propos d'indiquer ici quelques voyes abrégées pour les exécuter plus commodément.

Elles sont fondées sur ce Principe, que substituer à x un binome $m+z$, dans une puissance quelconque de x, comme dans la cinquiéme, c'est écrire au lieu de x^5, la cinquiéme puissance de $m+z$, qui est $m^5 + 5m^4z +$
$10m^3z^2 +$

CHAP. II. §. 16. $10m^3z^2 + 10m^2z^3 + 5mz^4 + z^5$, dont les termes ont toutes les puiſſances ſucceſſives de z, depuis l'unité, qui eſt z^0, juſqu'à z^5. Les coëfficients m^5, $5m^4$, $10m^3$, $10m^2$, $5m$, 1, ſe calculent ainſi. On poſe d'abord m^5, c'eſt-à-dire, une puiſſance de m qui a le même expoſant que celle de x; on multiplie ce terme m^5 par ſon expoſant [5], & on le diviſe par m, ce qui donne le ſecond coëfficient $5m^4$. On multiplie ce ſecond coëfficient par [2] la moitié de ſon expoſant [4], & on le diviſe toûjours par m. Cette opération donne le troiſiéme coëfficient $10m^3$, qu'on multiplie par [1] le tiers de ſon expoſant [3], & qu'on diviſe par m, pour avoir le quatriéme coëfficient $10m^2$. Celui-ci doit être multiplié par $[\frac{1}{2}]$ le quart de ſon expoſant [2], & diviſé toûjours par m. Par ce moyen on a le cinquiéme coëfficient $5m$, qu'il faut multiplier par $[\frac{1}{1}]$ la cinquiéme partie de ſon expoſant [1], & diviſer par m, pour avoir le ſixiéme & dernier coëfficient 1. Alors l'opération eſt finie, parce que ce terme ne contient plus de m. PL. III.

On opérera de la même maniére, ſi au lieu d'une ſimple puiſſance de x, on a une de ſes fonctions rationelles entiéres $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ &c. compoſée de conſtantes & de puiſſances de x.

Ainſi

puiſque $a = = = = = a$

au lieu de bx, écrivant $b(m+z) = = bm + bz$

cx^2 . . $c(m+z)^2 = = cm^2 + 2cmz + czz$

dx^3 . . $d(m+x)^3 = = dm^3 + 3dm^2z + 3dmz^2 + dz^3$

ex^4 . . $e(m+z)^4 = = em^4 + 4em^3z + 6em^2z^2 + 4emz^3 + ez^4$

&c. &c. &c.

on aura $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ &c. $= = M^0 + M'z + M''z^2 + M'''z^3 + M^{IV}z^4$ &c. dont les coëfficients M^0, M', M'', M''', M^{IV}, &c. ſe calculent comme on vient de dire.

Pl. III. Le prémier M° eſt la fonction même $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$, &c. transformée par la ſubſtitution de m à x. M° ſe change en M', ſi on multiplie chaque terme de M° où ſe trouve quelque puiſſance de m, par l'expoſant de cette puiſſance, & qu'on diviſe le produit par m. De M' on forme M'', en multipliant chaque terme de M' par la moitié de l'expoſant de m & le diviſant par m. En multipliant chaque terme de M'' par le tiers de l'expoſant de m & diviſant toûjours par m, on aura M'''. Et on continuera de même, juſqu'à-ce qu'on vienne à une grandeur, où il ne reſte plus de m. Chap. II. §. 26.

$$a+bm+cm^2+dm^3+em^4\ \&c = M^\circ$$
$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4$$
$$b+2cm+3dm^2+4em^3\ \&c = M'$$
$$0 \quad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{2} \quad \tfrac{3}{2}$$
$$c+3dm+6em^2\ \&c = M''$$
$$0 \quad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{2}{3}$$
$$d+4em\ \&c = M'''$$
$$0 \quad \tfrac{1}{4}$$
$$e\ \&c = M^{IV}$$

On peut auſſi, & dans l'application il eſt plus commode, ne changer x en m qu'après toute l'opération. On fera donc ſur x ce qu'on vient de dire qu'il falloit faire ſur m, & après le calcul on changera dans M°, M', M'', &c. tous les x en m.

Ainſi

CHAP. II. §. 26. PL. III.

Ainſi

$$x = m$$

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 \,\&c = M^0 = \overbrace{a + bm + cm^2 + dm^3 + em^4}\,\&c$$

$$\begin{array}{llllll} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \,\&c = M' = & & b + 2cm + 3dm^2 + 4em^3 \,\&c \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & & \\ c + 3dx + 6ex^2 \,\&c = M''' = & & c + 3dm + 6em^2 \,\&c \\ 0 & \frac{1}{1} & \frac{2}{1} & & & \\ d + 4ex \,\&c = M'' = & & d + 4em \,\&c \\ 0 & \frac{1}{4} & & & & \\ e \,\&c = M^{IV} = & & e \,\&c \end{array}$$

27. PAR ces principes on peut exécuter avec facilité les transformations indiquées au §. 25. Veut-on tranſporter l'Origine ſur un point donné de l'Axe des abſciſſes ou des ordonnées; ce qui ſe fait en ſubſtituant $m + z$ à x, ou $n + u$ à y. Qu'on propoſe, dis-je, de ſubſtituer $m + z$ à x.

On écrira l'équation ſur une ligne : on en multipliera chaque terme qui contient quelque puiſſance de x par l'expoſant de cette puiſſance, & dans chacun de ces termes on changera un x en z. Le produit s'écrira ſur une ſeconde ligne, dont on multipliera chaque terme où ſe trouve quelque puiſſance de x par la moitié de ſon expoſant, & on changera de nouveau un x en z. Le produit fera la troiſiéme ligne, dont on multipliera chaque terme qui contient quelque puiſſance de x par le tiers de ſon expoſant, & on changera toûjours un x en z. Cette opération donnera la quatriéme ligne, & on continuera de même, juſqu'à-ce qu'on ſoit parvenu à une ligne où il n'y ait plus d'x. Alors, changeant tous les x en m, on réünira tous les termes de toutes ces lignes, & on aura la transformée *.

* *Uſage de l'Anal. &c.* pag. 308 & ſuiv.

Digitized by Google

Pl. III. *Exemple.* On propoſe l'équation A. Chap. II. §. 27.

A. $x^4 - 2x^2y^2 + 8ax^3 - 5axy^2 + 4ccxy - 8acyy + 9a^2c^2 = 0$

4 2 3 1 1 0 0

$+4x^3z - 4xy^2z + 24ax^2z - 5ay^2z + 4ccyz$

$\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ 0 0

$+6x^2z^2 - 2y^2z^2 + 24axz^2$

$\frac{2}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

$+4xz^3 + 8az^3$

$\frac{1}{4}$ 0

$+z^4.$

Changeant x en m, & réüniſſant tous ces termes, on trouvera que la transformée de l'éq : A eſt $m^4 + 4m^3z + 6mmzz + 4mz^3 + z^4 - 2m^2y^2 - 4my^2z - 2y^2z^2 + 8am^3 + 24am^2z + 24amz^2 + 8az^3 - 5amy^2 - 5ay^2z + 4ccmy + 4ccyz - 8acyy + 9a^2c^2 = 0$.

Que ſi l'on veut ſubſtituer $n+u$ à y, on opérera ſur les y comme on vient de faire ſur les x, en changeant de ligne en ligne un y en u.

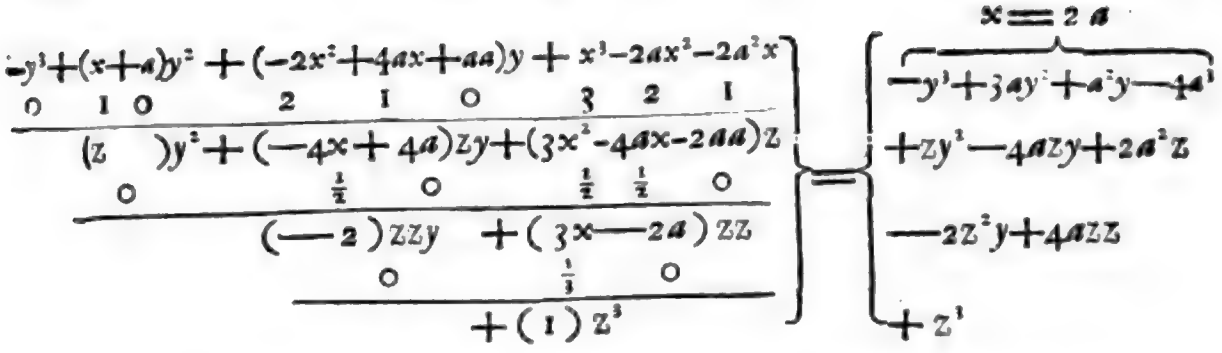
28. Dans l'application de cette Méthode, le calcul devient plus commode, quand pour ſubſtituer $m+z$ à x, on commence par ordonner l'équation ſelon les dimenſions d'y ; & quand pour ſubſtituer $n+u$ à y, on prépare l'équation en l'ordonnant par x. L'Exemple ſuivant fera voir l'avantage de cette préparation.

On propoſe de ſubſtituer d'abord $z+2a$ à x, & enſuite $u-a$ à y dans l'éq : $x^3 - 2x^2y + xy^2 - y^3 - 2ax^2 + 4axy + ay^2 + a^2y - 2a^2x = 0$.

Pour faire la prémiére ſubſtitution, on ordonnera l'équation par y.

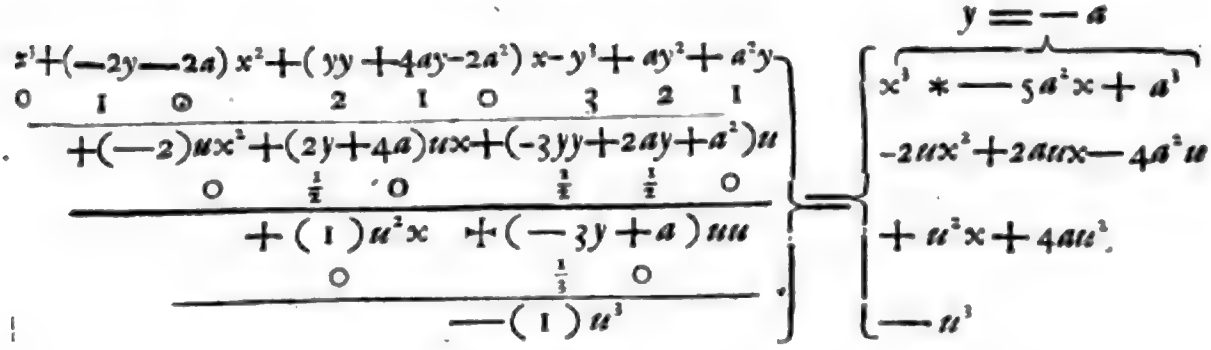
$-y^3$.

igitized by Google



La transformée eſt donc $-y^3+zy^2-2z^2y+z^3+3ay^2-4azy+4azz+a^2y+2a^2z-4a^3$.

Pour ſubſtituer $u-a$ à y on ordonnera l'équation par x.



Ainſi la transformée eſt $x^3-2ux^2+u^2x-u^3+2aux+4au^2-5a^2x-4a^2u+a^3$.

29. Si l'on veut exécuter en même tems les deux ſubſtitutions de $m+z$ à x & de $n+u$ à y, ce qui ſert à tranſporter l'Origine ſur un point quelconque qui auroit m pour abſciſſe & n pour ordonnée, [§ 25. IV], on opérera comme on vient de le dire dans le §. préced. mais ſur les x & les y en même tems.

Soit, par ex. l'éq : $a^4-4a^3y+9a^3x-a^2y^2-3a^2xy+12a^2x^2-ax^2y+6ax^3+x^4=0$, le Calcul ſe

Pl. III. fera comme on le voit ici, ce qui, après le §. préc. explique mieux la choſe qu'on ne pourroit le faire par un long diſcours. Il ſuffit de remarquer que des deux nombres placés ſous chaque terme, le prémier eſt rélatif aux dimenſions de y & le ſecond à celles de x, & que les termes liés par une accolade ⏞, doivent être réünis en un même terme qui eſt leur ſomme. Ainſi au lieu de $-\frac{1}{3}auzz$ & $-\frac{2}{3}auzz$, on ſuppoſe $-auzz$. Ch. II. §. 29.

$$\begin{array}{l}
a^3 - 4a^3y + 9a^3x - aayy - 3aayx + 12aaxx - ayxx + 6ax^3 + x^4 \\
0.0 \quad 1.0 \quad 0.1 \quad 2.0 \quad 1.1 \quad 0.2 \quad 1.2 \quad 0.3 \quad 0.4 \\
\hline
-\frac{1}{3}a^3u + 9a^3z - 2aayu - 3aaxu - 3a^2yz + 24aaxz - axxu - 2ayxz + 18ax^2z + 4x^3z \\
0 \quad 0 \quad \frac{1}{2}.0 \quad 0.\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}.0 \quad 0.\frac{1}{2} \quad 0.\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}.\frac{1}{2} \quad 0.\frac{2}{2} \quad 0.\frac{3}{2} \\
\hline
-aauu - \frac{1}{3}a^2uz - \frac{1}{3}a^2uz + 12aazz - axuz - axuz - ayzz + 18axzz + 6xxzz \\
0 \quad 0.0 \quad 0 \quad 0.\frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}.0 \quad 0.\frac{1}{3} \quad 0.\frac{2}{3} \\
\hline
-\frac{2}{3}auzz - \frac{1}{3}auzz + 6az^3 + 4xz^3 \\
0 \quad 0 \quad 0.0 \quad 0.\frac{1}{4} \\
\hline
+ z^4
\end{array}$$

Ainſi, réüniſſant enſemble les termes qui ont les mêmes puiſſances de u & de z, & écrivant m pour x & n pour y, la transformée ſera $a^4 - 4a^3n + 9a^3m - aann - 3a^2mn + 12aamm - amnn + 6am^3 + m^4 + (-4a^3 - 2a^2n - 3a^2m - amm)u + (9a^3 - 3a^2n + 24aam - 2amn + 18amm + 4m^3)z - aauu + (3a^2 - 2am)uz + (12aa - an + 18am + 6mm)zz - auzz + (6a + 4m)z^3 + z^4 = 0$.

Cette reünion s'exécutera commodément, ſi dès la ſeconde ligne on ſépare les termes qui ſont multipliés par u de ceux qui ſont multipliés par z. Pour cela, on multipliera dans la prémiére ligne chaque terme qui contient quelque puiſſance d'y par l'expoſant de cette puiſſance, & on

CHAP. II. §. 29. on le diviſera par y. La ſomme de ces termes eſt le coëfficient de u. Puis, on multipliera chaque terme de la prémiére ligne qui contient quelque puiſſance de x par l'expoſant de cette puiſſance & on le diviſera par x. La ſomme de tous ces termes eſt le coëfficient d'u. C'eſt ainſi qu'on aura calculé la ſeconde ligne. PL. III.

On viendra enſuite à la troiſiéme qui eſt compoſée des termes uu, uz & zz. Le coëfficient d'u ſervira à former celui d'uu & la prémiére moitié de celui d'uz, ſçav. 1°. le coëfficient d'uu, en multipliant chaque terme du coëfficient d'u, où ſe trouve quelque puiſſance d'y, par la moitié de ſon expoſant, & le diviſant par y: 2°. la prémiére moitié du coëfficient d'uz, en multipliant chaque terme du même coëfficient d'u, où ſe trouve quelque puiſſance d'x, par la moitié de ſon expoſant & le diviſant par x.

Le coëfficient de z ſervira à former 1°. l'autre moitié du coëfficient de uz, en multipliant ceux de ſes termes qui contiennent quelque puiſſance d'y par la moitié de leurs expoſants, & les diviſant par y: 2°. le coëfficient de zz, en multipliant par la moitié de l'expoſant d'x, & diviſant par x, tous les termes du coëfficient de z, où ſe trouve quelque puiſſance de x.

La quatriéme ligne a quatre termes u^3, u^2z, uz^2, z^3, qui ſe forment par les coëfficients de uu, uz & zz, de la même maniére que ceux-ci ont été formés par les coëfficients de u, & de z, ſi ce n'eſt qu'au lieu de multiplier chaque terme par la moitié des expoſants des puiſſances de x & de y qu'il renferme, on le multiplie par le tiers de ces expoſants. Le reſte de l'opération eſt ſemblable à celle qui a donné la troiſiéme ligne. Le coëfficient de uu forme celui de u^3, & la prémiére moitié de celui de uuz: Le coëfficient de uz forme la ſeconde moitié de celui de uuz, & la prémiére moitié de celui de uzz: Et le coëfficient de zz forme la ſeconde moitié du coëfficient de uzz, & tout

Pl. III. & tout celui de z^1. C'eſt dans ces coëfficients formés par moitié qu'on peut trouver des termes ſéparés qu'il faut réünir. Chap. II. §. 29.

On formera de la même maniére la cinquiéme ligne, par le moyen de la quatriéme, en multipliant par le quart des expoſants d'y & d'x, &c. Et on continuera de même, juſqu'à-ce qu'on ſoit parvenu à une ligne, où il ne reſte plus ni x ni y. Toutes ces lignes enſemble, en y ſubſtituant m à x & n à y, font la transformée complette.

Exemple, ſur la même équation que ci-deſſus.

$$a^4 - 4a^3y + 9a^3x - aayy - 3aaxy + 12aaxx - axxy + 6ax^3 + x^4$$
0.0 1.0 0.1 2.0 1.1 0.2 1.2 0.3 0.4

$$+(-4a^3 - 2aay - 3aax - axx)u \quad +(9a^3 - 3aay + 24aax - 2axy + 18ax^2 + 4x^3)z$$
0.0 $\frac{1}{2}$.0 0.$\frac{1}{2}$ 0.$\frac{1}{2}$ 0.0 $\frac{1}{2}$.0 0.$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$.$\frac{1}{2}$ 0.$\frac{1}{2}$ 0.$\frac{1}{2}$

$$+(-aa)uu + \left(\begin{matrix} -\frac{1}{2}aa - ax \\ -\frac{3}{2}aa - ax \end{matrix}\right)uz + (12aa - ay + 18ax + 6xx)zz$$
0.0 0.0 0.$\frac{1}{3}$ 0.0 $\frac{1}{3}$.0 0.$\frac{1}{3}$ 0.$\frac{1}{3}$

$$+(0)u^3 + (0)uuz + \left(\begin{matrix} -\frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{3}a \end{matrix}\right)uzz + (6a + 4x)z^3$$
0.0 0.0 0.$\frac{1}{4}$

$$+(1)z^4$$

Autre Exemple. On veut ſubſtituer $z + \frac{1}{2}a$ à x & $u + a$ à y dans l'éq : $y^4 + x^4 - 2ax^3 - 2aaxy + 3aaxx = 0$

$y^4 +$

$x = \frac{1}{2}a \qquad y = a$

$$\left.\begin{array}{l} y^4 + x^4 - 2ax^3 - 2a^2xy + 3a^2x^2 \\ \quad 4.0 \quad 0.4 \quad 0.3 \quad 1.1 \quad 0.2 \\ +(4y^3 - 2a^2x)u + (4x^3 - 6ax^2 - 2a^2y + 6a^2x)z \\ \quad \frac{3}{4}.0 \quad 0.\frac{3}{2} \quad 0.\frac{3}{2} \quad 0.\frac{2}{2} \quad \frac{1}{2}.0 \quad 0.\frac{1}{2} \\ +(6yy)uu + \left(\begin{smallmatrix} -a^2 \\ -a^2 \end{smallmatrix}\right)uz + (6xx - 5ax + 3aa)zz \\ \quad \frac{2}{1}.0 \quad 0.0 \quad 0.\frac{2}{1} \quad 0.\frac{1}{1} \quad 0.0 \\ +(4y)u^3 + (0)uuz + (0)uzz + (4x - 2a)z^3 \\ \quad \frac{1}{4}.0 \quad 0.\frac{1}{4}.0.0 \\ +(1)u^4 + (0)u^3z + (0)u^2z^2 + (0)uz^3 + (1)z^4 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} a^4 + \frac{1}{16}a^4 - \frac{1}{4}a^4 - a^4 + \frac{1}{4}a^4 \\ +(4a^3 - a^3)u + (\frac{1}{2}a^3 - \frac{3}{2}a^3 - 2a^3 + 3a^3)z \\ +(6aa)uu - (2aa)uz + (\frac{3}{4}aa - 3aa + 3aa)zz \\ +(4a)u^3 \; . \; . \; . \; . + (2a - 2a)z^3 \\ +u^4 \; . \; . \; . \; . \; . + z^4 \end{array}\right.$$

La transformée eſt donc $\frac{9}{16}a^4 + 3a^3u + 6aauu - 2aauz + \frac{1}{4}aazz + 4au^3 + u^4 + z^4 = 0$.

30. S'AGIT-IL de changer la poſition d'un des deux Axes ſans changer l'Origine; de ſubſtituer [§. 24. II & III] pz à x, & $qz + u$ à y, ou $ru + z$ à x, & su à y; on le pourra faire d'une maniére analogue à celle qui a été pratiquée dans le §. 28, pour ſubſtituer $m + z$ à x, ou $n + u$ à y.

Car ſi, dans un terme quelconque, comme $ax^h y^l$, on écrit pz pour x & $qz + u$ pour y, ce terme ſera changé en $ap^h z^h (qz+u)^l = ap^h z^h (q^l z^l + lq^{l-1} z^{l-1} u + \frac{l.l-1}{1.2} q^{l-2} z^{l-2} u^2 + \frac{l.l-1.l-2}{1.2.3} q^{l-3} z^{l-3} u^3$ &c.$) = ap^h q^l z^{h+l} + lap^h q^{l-1} z^{h+l-1} u + \frac{l.l-1}{1.2} ap^h q^{l-2} z^{h+l-2} u^2 + \frac{l.l-1.l-2}{1.2.3} ap^h q^{l-3} z^{h+l-3} u^3$ &c. Or la ſuite de ces termes ſe calcule par une Régle ſemblable à celle du §. 26, & qui ſe peut énoncer ainſi.

Pl. III. On écrit en prémiére ligne l'équation propoſée, après avoir changé x en pz & y en qz, c'eſt-à-dire, après avoir écrit p pour x & q pour y, & après avoir multiplié chaque terme par une puiſſance de z dont l'expoſant ſoit égal à la ſomme des expoſants de x & de y dans ce terme. On forme la ſeconde ligne, en multipliant chaque terme qui renferme quelque puiſſance de q par l'expoſant de cette puiſſance, en le diviſant par q, & changeant un z en un u. La troiſiéme ligne ſe formera, en multipliant chaque terme de la ſeconde, qui contient quelque puiſſance de q, par la moitié de l'expoſant de cette puiſſance, diviſant par q, & changeant un z en un u, &c. &c. Chap. II. §. 30.

Ainſi, dans ax^by^l, écrivant pz pour x, & qz pour y, on aura $ap^bq^lz^{b+l}$, prémier terme ou prémiére ligne. Ce terme multiplié par l expoſant de q, diviſé par q, & par le changement d'un z en u, devient $lap^bq^{l-1}z^{b+l-1}u$, ſecond terme ou ſeconde ligne : qu'on multipliera par $\frac{l-1}{2}$, moitié de l'expoſant de q, qu'on diviſera par q, & où on changera un z en u, pour avoir le troiſiéme terme ou la troiſiéme ligne $\frac{l.l-1}{1.2}ap^bq^{l-2}z^{b+l-2}u^2$, & on continuera de même juſqu'à-ce qu'on vienne à des termes qui ne renferment plus la lettre q.

Exemple. On propoſe de ſubſtituer pz à x, & $qz+u$ à y dans l'éq : $a^3+b^2x+aby+3ax^2+4axy+8byy=0$. Cette équation, en changeant x en pz & y en qz, eſt

a^3+

CHAP. II. §. 30.

$$a^3 + b^2pz + abqz + 3ap^2z^2 + 4apqz^2 + 8bq^2z^2$$
$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$$
$$+abu \qquad +4apuz + 16bquz$$
$$0 \qquad 0 \quad \tfrac{1}{2}$$
$$+8buu$$

PL. III.

La transformée eſt donc $a^3 + (b^2p + abq)z + abu + (3app + 4apq + 8bqq)zz + (4ap + 16bq)uz + 8buu = 0$.

De même s'il faut ſubſtituer su à y, & $ru + z$ à x, on poſera en prémiére ligne l'équation propoſée, après avoir changé x en ru & y en su, & on opérera ſur r comme on vient d'opérer ſur q, en changeant de ligne en ligne un u en un z, &c.

Voici le procedé du Calcul ſur le même *Exemple*.

$$a^3 + (b^2r + abs)u + (3arr + 4ars + 8bss)uu$$
$$0 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$
$$+b^2z \qquad +(6ar + 4as)uz$$
$$0 \qquad \tfrac{1}{2} \quad 0$$
$$+3azz$$

Ainſi la transformée eſt $a^3 + (b^2r + abs)u + (3arr + 4ars + 8bss)uu + b^2z + (6ar + 4as)uz + 3azz = 0$.

On pourroit de même ſubſtituer tout à la fois $pz + ru$ à x, & $qz + su$ à y, ce qui change la poſition des deux Axes ſans changer l'Origine. Mais cette transformation a un peu plus d'embarras & un peu moins d'utilité que les précédentes. Nous la laiſſerons donc pour venir à quelque choſe de plus eſſentiel.

CHAPITRE III.

Des différents Ordres des Lignes algébriques.

Pl. III. 31. LES LIGNES ALGEBRIQUES conſidérées ana- §. 31.
lytiquement ſe diviſent en différents *Ordres*, ſelon les dégrés de leurs équations. Ces dégrés s'eſtiment, comme dans les Egalités déterminées, par le dégré du plus haut terme de l'équation. Mais, puiſque dans les équations des Lignes algébriques il y a deux indéterminées x & y, le dégré de chaque terme s'eſtime par la ſomme des expoſants des puiſſances de x & de y. Les termes qui n'ont que des conſtantes, dans leſquels il n'y a ni x ni y, ſont du dégré zéro. Ceux qui n'ont qu'un x ſans y, ou qu'un y ſans x, mais où cette indéterminée peut être multipliée par un coëfficient ou une grandeur conſtante quelconque, comme by ou cx, ſont des termes du prémier dégré. Les termes du ſecond dégré ſont ceux où ſe trouvent xx, xy, ou yy. Mais x^3, xxy, xyy & y^3 ſont les termes du troiſiéme dégré ; x^4, x^3y, x^2y^2, xy^3, & y^4 ceux du quatriéme, & ainſi de ſuite.

32. ON peut donc former, pour chaque Ordre de Lignes, une *Equation générale*, qui repréſente toutes les Lignes poſſibles de cet Ordre-là : leſquelles enſuite ſe diviſent & ſubdiviſent en Genres & Eſpéces, ſelon la variété des coëfficients qui multiplient les termes de ces Equations.

L'éq : $a + by + cx = 0$, exprime la nature des *Lignes du prémier Ordre*, parce qu'elle n'a aucun terme qui paſſe le prémier dégré.

L'éq :

Ch. III. §. 32. L'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ repréſente une *Ligne* quelconque *du ſecond Ordre*, parce qu'il ne s'y trouve que des termes du ſecond dégré ou des dégrés inférieurs. Pl. III.

L'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxyy + ix^2y + lx^3 = 0$, exprime en général une *Ligne du troiſiéme Ordre*, parce que ſes termes les plus élevés ne ſont que du troiſiéme Ordre, *&c.* *

33. Dans cette maniére d'eſtimer l'Ordre d'une Ligne algébrique, on ſuppoſe que ſon équation eſt irréductible : parce qu'une équation réductible eſt moins l'équation d'une Ligne d'un certain Ordre, que celle de deux ou pluſieurs Lignes de quelques Ordres inférieurs [§. 20, 21]. Cela eſt pourtant indifférent en ſoi-même, & rien n'empêche qu'on ne regarde, ſi l'on veut, le ſyſtéme de deux Lignes du premier Ordre, comme une Ligne du ſecond Ordre ; & le ſyſtéme de trois Lignes du prémier Ordre, ou celui de deux Lignes, l'une du prémier, & l'autre du ſecond Ordre, comme une Ligne du troiſiéme Ordre, &c.

34. Ce qu'il y a de plus important à remarquer ſur cette diſtribution des Lignes algébriques par Ordres, c'eſt que chaque Ligne eſt ſi bien fixée à ſon Ordre, qu'el-

* Mr. Newton diſtingue les *Ordres des Lignes* & les *Genres des Courbes*. Comme le premier Ordre ne renferme que la Ligne droite [*Voyez ci-deſſous §. 40.*], il appelle Courbes du prémier Genre, les Lignes du ſecond Ordre, Courbes du ſecond Genre, les Lignes du troiſiéme Ordre, & ainſi de ſuite. Quelque répugnance qu'on ait à s'écarter des dénominations établies par ce Grand Homme, il m'a paru que cette diſtinction génoit trop l'expreſſion, & je me ſuis déterminé à dire indifferemment, Courbes ou Lignes du ſecond Ordre, Courbes ou Lignes du troiſiéme Ordre, &c.

Digitized by Google

Pt. III. le n'en ſort point, par quelque équation qu'on la repré- Ch. III.
ſente. Je veux dire, qu'encore qu'on puiſſe exprimer la §. 34.
nature d'une Ligne algébrique par une infinité d'équations différentes, ſelon le choix qu'on fait de l'Origine, & la poſition qu'on donne aux Axes ; cependant toutes ces équations ſont d'un même Ordre, auquel par conſéquent la Ligne propoſée doit ſe raporter.

En effet, ſi l'équation de cette Ligne qui exprime le raport entre les coordonnées x & y eſt d'un certain Ordre ; l'équation, qui exprimera le raport entre d'autres coordonnées z & u de la même Ligne, eſt néceſſairement du même Ordre. Car quelque variée que ſoit la poſition des z & des u par raport aux x & aux y, on aura toujours [§. 24] $x = m + pz + ru$, & $y = n + qz + su$, & en ſubſtituant ces valeurs de x & de y dans l'équation qui exprime leur raport, on aura la transformée qui donne le raport des coordonnées z & u. Mais puiſque, dans les équations $x = m + pz + ru$, $y = n + qz + su$, z & u ne montent qu'au prémier dégré, non plus que x & y, il s'enſuit qu'après la ſubſtitution, z & u ne monteront dans l'éq: transformée qu'au même dégré où montent x & y dans la propoſée. Donc l'éq: des z & u ſera du même Ordre que celle des x & y. Ainſi l'Ordre d'une Ligne algébrique ne change point par le changement de ſes coordonnées. *

35. Mr. Newton arrange les termes de l'équation d'une Ligne algébrique dans un Parallelogramme diviſé en pluſieurs *Caſes*, ou petits quarrés. Il place dans chaque ligne horizontale les termes où la variable y a le même expoſant, & ces expoſants augmentent d'une unité en montant de ligne en ligne : Il place dans chaque colomne verticale

* *Uſage de l'Analyſe, &c.* pag. 340. & ſuiv.

CH. III. §. 35. verticale les termes où l'indéterminée x a le même exposant, & ces expoſants croiſſent d'une unité en paſſant d'une colomne à l'autre de gauche à droite. Ainſi chaque terme a ſa Caſe déterminée par les expoſants d'x & d'y dans ce terme. PL. III.

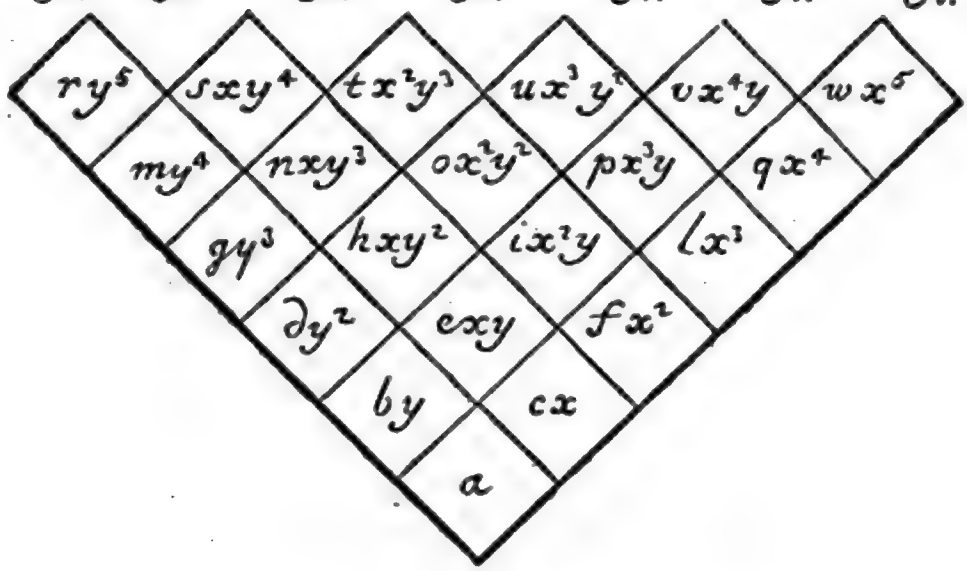
&c.	&c.	&c.	&c.	&c.	&c.
ly^4	rxy^4	αx^2y^4	δx^3y^4	ζx^4y^4	&c.
gy^3	mxy^3	sx^2y^3	βx^3y^3	ϵx^4y^3	&c.
dy^2	hxy^2	nx^2y^2	tx^3y^2	γx^4y^2	&c.
by	exy	ix^2y	px^3y	vx^4y	&c.
a	cx	fx^2	kx^3	qx^4	&c.

Mais comme dans cette diſpoſition les termes d'un même dégré ſe trouvent placés en diagonale, Mr. DE GUA, en tournant le Parallélogramme, lui a donné une ſituation plus commode *. Il ſe préſente alors comme un triangle, dont la pointe regarde en embas, & où les termes de l'équation générale ſont placés comme on le voit dans cette Figure, qui explique la choſe ſuffiſamment.

* *Uſage de l'Analyſe*, &c. pag. 24. &c.

&c.

Pl. III. &c. &c. &c. &c. &c. &c. &c. Ch. III. §. 36.



36. Dans ce Triangle, que l'Auteur apelle *Triangle algébrique* ou *analytique*, chaque Case prend son nom des x & des y qu'elle contient. La Case inférieure seule, qui n'a ni x ni y, se nommera la *Case de la pointe*, ou, pour abréger, *la Pointe du Triangle*. Des deux Cases qui la touchent, l'une s'apelle la *Case* y, l'autre la *Case* x. Les trois voisines se nomment la *Case* yy, la *Case* xy, & la *Case* xx. On comprend assez par-là quel est le nom de chaque Case.

Dans cette disposition on voit 1°. que tous les termes d'un même dégré sont dans le même *Rang* horizontal; les plus hauts dégrés dans les Rangs supérieurs, les plus bas dans les Rangs inférieurs. Chaque équation générale a autant de rangs que l'exposant de son Ordre a d'unités, sans compter la Case de la pointe, où l'on place le terme constant.

2°. Que si l'on veut ordonner l'équation par x, c'est-à-dire, suivant les dimensions de la variable x, on n'a qu'à considérer comme les termes de cette équation, les

Bandes

Digitized by Google

CH. III. §. 36. *Bandes* qui montent de droite à gauche. Dans le Triangle ci-deſſus, le premier terme ſera la plus haute bande, qui conſiſte dans le ſeul terme wx^5, & cette bande, ſoit qu'elle n'ait que ce terme, ſoit que, le Triangle étant prolongé, elle en ait pluſieurs, ſe nommera la *Bande* x^5. Le ſecond terme ſera la bande contiguë, qui a les deux Caſes qx^4 & vx^4y, ou $(q+vy)x^4$: elle s'apelle la *Bande* x^4. On prendra pour troiſiéme terme la bande ſuivante lx^3, px^3y, ux^3y^2, ou $(l+py+uy^2)x^3$: c'eſt la *Bande* x^3 ; pour quatriéme terme la bande fxx, ix^2y, ox^2y^2, tx^2y^3, ou $(f+iy+oy^2+ty^3)x^2$, qui eſt la *Bande* x^2 : pour cinquiéme terme la bande cx, exy, hxy^2, nxy^3, sxy^4, ou $(c+ey+hy^2+ny^3+sy^4)x$, qui s'apelle la *Bande* x : & pour ſixiéme & dernier terme $a+by+dyy+gy^3+my^4+ry^5$, que nous nommerons la *Bande ſans* x, ou la *Bande des puiſſances d'y.* PL. III.

De même, ſi on veut ordonner l'équation par y, on prendra pour ſes termes conſécutifs les Bandes qui montent de gauche à droite, ſç., 1°. la *Bande* y^5, qui n'a ici que le terme ry^5. 2°. la *Bande* y^4 qui a les deux termes my^4, sxy^4, ou $(m+sx)y^4$. 3°. la *Bande* y^3 compoſée de trois termes gy^3, nxy^3, tx^2y^3, ou $(g+nx+tx^2)y^3$. 4°. la *Bande* y^2 qui contient quatre termes dy^2, hxy^2, ox^2y^2, ux^3y^2, ou $(d+hx+ox^2+ux^3)y^2$. 5°. la *Bande* y, qui eſt $by+exy+ix^2y+px^3y+vx^4y$, ou $(b+ex+ix^2+px^3+vx^4)y$. 6°. enfin la bande $a+cx+fxx+lx^3+qx^4+wx^5$, qui ſe nomme *la Bande ſans* y, ou *la Bande des puiſſances d'x.*

37. ON VOIT par cet arrangement que l'équation générale des Lignes du premier Ordre a $[1+2=]3$ termes ; que celle du ſecond Ordre a $[1+2+3=]6$ termes ; celle du troiſiéme $[1+2+3+4]=10$ termes, & ainſi de ſuite, ſelon la ſuite des nombres triangulaires.

Digitized by Google

Pl. III. Le nombre des coëfficiens a, b, c, d, e, &c. de chaque équation générale [§. 32] eſt le même que le nombre de ſes termes. Mais ce nombre des coëfficients peut être diminué d'une unité, parce que le ſecond membre de ces équations étant zéro, on peut diviſer tout le premier membre par un coëfficient quelconque, comme celui de la plus haute puiſſance d'y ou d'x, laquelle, après cette diviſion, n'a pour coëfficient que l'unité. Ch. III. § 37.

Ainſi, diviſant par c l'équation générale du premier Ordre $a+by+cx=0$, elle ſe réduit à $\frac{a}{c}+\frac{b}{c}y+x=0$, dans laquelle, avec l'unité qui multiplie x, il n'y a que deux coëfficients $\frac{a}{c}$ & $\frac{b}{c}$.

Si donc v eſt l'expoſant d'un Ordre quelconque, le nombre des coëfficients de l'équation générale de cet Ordre ſera $\frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}v$, ſomme de la progreſſion arithmétique $2+3+4+5+$ &c, dont la différence eſt 1, le premier terme 2, & le nombre des termes v *.

38. Il suit de là, qu'on peut réguliérement faire paſſer une Ligne de l'Ordre v, par le nombre $\frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}v$ de points donnés, ou qu'une Ligne de l'Ordre v eſt déterminée & ſon équation donnée, quand on a fixé $\frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}v$ points par leſquels elle doit paſſer.

Ainſi une Ligne du premier Ordre eſt déterminée par deux points donnés; une du ſecond par 5; une du troiſiéme par 9; une du quatriéme par 14; une du cinquiéme par 20, &c:

La

* Stirling, *Lineæ tertii Ordinis*, &c. pag. 3 & ſuiv.

Ch. III. §. 38. La Démonſtration n'a beſoin que d'un *Exemple*. *. Pl. III. Fig. 22. Soient A, B, C, D, E cinq points donnés par leſquels il faut faire paſſer une Ligne du ſecond Ordre. On ménera à volonté deux droites FG, FH, par un point F, qu'on prendra pour l'Origine, & ces droites pour les Axes; après quoi menant par les points donnés les ordonnées Aa, Bb, Cc, Dd, Ee; elles ſeront données, auſſi bien que les abſciſſes Fa, Fb, Fc, Fd, Fe. Qu'on nomme donc Aa, α; Bb, b; Cc, c; Dd, d; Ee, ϵ; & Fa, α; Fb, β; Fc, γ; Fd, δ; Fe, ε; & qu'on prenne l'éq: $A+By+Cx+Dyy+Exy+xx=0$ pour celle de la Ligne du ſecond Ordre, qui doit paſſer par les points donnés A, B, C, D, E. Il s'agit de déterminer les cinq coëfficients inconnus A, B, C, D, E. Or pour cela nous avons cinq équations. Car, puiſque la Courbe paſſe par le point A, il faut qu'à l'abſciſſe Fa [α] réponde l'ordonnée aA [α]. Donc x étant α, y eſt α. Mettant donc dans l'éq: $A+By+Cx+Dyy+Exy+xx=0$, α pour x & α pour y, la condition de paſſer par A la réduit à

. . . . . $A+B\alpha+C\alpha+D\alpha\alpha+E\alpha\alpha+\alpha\alpha=0$

La condition de paſſer par B, donne de même $A+Bb+C\beta+Dbb+Eb\beta+\beta\beta=0$

Celle de paſſer par C, donne . . . . $A+Bc+C\gamma+Dcc+Ec\gamma+\gamma\gamma=0$

Celle de paſſer par D, donne . . . $A+Bd+C\delta+Ddd+Ed\delta+\delta\delta=0$

Et celle de paſſer par E, donne enfin . . $A+B\varepsilon+C\varepsilon+Dee+Ee\varepsilon+\varepsilon\varepsilon=0$

On peut par le moyen de ces cinq équations trouver les valeurs des cinq coëfficients A, B, C, D, E, ce qui détermine l'éq: $A+By+Cx+Dyy+Exy+xx=0$ de la Courbe cherchée.

Le Calcul véritablement en ſeroit aſſez long †: mais il n'eſt

* *Lineæ tertii Ordinis, &c.* pag. 69.
Newton, *Arithmetica univerſalis*. Probl. LXI. pag. mihi 233.

† C'eſt à l'*Algébre* à donner les moyens d'abréger ce Calcul. Je

PL. III. n'eſt pas beſoin de le faire, pour ſe convaincre qu'il eſt toûjours poſſible de faire paſſer une Ligne du ſecond Ordre par les 5 points donnés A, B, C, D, E, & en général une Ligne de l'Ordre v par le nombre $\frac{1}{2}vv+\frac{3}{2}v$ de points donnés. Il ſuffit de voir que chaque point fournit une équation, & qu'on peut déterminer autant de coëfficients qu'on a d'équations. Donc $\frac{1}{2}vv+\frac{3}{2}v$ points déterminent $\frac{1}{2}vv+\frac{3}{2}v$ coëfficients, c'eſt-à-dire, autant qu'il y en a dans l'équation générale des Lignes de l'Ordre v [§. prec.]. CH. III. §. 38.

Comme dans ces Equations, les inconnuës A, B, C, D, E ne montent qu'au premier dégré, le Probléme ſera toûjours poſſible, & les Racines imaginaires n'y peuvent apporter aucune exception ou limitation; parce que ces coëfficients ſe déterminent ſans qu'il ſoit beſoin d'aucune extraction de racines, qui eſt la ſeule opération qui puiſſe introduire des imaginaires dans un Calcul. Mais il peut arriver, ou que quelques-uns de ces coëfficients ſoient zéro; & alors l'équation de la Courbe eſt réduite à un moindre nombre de termes; ou que quelques-uns ſe trouvent infinis; & alors les termes qui ſont affectés de ces coëfficients font ſeuls toute l'équation, les autres s'évanoüiſſant en comparaiſon de ceux-là: ou que quelques-uns reſtent indéterminés; & alors on peut faire paſſer par les points donnés une infinité de Lignes du même ordre.

Si l'on avoit beſoin de chercher actuellement l'équation de la Courbe qui paſſe par un nombre de points donnés, on abrégeroit le Calcul en prenant un des points donnés, comme

Je crois avoir trouvé pour cela une Régle aſſez commode & générale, lorſqu'on a un nombre quelconque d'équations & d'inconnuës dont aucune ne paſſe le prémier degré. On la trouvera dans l'*Appendice*, N°. 1.

Digitized by Google

CH. III. §. 38. comme A, pour l'Origine. Car, à ce point, l'abſciſſe & l'ordonnée étant zéro, on aura α & α tous deux zéro. Ainſi la premiére des cinq équations ci-deſſus, eſt reduite à $A = 0$, & les quatre autres à $B\beta + C\beta + Db\beta + E\beta\beta + \beta\beta = 0$, $Bc + C\gamma + Dc\gamma + E\gamma\gamma + \gamma\gamma = 0$, $Bd + C\delta + Dd\delta + Ed\delta + \delta\delta = 0$, $Be + C\epsilon + De\epsilon + E\epsilon\epsilon + \epsilon\epsilon = 0$, deſquelles on tirera, PL. III. Fig. 23.

$$B = -\frac{\beta\gamma de(\beta-\gamma)(\beta e-\gamma\epsilon) - \beta cde(\beta-\delta)(\gamma e-\epsilon) + \beta cd\epsilon(\beta-\epsilon)(\gamma d-c\delta) - b\gamma de(\gamma-\delta)(\beta e-\epsilon) + b\gamma d\epsilon(\gamma-\epsilon)(\beta d-b\delta) - cde\delta(\beta-\delta)(\beta c-b\gamma)}{(\beta c-b\gamma)(\beta e-d\epsilon)(bc-de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\epsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\epsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}$$

$$C = -\frac{(\beta\beta c-b\gamma\gamma)(\beta e-d\epsilon)de - (\beta\beta d-b\delta\delta)(\gamma e-c\epsilon)ce + \beta\beta e-b\epsilon\epsilon)(\gamma d-c\delta)cd + \gamma\gamma d-c\delta\delta)(\beta e-b\epsilon)be - (\gamma\gamma e-c\epsilon\epsilon)(\beta d-b\delta)bd + \delta\delta e-c\epsilon\epsilon)(\beta c-b\gamma)bc}{(\beta c-b\gamma)(\beta e-d\epsilon)(bc+de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\epsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\epsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}$$

$$D = \frac{(bc-b\gamma)(\beta e-d\epsilon)(\beta\gamma+\delta\epsilon) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\epsilon)(\beta\delta+\gamma\epsilon) + (\beta e-b\epsilon)(\gamma d-c\delta)(\beta\epsilon+\gamma\delta)}{(\beta c-b\gamma)(\beta e-d\epsilon)(bc+de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\epsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\epsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}$$

$$E = \frac{(\beta c-b\gamma)(\beta e-d\epsilon)(\beta e+b\gamma+\delta e+d\epsilon) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\epsilon)(\beta d+b\delta+\gamma e+c\epsilon) + (\beta e-b\epsilon)(\gamma d-c\delta)(\beta e+b\epsilon+\gamma d+c\delta)}{(\beta c-b\gamma)(\beta e-d\epsilon)(bc+de) - (\beta d-b\delta)(\gamma e-c\epsilon)(bd+ce) + (\beta e-b\epsilon)(\gamma d-c\delta)(be+cd)}.$$

Mais on abrégera encore plus ſi l'on prend pour Axe des ordonnées la droite AB & pour Axe des abſciſſes la droite AE, menées du point A à deux des points donnés B, E. Alors l'ordonnée AB [b] ayant une abſciſſe [β] zéro, & l'abſciſſe AE [ϵ] ayant ſon ordonnée [e] égale à zéro, les valeurs de B, C, D, E, ſe reduiront à Fig. 24.

$$B = -\frac{b\gamma\delta(d(\epsilon-\gamma) - (\epsilon-\delta)c)}{cd(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)}$$

$$C = -\frac{cd\epsilon(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)}{cd(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)} = -\epsilon$$

$$D = +\frac{\gamma\delta(d(\epsilon-\gamma) - (\epsilon-\delta)c)}{cd(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)} = -\frac{B}{b}$$

$$E = +\frac{c\delta(b-c)(\epsilon-\delta) - \gamma d(b-d)(\epsilon-\gamma)}{cd(\gamma(b-d) - (b-c)\delta)}$$

PL. III. de ſorte que l'équation ſera [en multipliant par le dénominateur commun], $cd(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)xx-(\gamma d(b-d)(\varepsilon-\gamma)-c\delta(b-c)(\varepsilon-\delta))xy+\gamma\delta(d(\varepsilon-\gamma)-(\varepsilon-\delta)c)yy-cd\varepsilon(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)x-b\gamma\delta(a(\varepsilon-\gamma)-(\varepsilon-\delta)c)y=0$. CH. III. §. 38.

39. DE CE QUE l'équation d'une Ligne algébrique ne change point d'Ordre, quelque poſition qu'on donne à ſes coordonnées [§. 34]; il ſuit qu'une Ligne ne peut être coupée par une Droite, qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans *l'expoſant de ſon Ordre*, c'eſt-à-dire, dans le nombre qui marque quel eſt l'Ordre de cette Ligne. Qu'une Droite ne peut couper, par ex. une Ligne du premier Ordre qu'en un point, une Ligne du ſecond Ordre qu'en deux points, une du troiſiéme qu'en trois, &c.

Car on peut toûjours prendre cette Droite pour l'Axe des abſciſſes ou pour celui des ordonnées, ſi elle ne l'eſt déja: & par cette tranſpoſition des coordonnées l'équation de la Courbe ne paſſe point dans un autre Ordre. Maintenant, pour avoir tous les points où la Courbe rencontre la Droite, que nous ſuppoſerons être l'Axe des ordonnées, il faut faire l'abſciſſe x égale à zéro [§. 15] & les racines y de l'équation qui naît de cette ſuppoſition déſignent tous les points où la Droite rencontre la Courbe. Mais ces racines ne peuvent être en plus grand nombre que les unités dans le plus haut expoſant d'y, & ce plus haut expoſant d'y ne peut ſurpaſſer l'expoſant de l'Ordre de la Courbe [§. 31. 32]. Donc la Droite ne ſauroit rencontrer la Courbe qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de cette Courbe.

Il eſt très poſſible qu'elle la rencontre moins ſouvent, ou même point du tout. Car dans l'équation que donne la ſuppoſition $x=0$, il peut fort bien ſe faire qu'y ait ſon

CH. III. §. 19. son plus haut exposant inférieur à celui de l'Ordre de la Courbe : il peut se faire que cette équation ait des racines imaginaires, & les ait même toutes ; ce qui donne des intersections imaginaires & qui n'existent pas : il peut se faire que deux ou plusieurs des racines réelles de cette équation soient égales ; & alors deux ou plusieurs points d'intersection se confondent en un seul. PL. III.

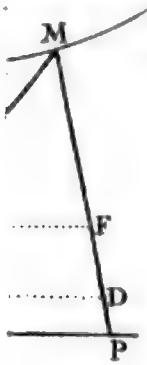
Soit, par ex. le Cercle MEF décrit du centre C avec un raïon $CM = r$, & dont l'équation, en nommant z l'abscisse CP, & u l'ordonnée PM, est $zz + uu = rr$. On demande en combien de points sa circonférence rencontre la droite AB, qui passe par les points A & B des Axes CA, CB, dont les distances à l'Origine sont $CA = a$ & $CB = b$. Soit nommée AB, c, &, à cause du triangle rectangle ACB, on aura $cc = aa + bb$. Si l'on prend AB pour l'Axe des ordonnées, en regardant AQ $[x]$ comme l'abscisse du point M, & QM $[y]$, parallèle à AB, comme son ordonnée, on aura [§. 24] $u = \frac{by}{c}$ & $z = x - a + \frac{ay}{c}$. Ces valeurs de z & de u substituées dans l'éq: $zz + uu = rr$, la transforment en $xx - 2ax + aa + \frac{2axy}{c} - \frac{2aay}{c} + \frac{aayy}{cc} + \frac{bbyy}{cc} = rr$, ou [puisque $aa + bb = cc$] en $xx - 2ax + aa + \frac{2axy}{c} - \frac{2aay}{c} + yy = rr$, qui exprime la nature du Cercle rélativement aux coordonnées AQ $[x]$ & QM $[y]$. Si l'on fait, dans cette équation, $x = 0$, elle se réduira à $aa - \frac{2aay}{c} + yy = rr$, qui marque par ses racines les intersections du Cercle MEF & de la Droite AB. Fig. 25.

Cette équation est du même dégré que l'Ordre de la Courbe. Un Cercle peut donc couper une Droite en autant de points

Pl. III. points qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon Ordre, c'eſt-à-dire, en deux points ; & cela arrive quand les racines $y = \frac{aa \pm \sqrt{(a^4 - aacc + rrcc)}}{c}$, ou $y = \frac{aa \pm \sqrt{(rrcc - aabb)}}{c}$ de l'éq : $aa - \frac{2aay}{c} + yy = rr$ ſont réelles : car ces racines déſignent les deux ordonnées primitives AE, AF par l'extrémité deſquelles paſſe la circonférence. Mais quand ces racines ſont imaginaires, les interſections le ſont auſſi. Cela arrive lorſque $rrcc < aabb$, ou $rr < \frac{aabb}{cc}$, ſoit $r < \frac{ab}{c}$, c'eſt-à-dire quand le raïon [r] CM eſt plus petit que $\frac{ab}{c}$, qui eſt la perpendiculaire CD″ abaiſſée du centre C ſur la droite A″B″ : Alors les interſections F & E diſparoiſſent ; la Droite ne coupe plus le Cercle. Que ſi ces deux racines déviennent égales ; ce qui a lieu quand $rrcc = aabb$, ou $r = \frac{ab}{c}$, quand le raïon CM eſt égal à la perpendiculaire CD′ ; alors les deux points d'interſection ſe confondent en un ſeul, le Cercle ne rencontre la Droite A′B′ qu'en un ſeul point D′. Ch. III. §. 39.

40. Puisqu'une Droite ne peut couper une Ligne algébrique du premier Ordre qu'en un ſeul point [§. prec.] la Ligne algébrique du premier Ordre ne peut être courbe ; car une Courbe peut toûjours être coupée par une Droite en plus d'un point. Donc la Ligne droite eſt la ſeule Ligne algébrique du premier Ordre.

C'eſt ce que l'on voit encore évidemment par le détail des équations de cet Ordre. Elles ne peuvent avoir que trois termes a, by, & cx. Mais elles peuvent ou les avoir



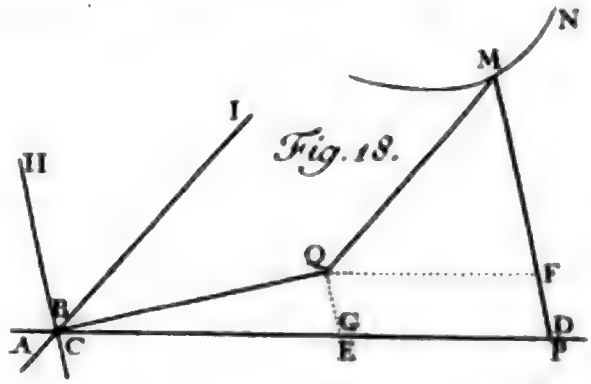


Fig. 18.

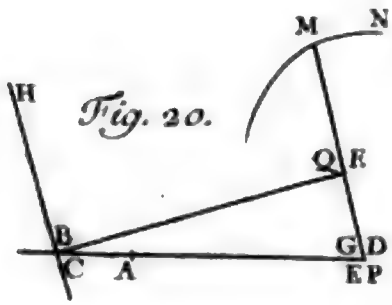


Fig. 20.

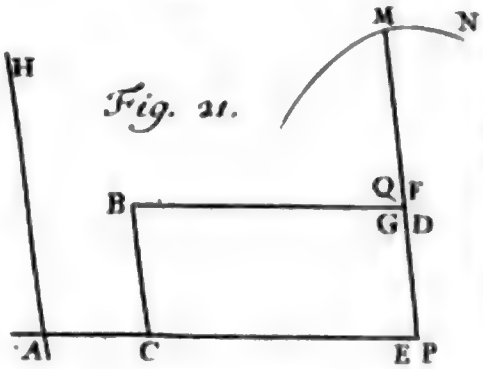
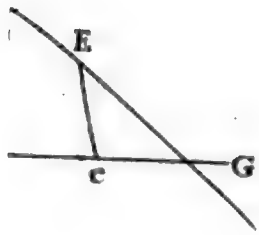


Fig. 21.



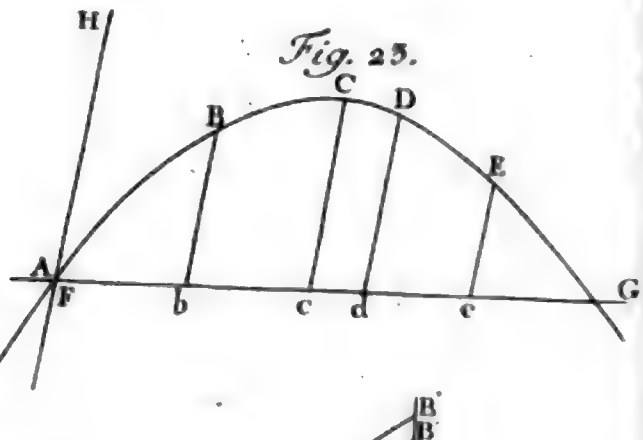
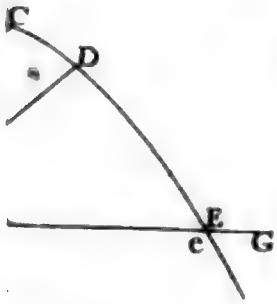


Fig. 23.

4.



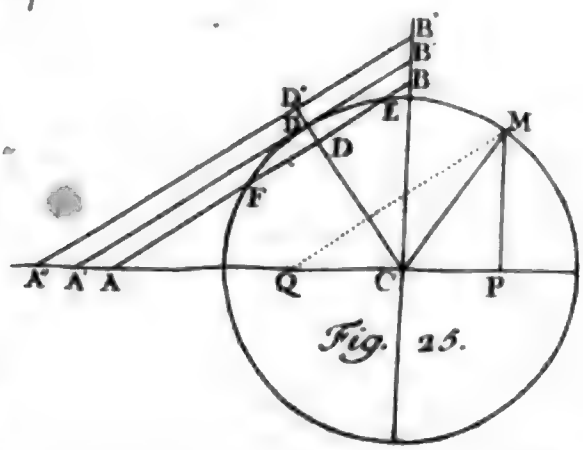


Fig. 25.

Digitized by Google

CH. III. §. 40. avoir tous trois, ou n'en avoir que deux, ou même n'en avoir qu'un : Ce qui fait trois cas différens. PL. IV.

I. Lorſque l'équation du premier Ordre eſt complette, c'eſt-à-dire, lorſqu'elle a ſes trois termes, on peut toûjours ſuppoſer que le terme conſtant a eſt ſeul & poſitif dans le premier membre. Les deux autres termes by & cx ſont le ſecond membre, où ils peuvent être poſitifs ou négatifs. Soit AB la Ligne des abſciſſes, & AD celle des ordonnées, faiſant entr'elles un angle quelconque DAB. Fig. 26.

Cas I. Si dans l'équation réduite à la forme que nous venons de dire, b & c ſont poſitives ; que l'éq : ſoit $a = by + cx$: elle repréſente une Droite. Pour avoir ſa poſition, il ſuffit d'avoir celle de deux de ſes points, de ceux, par exemple, où elle coupe les deux Axes. On aura l'un en faiſant $x = 0$, & l'autre en faiſant $y = 0$. Qu'on faſſe $x = 0$, & l'éq : $a = by + cx$ ſe réduit à $a = by$, ou $y = \frac{a}{b}$. On prendra donc ſur l'Axe des ordonnées AD, du côté poſitif, AE égale à $\frac{a}{b}$, qui eſt la troiſiéme proportionelle à la ligne b, à la ligne a, & à la ligne qu'on prend pour l'unité, & on aura le point E, où la Droite cherchée coupe l'Axe des ordonnées [§. 15]. De même, ſi on fait $y = 0$, l'éq : $a = by + cx$ ſe réduit à $a = cx$, ou $x = \frac{a}{c}$; de ſorte que prenant ſur AB l'Axe des abſciſſes, du côté poſitif, AC égale à $\frac{a}{c}$, qui eſt la troiſiéme proportionelle à c, a, & 1, on aura le point C où la Droite cherchée coupe l'Axe des abſciſſes. Il ne reſte donc plus qu'à mener cette Droite CE. Je dis qu'elle eſt repréſentée par l'éq : $a = by + cx$.

Car ſi d'un point quelconque de cette Droite on mène

Pl. IV. une paralléle à AD, on déterminera une abſciſſe x & une ordonnée y. Ce point peut être pris, ou ſur la partie EC, ou au-delà de C, ou au-delà de E. 1°. Si le point eſt M, entre E & C, l'abſciſſe A P $[x]$, & l'ordonnée PM $[y]$ ſont toutes deux poſitives. Et les triangles ſemblables CAE, CPM donnent CA $[\frac{a}{c}]$: AE $[\frac{a}{b}]$ = CP $[\frac{a}{c} - x]$: PM $[y]$. Donc $\frac{aa}{bc} - \frac{ax}{b} = \frac{ay}{c}$, ou, transpoſant $\frac{ax}{b}$, multipliant par bc, & diviſant par a, $a = by + cx$. 2°. Si le point m eſt pris au-delà de C, l'abſciſſe A p $[x]$ eſt poſitive & l'ordonnée p m $[-y]$ négative. Et les triangles ſemblables C A E, C p m donnent toûjours C A $[\frac{a}{c}]$: A E $[\frac{a}{b}]$ = C p $[x - \frac{a}{c}]$: p m $[-y]$. Donc $\frac{ax}{b} - \frac{aa}{bc} = -\frac{ay}{c}$, qui ſe réduit auſſi à $a = by + cx$. 3°. Si le point μ eſt pris au-delà de E, l'abſciſſe A π $[-x]$ eſt négative & l'ordonnée $\pi\mu$ $[y]$ eſt poſitive. Les tr. ſembl. CAE, C$\pi\mu$ donnent auſſi C A $[\frac{a}{c}]$: A E $[\frac{a}{b}]$ = C π $[-x + \frac{a}{c}]$: $\pi\mu$ $[y]$, ou $-\frac{ax}{b} + \frac{aa}{bc} = \frac{ay}{c}$, qui ſe réduit encore à $a = by + cx$.

Ch. III. §. 40.

2. Si b & c ſont négatives, l'équation ſera $a = -by - cx$: & faiſant $x = 0$, on aura $a = -by$, ou $y = -\frac{a}{b}$ = AE négative, & en faiſant $y = 0$, on aura $a = -cx$, ou $x = -\frac{a}{c}$ = AC auſſi négative. Et l'on prouvera, comme dans le n°. précéd., que EC eſt la Droite que répreſente l'éq: $a = -by - cx$.

Fig. 17.

3. Si

Ch. III. §. 40. 3. Si b eſt poſitive & c négative, l'équation ſera $a = by - cx$. Et faiſant $x = 0$, on aura $a = by$, ou $y = \frac{a}{b} = AE$ poſitive : mais faiſant $y = 0$, on aura $a = -cx$, ou $x = -\frac{a}{c} = AC$ négative. Pl. IV. Fig. 18.

4. Enfin, ſi b eſt négative & c poſitive, l'équation étant $a = -by + cx$, on trouvera que $x = 0$ donne $y = -\frac{a}{b} = AE$ négative, & que $y = 0$ donne $x = \frac{a}{c} = AC$ poſitive. Fig. 19.

Donc, en général, l'équation du premier Ordre étant complette & réduite à cette forme $a = \pm by \pm cx$, où l'on ſuppoſe a poſitive :

Si b & c ſont toutes deux poſitives, la droite EC ſoûtend l'Angle des coordonnées poſitives :

Si b & c ſont toutes deux négatives, EC ſoûtend l'Angle des coordonnées négatives :

Si b coëfficient d'y eſt poſitif & c coëfficient d'x négatif, EC ſoûtend l'Angle des ordonnées poſitives & des abſciſſes négatives.

Si b coëfficient d'y eſt négatif & c coëfficient d'x poſitif, EC ſoûtend l'Angle des abſciſſes poſitives & des ordonnées négatives.

Cas II. Si l'équation du premier Ordre n'a que deux termes, c'eſt que a, ou b, ou c ſont zéro.

1. Si a eſt zéro, $\frac{a}{b}$ & $\frac{a}{c}$ ſont zéro : les parties AC, AE priſes ſur les deux Axes devenant nulles, la Droite EC paſſe par l'Origine [§. 14]. Cependant ces parties AC, AE, lors même qu'elles s'évanouïſſent, gardent leur raiſon de $\frac{a}{b}$ à $\frac{a}{c}$ ou de c à b : ce qui détermine la po-

Pl. IV. fition de la Droite repreſentée par l'éq : $\pm by \pm cx = 0$. Ch. III. §. 40.
Car ſi l'on prend $Ac = c$ ſur l'axe des abſciſſes, & $Ae = b$ ſur l'axe des ordonnées, toutes deux poſitives, ou toutes deux négatives, ſi b & c ont différens ſi-
Fig. 30. gnes : mais l'une poſitive & l'autre négative, ſi b & c
Fig. 31. ont le même ſigne, & qu'on tire la Droite ec; AM menée parallélement à ec par l'origine A, ſera la Droite repréſentée par l'équation $\pm by \pm cx = 0$. Car ſi on abaiſſe l'ordonnée MP, les triangles ſemblables APM, Aec, donneront toûjours $AP[x] : PM[y] = Ac[\pm b] : Ae[\mp c]$, d'où réſulte $\pm by = \mp cx$ ou $\pm by \pm cx = 0$.

2. Si $b = 0$, $\frac{a}{b}$ eſt infinie. La droite AE étant infinie, le point E eſt infiniment éloigné de A, & la Droite CE, qui partant du point C va rencontrer AD à l'infini, CE, dis-je, eſt paralléle à AD. La Droite cherchée CE
Fig. 32. eſt donc paralléle à l'Axe des ordonnées. En effet, quelque point M qu'on prenne de cette Droite, ſon abſciſſe MQ eſt toûjours la même, égale à $AC[\pm\frac{a}{c}]$. Or c'eſt ce qu'indique l'éq : $x = \pm\frac{a}{c}$, ou $a = \pm cx$, à quoi ſe réduit l'éq : générale par la ſuppoſition de $b = 0$.

3. De même, $c = 0$, rend $\frac{a}{c}$, c'eſt-à-dire AC, infinie. Le point C va donc à l'infini, & la Droite qui partant de E rencontre AB à l'infini, lui eſt paralléle. On
Fig. 33. prendra donc ſur l'Axe des ordonnées $AE = \pm\frac{a}{b}$, & on ménera EC paralléle à l'Axe des abſciſſes. Chaque point M de cette Droite a ſon ordonnée MP égale à $AE[\pm\frac{a}{b}]$. Elle

eſt

Cit. III. §. 40. Pl. IV.

eſt donc repréſentée par l'éq : $y = \pm \frac{a}{b}$, ou $a = \pm by$, réduite de l'éq. générale $a = \pm by \pm cx$, par la ſuppoſition de $c = 0$.

Cas III. Si l'équation du premier Ordre n'a qu'un ſeul terme, ce ne ſera pas le terme a, qui donneroit $a = 0$, équation impoſſible, puiſque a eſt une grandeur donnée : mais ce ſera le terme by, ou le terme cx.

1. Si l'équation eſt $by = 0$, on aura $y = 0$, qui repréſente ſimplement l'Axe des abſciſſes. Les ordonnées de cet Axe ſont zéro, quelque abſciſſe qu'on prenne.

2. Si l'éq : eſt $cx = 0$, on aura $x = 0$, qui repréſente l'Axe des ordonnées, dont chaque point a ſon abſciſſe égale à zéro.

41. Un raiſonnement tout ſemblable à celui du §. 39. démontre qu'une Ligne ne ſera coupée par une Droite paralléle à ſes abſciſſes, qu'en autant de points au plus qu'il y a d'unités au plus haut expoſant de x dans ſon équation ; & qu'elle ne ſera coupée par une Droite paralléle à ſes ordonnées qu'en autant de points au plus qu'il y a d'unités au plus haut expoſant d'y dans ſon équation.

Par ex. l'éq : $x^2 y - a^2 x + aby = 0$ exprime une Courbe du troiſiéme Ordre, qui peut être coupée en trois points par une infinité de Droites, qui ont diverſes poſitions. Mais par une Droite paralléle à ſes ordonnées, elle ne peut être coupée qu'en un point ; parce que dans ſon équation y ne paſſe pas le prémier dégré. Et par une Droite paralléle aux abſciſſes, la Courbe ne peut être coupée qu'en deux points, parce que dans ſon équation x ne s'éléve qu'au ſecond dégré. En effet, ſi la Droite paralléle aux ordonnées coupe l'Axe des abſciſſes en un point éloigné de l'Origine de la diſtance m, on doit regarder cette Droite comme l'ordonnée de l'abſciſſe m. Mettant donc

PL. IV. donc m pour x dans l'équation de la Courbe, elle ſe transforme en $m^2y - a^2m + aby = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine $y = \frac{a^2m}{m^2+ab}$. La Droite paralléle aux ordonnées ne rencontre donc la Courbe qu'en un ſeul point. Si la Droite paralléle aux abſciſſes coupe l'Axe des ordonnées en un point dont la diſtance à l'origine ſoit n, on la regardera comme l'abſciſſe de l'ordonnée n. Et mettant n pour y dans l'équation, elle ſe changera en $nx^2 - a^2x + abn = 0$, dont les deux racines $x = \frac{aa + \sqrt{(a^4 - 4abnn)}}{2n}$ & $x = \frac{aa - \sqrt{(a^4 - 4abnn)}}{2n}$ montrent que cette Droite rencontre la Courbe ſeulement en deux points; qu'elle ne la rencontre qu'en un point, ſi ces deux racines ſont égales, ce qui a lieu quand $\sqrt{(a^4 - 4abnn)}$ eſt zéro, quand $n = \sqrt{\frac{a^2}{4b}}$; & qu'elle ne la rencontre point du tout, ſi ces deux racines ſont imaginaires, ce qui arrive quand $a^4 - 4abnn < 0$, quand $n > \sqrt{\frac{a^3}{4b}}$. CH. III. §. 41.

42. SI L'ON cherche généralement en quels points ſe rencontrent deux Lignes algébriques dont les équations ſont données; on doit conſidérer que quand deux Lignes ſe rencontrent, elles ont au point commun une abſciſſe & une ordonnée commune. Si donc x & y ſont les coordonnées d'une de ces deux Lignes, & z & u les coordonnées de l'autre, on aura à chaque point de rencontre quatre équations 1°. $x = z$. 2°. $y = u$. 3°. l'équation de la prémiére Ligne en x, y, & conſtantes. 4°. l'équation de la ſeconde Ligne en z, u, & conſtantes. On peut donc, en vertu des deux prémiéres équations, ſubſtituer dans

CH. III. dans la 4ème x pour z, & y pour u. Alors il reſte deux équations en x, y, & conſtantes, qui ſont celles des deux Lignes propoſées; par le moyen deſquelles faiſant évanouïr y, on aura une équation en x & conſtantes, dont les racines x marquent toutes les abſciſſes qui répondent aux points de rencontre des deux Lignes. Comme auſſi, ſi par le moyen des deux équations on fait évanouïr x, on aura une équation en y & conſtantes, dont les racines y donnent toutes les ordonnées des points de rencontre. PL. IV. §. 42.

Pour déterminer préciſément ces points, il faudroit chercher & l'abſciſſe & l'ordonnée de chaque point de rencontre, en examinant par l'une & l'autre équation quelles ſont les ordonnées qui répondent aux abſciſſes qui ſont préſentées comme abſciſſes des points de rencontre; ou, ſi l'on le trouve plus facile, quelles ſont les abſciſſes des ordonnées que l'équation en y & conſtantes donne comme ordonnées des points de rencontre. On verra par là quels ſont les points communs à l'une & à l'autre Ligne, c'eſt-à-dire, quels ſont les points qui ſont véritablement points de rencontre.

43. Cela ſeroit d'autant plus néceſſaire, qu'encore qu'il ſoit certain que chaque point de rencontre donne une racine x dans l'éq: en x & conſtantes, & une racine y dans l'éq: en y & conſtantes; on ne peut pas conclure réciproquement, que chaque racine x, ou chaque racine y, donne un point de rencontre. Dont la raiſon eſt que chaque racine x marque ſeulement qu'à une même abſciſſe les deux Lignes ont une même ordonnée, ſans dire que ces deux ordonnées ſoient réelles. Le calcul qu'on a fait n'emporte pas préciſément la rencontre des deux Lignes, mais ſeulement l'égalité d'une abſciſſe & d'une ordonnée; égalité qui peut avoir lieu entre les quantités imaginaires comme entre les grandeurs réelles. Dans ce cas, on peut dire qu'à

Pl. IV. qu'à ces abſciſſes communes répondent des interſections imaginaires, que le Calcul donne auſſi bien que les réelles. La même choſe peut arriver par raport aux racines y. Cette équivoque ſeroit levée en cherchant les ordonnées y des abſciſſes x déterminées par l'éq: en x & conſtantes; ou en cherchant les abſciſſes x des ordonnées y déterminées par l'éq: en y & conſtantes. On verroit par là ſi les points de rencontre ſont réels ou imaginaires. Mais ce Calcul ſera long & ſouvent impraticable. Ch. IV. §. 43.

44. Si x ou y ne monte qu'au premier dégré dans l'une des deux équations propoſées; on eſt ſûr, ſi c'eſt y, qu'à chaque abſciſſe il ne répond qu'une ordonnée, qui par conſéquent ne peut jamais être imaginaire, puiſque dans ſon expreſſion il n'entre point de grandeur radicale. Ainſi chaque racine réelle de l'éq: en x & conſtantes marque un point de rencontre réel & non imaginaire. De même, ſi c'eſt x qui ne monte qu'au premier dégré dans l'une des équations propoſées; on eſt ſûr que chaque racine réelle de l'éq: en y & conſtantes, indique un point de rencontre réel.

Soient propoſées, par ex. ces deux éq: $yy + 2ax = 0$ & $yy + 4xx - 10ax - 16aa = 0$. En éliminant y on trouvera $4xx - 12ax - 16aa = 0$, qui a deux racines, toutes deux réelles $x = 4a$ & $x = -a$. Qu'on ſubſtituë la prémiére racine $4a$ au lieu de x, dans l'une & l'autre des deux éq: propoſées, elles ſe réduiront à $yy + 8aa = 0$, qui n'a que deux racines imaginaires $y = +4a\sqrt{-2}$ & $y = -4a\sqrt{-2}$. A l'abſciſſe $4a$ répondent deux ordonnées égales dans chaque Courbe. Cela ſemble promettre deux interſections: mais ces ordonnées ſont imaginaires, & les interſections le ſont auſſi. Qu'on ſubſtituë préſentement dans les éq: propoſées la ſeconde racine $-a$ au lieu de x, elles ſe réduiront l'une & l'autre

à yy

Ch. III. §. 44. à $yy - 2aa = 0$, qui a deux racines réelles $y = +a\sqrt{2}$, Pl. IV. & $y = -a\sqrt{2}$. L'abſciſſe $-a$ a donc dans chaque Courbe deux ordonnées réelles & égales, l'une poſitive, l'autre négative ; qui donnent par conſéquent deux points d'interſection réels, l'un au-deſſus, l'autre au-deſſous de la Ligne des abſciſſes.

Mais, ſans ce Calcul, on auroit pû trouver le nombre des points d'interſection, en conſidérant que dans l'éq: $yy + 2ax = 0$, la variable x ne monte qu'au premier dégré. Elle n'eſt donc jamais imaginaire, quelque valeur qu'on donne à y. Ainſi il ſuffit de chercher les racines de l'éq : en y & conſtantes, qui ſe trouve en faiſant évanouïr x, Car toutes les racines réelles de cette équation donnent des interſections réelles. Cette équation eſt $y^4 + 6aayy - 16a^4 = 0$, qui a ces quatre racines $y = +a\sqrt{2}$, $y = -a\sqrt{2}$, $y = +4a\sqrt{-2}$, $y = -4a\sqrt{-2}$, dont les deux prémiéres, qui ſont réelles, donnent des interſections réelles, & les deux derniéres, qui ſont imaginaires, ne donnent que des interſections imaginaires.

45. On trouvera dans une infinité d'Exemples, ce qu'on a pû remarquer dans celui-ci, qu'une ſeule abſciſſe, [ou qu'une ſeule ordonnée] donne pluſieurs points d'interſection. Il eſt très poſſible qu'une même abſciſſe ait, dans les deux Lignes, pluſieurs ordonnées, entre leſquelles il y en ait plus d'une qui ſoit commune aux deux Lignes. Alors, il y a plus d'interſections que de racines réelles dans l'éq : en x & conſtantes, puiſqu'une ſeule & même racine donne plus d'une interſection.

Si l'on propoſe, par ex. ces deux éq. $yy + xx - aa = 0$, & $yy + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 xx - (a-b)^2 = 0$; en éliminant y on trouvera cette éq: $4axx - (2a - b)(a +$

Bo. IV. $b)^2 = o$, qui n'a que ces deux racines $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa - ab)}$, & $-\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa - ab)}$. Mais ce seroit se tromper que d'en conclure que les deux Courbes représentées par ces deux équations ne se rencontrent qu'en deux points. Car à chaque racine x il répond deux intersections, comme on le voit en substituant dans chaque équation au lieu d'x ses valeurs. En substituant la prémiére $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa - ab)}$, on trouve $yy - \frac{2aa + ab}{4aa}(a - b)^2 = o$, qui a deux racines réelles $+\frac{a-b}{2a}\sqrt{(2aa + ab)}$, & $-\frac{a-b}{2a}\sqrt{(2aa + ab)}$. Ainsi à l'abscisse positive $x = +\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa - ab)}$ répondent deux intersections, l'une au-dessus, l'autre au-dessous de l'Axe des abscisses. Il en répond aussi deux autres à l'abscisse négative $x = -\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2aa - ab)}$; ce qui fait quatre intersections en tout. Si on avoit commencé par éliminer x, l'éq : en y & constantes n'auroit eu non plus que deux racines : ce qui auroit exposé au danger de conclure avec précipitation que les deux Courbes ne se rencontrent qu'en deux points.

Ch. III. §. 452

On éviteroit ce danger, si en éliminant une des variables, comme y, on supposoit, au lieu des équations proposées, des équations générales complettes, telles que $Ayy + By + C = o$, & $Dyy + Ey + F = o$, où l'indéterminée y est du même dégré que dans les équations dont on veut la chasser, & où A, B, C, D, E, F sont des Fonctions rationelles de x, telles qu'on voudra. Si de ces deux

Ch. III. deux éq : $Ayy + By + C = o$, & $Dyy + Ey + F = o$, Pl. IV.
§. 45. on élimine y, on parviendra à cette éq : $(AF - CD)^2 + (AE - BD)(CE - BF) = o$, qui a autant de racines qu'il y a d'interſections. Pour l'appliquer aux équations propoſées ci-deſſus, $yy + xx - aa = o$, & $yy + \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 xx - (a-b)^2 = o$, on ſera $A = 1$, $B = o$, $C = xx - aa$, $D = 1$, $E = o$, $F = \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 xx - (a-b)^2$, & ces valeurs ſubſtituées dans l'éq : $(AF - CD)^2 + (AE - BD)(CE - BF) = o$, la changent en $\frac{16\,aabb}{(a+b)^4} x^4 - \frac{8\,ab(2ab - bb)}{(a+b)^2} xx + (2ab - bb)^2 = o$, qui, diviſée par bb, eſt juſtement le quarré de l'éq : $\frac{4a}{(a+b)^2} xx - (2a - b) = o$, qu'on a trouvée ci-deſſus. Dans celle-ci x a les deux mêmes racines $+\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2ab - bb)}$, & $-\frac{a+b}{2a}\sqrt{(2ab - bb)}$; mais chacune de ces racines eſt double, parce qu'à chaque abſciſſe x répondent deux interſections.

46. Mais ſi l'on ne cherche pas tant à connoître en combien de points ſe rencontrent deux Lignes dont les équations ſont données, qu'à ſavoir, [ce qui a auſſi ſon uſage] en combien de points une Ligne d'un Ordre donné peut rencontrer une autre Ligne d'un Ordre auſſi donné ; on doit concevoir, ce qui eſt toûjours évidemment poſſible, un Axe des abſciſſes dont la poſition ſoit telle qu'à chaque point de rencontre il réponde une ordonnée & une abſciſſe différente. Alors ſi l'on fait évanouïr x ou y par le moyen des équations des deux Lignes,

Pl. 17. il reſtera une équation, qui aura au moins autant de racines qu'il y a de points de rencontre des deux Lignes, puiſque chaque point de rencontre a ſon abſciſſe & ſon ordonnée particuliére. Or il eſt démontré * que ſi l'on a deux variables, & deux équations indéterminées qui expriment le raport de ces variables avec des conſtantes, deſquelles l'une ſoit de l'ordre m & l'autre de l'ordre n; lors qu'au moyen de ces deux équations on chaſſe une de ces variables, celle qui reſte n'a, dans l'équation finale qui la détermine, que mn dimenſions au plus. Elle ne peut donc avoir, dans cette équation, que mn racines au plus. Par conſéquent, deux Lignes algébriques décrites ſur un même plan, ne peuvent ſe rencontrer qu'en autant de points, au plus, qu'il y a d'unités dans le produit des nombres qui ſont les expoſants de leurs Ordres †. Une Ligne, par ex. du 3e. Ordre ne peut rencontrer une Ligne du 4e. Ordre, qu'en 12 points, au plus: & une Ligne du 5e. Ordre ne ſauroit rencontrer une Ligne du 12e. Ordre qu'en 60 points, au plus. Ch. III. §. 46.

47. Ce principe ſemble d'abord être en contradiction avec celui du §. 38. On peut toûjours décrire une Ligne du ſecond Ordre par cinq points donnés, quelle que ſoit la poſition de ces cinq points. Si trois d'entr'eux ſont en ligne droite, cette Droite coupera en trois points la Ligne du ſecond Ordre qui paſſe par les cinq points donnés. On

* Ce Principe, purement algébrique, devroit être démontré dans l'Algébre. Comme je n'en connois aucune qui en donne la Démonſtration, j'ai crû devoir l'inférer dans l'*Appendice*, N°. 3.

† Mr. Mac-Laurin a démontré la même choſe, mais je ne crois pas que ſa Démonſtration ait été rendue publique. Voiez *Tranſ. Philoſ.* N°. 439. pag. 143.

Digitized by Google

Ch. IV. §. 47. On a vû pourtant [§. 39. ou précéd.] qu'une Droite ne peut couper une Ligne du ſecond Ordre qu'en deux points. Comment accorder ces deux conſéquences oppoſées ? Il n'y a qu'un ſeul moyen. C'eſt de dire que, dans ce cas, la Ligne du ſecond Ordre qui paſſe par les cinq points donnés, n'eſt pas une Courbe, mais le Syſtême de deux Droites, dont l'une eſt celle-là même qui paſſe par les trois points donnés en droite ligne & dont l'autre paſſe par les deux points reſtants. Le Calcul confirmera la vérité de cette conciliation. Pl. III.

Poſons, dans l'Exemple du §. 38, que les trois points A, D, E ſoient en ligne droite. Comme on a pris AE pour l'Axe des abſciſſes, le point D ſe trouvant ſur cet Axe, l'ordonnée Dd [d] eſt zéro, ce qui réduit l'éq : $\epsilon d(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)xx-(\gamma d(b-d)(\epsilon-\gamma)-c\delta(b-c)(\epsilon-\delta))xy+\gamma\delta(d(\epsilon-\gamma)-(\epsilon-\delta)c)yy-cd\epsilon(\gamma(b-d)-(b-c)\delta)x-b\gamma\delta(d(\epsilon-\gamma)-(\epsilon-\delta)c)y=0$ qu'on avoit trouvée pour la Ligne du ſecond Ordre qui paſſe par les cinq points donnés A, B, C, D, E, à $(\epsilon-\delta)(b-c)\epsilon\delta xy-(\epsilon-\delta)c\delta\gamma yy+(\epsilon-\delta)c\delta\gamma by=0$. Or cette équation eſt diviſible par $(\epsilon-\delta)c\delta y$, & a pour quotient $(b-c)x-\gamma y+b\gamma$. On peut donc lui donner cette forme $(\epsilon-\delta)c\delta y\times((b-c)x-\gamma y+b\gamma)=0$, ſous laquelle on voit qu'elle repréſente deux Droites, dont l'une exprimée par l'éq : $(\epsilon-\delta)c\delta y=0$, où ſimplement $y=0$ eſt l'Axe des abſciſſes, qui paſſe par les trois points en ligne droite A, D, E : l'autre repréſentée par l'éq : $(b-c)x-\gamma y+b\gamma=0$ paſſe par les deux autres points B, C. En effet $x=0$ donne $y=b=$ AB, & $x=\gamma=$ Ac donne $y=c=$ cC. Donc la Ligne paſſe par les points B & C. Fig. 13.

Ainſi une Ligne du ſecond Ordre décrite par cinq points donnés, dont trois ſont en droite ligne, eſt néceſſairement le Syſtême de deux Droites, dont l'une paſſe

Pl. IV. par ces trois points, & l'autre par les deux points reſtants. Ch. III. §. 47.

Cet Exemple, & la néceſſité d'admettre cet unique dénoüement, nous autoriſe à affirmer généralement *: Que quand, dans le nombre $\frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}v$ de points par leſquels on peut & veut faire paſſer une Ligne de l'Ordre v, il y a plus de tv de ces points qui ſe trouvent ſur une Ligne de l'ordre t inférieur à v, alors la Ligne cherchée de l'ordre v n'eſt pas une Ligne unique, mais le Syſtème de deux ou pluſieurs Lignes, l'une deſquelles eſt cette même Ligne de l'ordre t ſur laquelle ſe trouvent plus de tv points donnés. Car autrement, deux Lignes, l'une de l'ordre t, l'autre de l'ordre v, ſe couperoient en plus de tv points: ce qui eſt impoſſible [§. 46].

48. Une autre contradiction apparente entre les §§. 46 & 38, eſt celle-ci. Puiſqu'une Ligne de l'ordre m ne peut rencontrer une Ligne de l'Ordre n, qu'en mn points, une Ligne de l'Ordre v ne rencontrera une autre Ligne du même ordre qu'en vv points. Si donc vv eſt égal ou plus grand que le nombre $\frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}v$, qui eſt celui des points qui déterminent une Ligne de l'ordre v, on pourra faire paſſer plus d'une Ligne de l'ordre v par $\frac{1}{2}vv+\frac{1}{2}v$ points; ce qui ſemble contraire au §. 38 †. Ainſi deux Lignes du troiſiéme Ordre ſe pouvant couper en 9 points, ſi l'on aſſigne ces 9 points pour y faire paſſer une Ligne du troiſiéme Ordre; il eſt clair que les deux Lignes qui ſe coupent dans ces 9 points ſatisfont également à ce qu'on déſire. L'équation de la Ligne qui doit paſſer par ces 9 points n'eſt donc pas déterminée. De même deux Lignes du quatriéme Ordre ſe peuvent couper en 16 points. Et l'on a établi

* Mac-Laurin, *Geometria organica*, pag. 137.
† Idem, ibid.

Ch. III. §. 48. établi [§. 38] que 14 points ſuffiſent pour déterminer une Ligne du quatriéme Ordre. Mais ſi ces 14 points ſont pris entre les 16 où ces deux Lignes ſe coupent, l'une & l'autre Ligne ſatisfait au Problème, qui eſt, par conſéquent, indéterminé. PL. IV.

Cette contradiction ſe léve par la Remarque qui termine le §. 38. C'eſt qu'encore qu'on ait autant d'équations qu'il en faut, généralement parlant, pour déterminer tous les coëfficients de l'équation priſe pour répréſenter la Courbe qui doit paſſer par un certain nombre de points donnés, il peut pourtant arriver que ces coëfficients reſtent indéterminés. Alors l'équation priſe reſte indéterminée & repréſente une infinité de Courbes du même Ordre. D'où il ſuit, Que ſi les 9 points, par leſquels on veut décrire une Ligne du troiſiéme Ordre, ont une poſition telle qu'on puiſſe faire paſſer par ces 9 points deux Lignes de cet Ordre, il pourra paſſer par ces mêmes 9 points une infinité de Lignes du troiſiéme Ordre. Et de même, que ſi deux Lignes du quatriéme Ordre ſe coupent en 16 points, parmi leſquels on en choiſit 14 quelconques, il y a une infinité de Lignes du quatriéme Ordre qui peuvent paſſer par ces 14 points, &c. Ce qui eſt un véritable paradoxe.

CHAPI-

CHAPITRE IV.

Quelques Remarques ſur la Conſtruction géométrique des Egalités.

Pl. IV. 49. DE ſ Principes établis à la fin du Chap. précédent, découle la Méthode uſitée pour la Conſtruction des Egalités déterminées. Elle conſiſte à choiſir deux équations indéterminées, telles que faiſant évanouïr une des deux variables que ces équations renferment, l'équation déterminée, qui reſte après cet évanouïſſement, ſoit l'égalité même qu'on propoſoit à conſtruire. Si l'on décrit ſur un même plan & d'une même Origine les deux Lignes que repréſentent ces équations indéterminées, & qu'on méne les ordonnées de tous les points où ces deux Lignes ſe rencontrent, elles ſeront les racines de l'Egalité propoſée [§. 42]. On ſuppoſe ici que y eſt l'inconnuë de l'égalité propoſée, & x la variable qu'on fait évanouïr. §. 49.

Soit propoſé, par ex. ce Problême ſi fameux dans l'Antiquité, de trouver entre deux Droites données a & b, deux moyennes proportionelles. Si on nomme la prémiére y, la ſeconde ſera $\frac{yy}{a}$, puiſque $a : y = y : \frac{yy}{a}$. On aura donc cette proportion $a : y = \frac{yy}{a} : b$, qui donne l'éq: $\frac{y^3}{a} = ab$, ou $y^3 = aab$; Egalité du troiſiéme dégré, que ni l'Algébre, ni la Géométrie Elémentaire ne peuvent réſoudre généralement que par approximation. Mais, en intro-

Digitized by Google

Ch. IV. §. 43. introduiſant une autre inconnuë x, qui ſoit, par ex. la ſeconde moyenne proportionelle, on aura ces deux proportions $a : y = y : x$, & $y : x = x : b$, qui donnent ces deux équations indéterminées $ax = yy$ & $xx = by$, leſquelles, faiſant évanouïr x, rendent l'Egalité $y^3 = aab$, qu'on avoit ci-deſſus. Car la prémiére de ces deux équations donne $x = \frac{yy}{a}$, & cette valeur ſubſtituée dans la ſeconde la transforme en $\frac{y^4}{aa} = by$, ou $y^4 = aaby$, & diviſant par y, $y^3 = aab$. Pl. IV.

Si donc on décrit, d'une même origine A & ſur les mêmes Axes, les deux Courbes CAM, BAM repréſentées par les deux éq: $ax = yy$ & $xx = by$, & que de leur commune interſection M on abaiſſe l'ordonnée MP [y], elle ſera la racine de l'Egalité cubique $y^3 = aab$, & la prémiére des deux moiennes proportionelles entre a & b. Et comme x repréſente la ſeconde de ces deux moyennes, l'abſciſſe AP [x] ſera cette ſeconde moyenne, en ſorte que les quatre Droites a, MP, PA, b, ſont en proportion continuë. Fig. 34.

Cela ſuit du §. 42. Car y & x ſont deux variables, dont le raport pour tous les points de la Courbe CAM s'exprime par l'éq : $ax = yy$, & pour tous les points de la Courbe BAM par l'éq : $xx = by$. Donc au point M, commun à ces deux Courbes, le raport de y à x s'exprime en même tems par les deux éq : $ax = yy$ & $xx = by$. Ces lignes y & x ceſſent donc d'être variables, & deviennent déterminées par les Egalités $y^3 = aab$ & $x^3 = abb$, qui réſultent de l'évanouïſſement de x & de y, & qui déterminent la valeur de l'ordonnée & de l'abſciſſe au point M. En effet, puiſque la Courbe CAM eſt repréſentée par l'éq : $ax = yy$, ou, ce qui eſt la même choſe, par la propor-

Pl. IV. tion $a : y = y : x$; quelque point M qu'on prenne ſur cette Courbe CAM, l'ordonnée MP [y] eſt toujours moyenne proportionelle entre la Droite donnée a & l'abſciſſe AP[x]. Et puiſque la Courbe BAM eſt repréſentée par l'éq : $xx = by$, qui ſe réduit à la proportion $y : x = x : b$; l'abſciſſe AP [x] d'un point quelconque M de cette Courbe BAM eſt moyenne proportionelle entre l'ordonnée MP [y] & la Droite donnée b. Donc, au point M, commun à ces deux Courbes, on a ces deux proportions à la fois, a : PM = PM : AP, & PM : AP = AP : b. Donc PM & AP ſont les deux moyennes proportionelles entre a & b. Ch. IV. §. 42.

50. Le choix des équations indéterminées qui doivent rendre l'Egalité propoſée, lorſqu'on aura fait évanouïr une des variables, n'a rien de difficile. On en prend une, preſque arbitrairement, & l'on tire de cette équation la valeur de y, ou de yy, ou de y^3, *&c.* en x & en conſtantes, ou même en y, x & conſtantes. On ſubſtituë cette valeur en un ou en pluſieurs termes de l'Egalité : ce qui la change en une Equation indéterminée, qui, avec celle qui a été choiſie, redonne l'Egalité propoſée, en faitant évanouïr x. On peut auſſi combiner les deux équations indéterminées qu'on a trouvées, en les ajoûtant enſemble, en retranchant l'une de l'autre, ou en d'autres maniéres, qui fourniront toutes de nouvelles équations indéterminées, parmi leſquelles on aura le choix de celles qui paroîtront les plus convenables.

Dans l'Exemple du §. précéd. l'Egalité propoſée à conſtruire étoit $y^3 = aab$, & l'éq : indéterminée qu'on avoit choiſie étoit $ax = yy$. On peut ſubſtituer cette valeur de yy dans le premier membre de l'Egalité, ce qui la transforme en $axy = aab$, ou $xy = ab$, autre équation indéterminée, qui, avec la prémiére $ax = yy$, conſtruira l'Egalité $y^3 = aab$. On peut auſſi multiplier ces deux équations

Ce. V. §. 50. tions l'une par l'autre, & on aura $axxy = abyy$ ſoit $xx = by$, qui eſt l'équation dont on a fait uſage dans le §. préc. pour conſtruire l'Egalité propoſée. On peut encore ajoûter, ou ſouſtraire, ſoit les deux premiéres équations, ce qui donne $ax + xy = yy + ab$, & $ax - xy = yy - ab$; ſoit les deux derniéres, d'où réſultent $xy + xx = ab + by$, & $xy - xx = ab - by$; ſoit enfin, la prémiére & la derniére, d'où l'on tire $ax + xx = yy + by$, & $ax - xx = yy - by$. On peut encore, ſi l'on veut, multiplier ou diviſer une de ces équations par un nombre quelconque n, & ajoûter au produit ou en retrancher quelque autre équation de celles qu'on a trouvées. La prémiére, par ex. multipliée par n, donne $nax = nyy$, à quoi ajoûtant la ſeconde $xy = ab$, on aura $nax + xy = nyy + ab$. On voit aſſez par ce ſimple Exemple, qu'on peut trouver une infinité d'équations indéterminées, entre leſquelles on choiſira celles qu'on croira les plus convenables. Ici, par ex. toutes ces équations étant du ſecond Ordre, il conviendra de choiſir $ax - xx = yy - by$, qui déſigne une Circonférence de Cercle, la Courbe la plus connuë & la plus aiſée à décrire, & on la combinera avec celle qu'on voudra des autres équations trouvées. Pl. IV.

51. On a dit que le choix de la prémiére des deux équations indéterminées qui ſervent à conſtruire une Egalité eſt *preſque* arbitraire. Ce qui empêche qu'il ne le ſoit entiérement, c'eſt la crainte que les interſections qui déterminent les racines de l'Egalité ne ſoient imaginaires [§. 42]. Il faut que les Lignes choiſies ayent des abſciſſes réelles qui répondent aux ordonnées qui ſont les racines de l'Egalité, ou des ordonnées réelles qui répondent aux abſciſſes qui ſont les racines de l'Egalité propoſée. Autrement, il arrivera que les interſections qui devroient déterminer

Pl. IV. ces racines ſeront imaginaires, & que l'Analyſte ſera fruſ- Ch. IV.
tré de ſon attente *. §. 51.

Si l'on avoit, par ex. à conſtruire l'Egalité $x^4 + 15a^2x + 14a^4 = 0$, & qu'introduiſant l'inconnuë y, on voulût employer pour cela les éq : $x^2 - ayy = 0$ & $xyy + 15a^2x + 14a^3 = 0$, qui rendent l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$, en faiſant evanouïr y. On trouvera, en prenant
Fig. 35. AB & AD pour les deux Axes, que l'éq : $x^2 - ayy = 0$ donne la Courbe EAF, qui, du côté des abſciſſes poſitives, a deux branches égales & ſemblables, de part & d'autre de l'Axe des abſciſſes, mais qui, du côté des abſciſſes négatives, n'a aucune branche, toutes les ordonnées $y\,[= \sqrt{\frac{x^3}{a}}\,]$ étant imaginaires, quand les abſciſſes x ſont négatives. On trouvera, au contraire, que l'éq : $xyy + 15a^2x + 14a^3 = 0$ repréſente une Courbe GCH, qui tombe toute entiére du côté des abſciſſes négatives, parce que x poſitive donne $y\,[= \sqrt{(-\frac{15a^2x + 14a^3}{x})}\,]$ imaginaire. Ces deux Courbes EAF, GCH ne peuvent donc ſe rencontrer. D'où l'on ſeroit porté à conclure que l'Egalité $x^4 + 15a^2x + 14a^3 = 0$ n'a que des racines imaginaires : ſi l'on ne ſavoit pas que des interſections imaginaires peuvent donner des racines réelles [§. 43]. En effet, ſi on cherche les ordonnées que porte, dans l'une & l'autre Courbe, l'abſciſſe $-a$; on les trouvera égales entr'elles & à $\pm a\sqrt{-1}$. Donc l'abſciſſe $x = -a$, ou plûtôt l'éq : $x + a = 0$, eſt une racine de l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$: ce que le Calcul confirme aiſément. De même ſi l'on cherche les ordonnées de l'abſciſſe $-2a$, on

* Mr. Rolle, *Hiſt. de l'Acad.* 1708 pag. 71, & 1709, pag. 52. Et *Memoires* de 1708, pag. 339, & de 1709, pag. 320, & 419.

igitized by Google

CH. IV. §. 51. on trouvera, pour l'une & l'autre Courbe, $\pm 2a\sqrt{-2}$. Ainſi l'abſciſſe $-2a$ a, dans les deux Courbes, une même ordonnée, quoique imaginaire, & cette abſciſſe $x = -2a$, ou plûtôt l'éq: $x + 2a = 0$, eſt encore une racine réelle de l'Egalité $x^4 + 15a^3 + 14a^4 = 0$; ce que le Calcul vérifiera auſſi. PL. IV.

Le nombre des interſections réelles des deux Lignes peut donc être moindre que le nombre des racines réelles de l'Egalité qu'on veut conſtruire par le moien de ces deux Lignes.

52. MAIS, en échange, le nombre des interſections des deux Lignes peut ſurpaſſer le nombre des racines de l'égalité; parce qu'il ſe peut que pluſieurs interſections ne donnent qu'une ſeule racine; ſç., lorſque pluſieurs points de rencontre n'ont qu'une même ordonnée, ou n'ont qu'une même abſciſſe [§. 45].

Par ex. On veut conſtruire l'Egalité $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ avec les deux éq: indéterminées $x^3 - ayy = 0$ & $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$, qui font reparoître l'Egalité propoſée, en éliminant y. La premiére $x^3 - ayy = 0$ de ces deux équations donne, comme ci-deſſus, la Courbe EAF, qui eſt toute entiére du côté des abſciſſes poſitives. Mais la ſeconde éq: $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$, repréſente une Courbe compoſée de trois portions ſéparées GBH, IK, ik. Ces deux derniéres ſont du côté des abſciſſes négatives, & la prémiére du côté des abſciſſes poſitives. En examinant l'éq: $xyy - 15a^2x + 14a^3 = 0$ ou $yy = \frac{15a^2x - 14a^3}{x}$, on trouve que cette portion GBH eſt partagée par l'Axe des abſciſſes en deux branches égales & ſemblables, qui partent du point B extrémité de l'abſciſſe $AB = \frac{14}{15}a$; qu'une abſciſſe poſitive plus petite que AB n'a que des ordonnées imaginaires; mais qu'à commencer Fig. 36.

Rc. IV. à B, plus les abſciſſes augmentent, plus les ordonnées augmentent auſſi, ſans paſſer néantmoins la grandeur $a\sqrt{15}$, à laquelle les ordonnées ne parviennent que quand l'abſciſſe eſt infinie. La Courbe GBH rencontre la Courbe EAF en quatre points M, N, n, m. Il ne faut pourtant pas en conclure que l'Egalité $x^4 - 15a^2x + 14a^4 = 0$ a quatre racines réelles. Car les interſections M, m, quoiqu'elles ayent deux ordonnées MP $[+2a\sqrt{2}]$ & mP $[-2a\sqrt{2}]$, n'ont qu'une ſeule abſciſſe AP $[x = 2a]$: Et les interſections N, n, quoiqu'elles ayent deux ordonnées NQ $[+a]$ & nQ $[-a]$, n'ont qu'une ſeule abſciſſe AQ $[x = a]$. Ainſi les quatre interſections M, N, n, m ne donnent que deux racines $x - 2a = 0$, & $x - a = 0$. Et l'Egalité $x^4 - 15a^2x + 14a^4 = 0$ n'a point d'autres racines réelles. Car ſi on la diviſe par $x - 2a = 0$, & le quotient par $x - a = 0$, ou ſi on diviſe tout d'un coup l'Egalité par le produit $(x-2a) \times (x-a) = 0 = xx - 3ax + 2aa$, on aura au quotient l'éq: $xx + 3ax + 7aa = 0$, qui n'a que deux racines imaginaires, $3a + \frac{1}{2}a\sqrt{-19}$ & $3a - \frac{1}{2}a\sqrt{-19}$.

Ch. IV. §. 52.

53. On évite ces deux inconvéniens, d'avoir plus & moins d'interſections qu'il n'y a de racines réelles dans l'Egalité qu'on veut conſtruire, en choiſiſſant l'une des deux équations qu'on veut employer, telle que la variable y qui doit s'évanouïr n'ait qu'une dimenſion. Car alors, cette variable, qui exprime les ordonnées des Lignes par l'interſection deſquelles on conſtruit l'Egalité, n'a qu'une ſeule valeur dans l'équation où elle n'a qu'une dimenſion, & cette valeur ne peut être imaginaire. Donc à chaque x réelle il répond une ſeule y, mais réelle. Il y aura donc [§. 44] autant d'interſections préciſément que de racines réelles *.

Repre-

* Hermanni, Obſervat. in Sched. Dni Rolle &c. *Miſcell. Berol. Tom.* III. pag. 131.

Ch: IV. §. 53. Reprenons les Egalités des §§. précéd. $x^4 + 15a^3x +$ Pl. IV. $14a^4 = 0$, & $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$, &, pour les conſtruire, au lieu de l'éq : $x^3 - ayy = 0$, prenons $xx - ay = 0$, où y n'a qu'une ſeule dimenſion. Qu'on ſubſtituë, dans le premier terme des Egalités propoſées, ay au lieu de xx, elles ſe transformeront en $aayy + 15a^3x + 14a^4 = 0$, & $aayy - 15a^3x + 14a^4 = 0$, ou, diviſant par aa, en $yy + 15ax + 14aa = 0$, & $yy - 15ax + 14aa = 0$. On conſtruira donc la prémiére Egal : $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$ par les interſections des Courbes repréſentées par les deux éq : $xx - ay = 0$, & $yy - 15ax + 14aa = 0$; & la ſeconde Egal : $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$ par les interſections des Courbes que repréſentent les deux éq : $xx - ay = 0$, & $yy - 15ax + 14aa = 0$.

La prémiére éq : $xx - ay = 0$ exprime une Courbe CAM compoſée de deux branches égales & ſemblables AC, AM; qui partant de l'origine A s'étendent à l'infini à droite & à gauche au-deſſus de l'Axe des abſciſſes. Fig. 37. & 38.

Qu'avec cette Courbe on combine la Courbe EBM repréſentée par l'éq : $yy + 15ax + 14aa = 0$, & qui eſt auſſi compoſée de deux branches égales & ſemblables BM, BE, partant du point B extrémité de l'abſciſſe $AB = -\frac{14}{15}a$, & s'étendant à l'infini vers la gauche, deſſus & deſſous l'Axe des abſciſſes. Les interſections M, N de ces deux Courbes CAM, EBM donneront les deux racines de l'Egalité $x^4 + 15a^3x + 14a^4 = 0$. En abaiſſant les ordonnées MP, NQ on aura les abſciſſes $AP = -2a$ & $AQ = -a$, qui font connoître les racines $x = -2a$, & $x = -a$, ou $x + 2a = 0$ & $x + a = 0$, de cette Egalité. Et comme elle n'a que ces deux racines réelles, les Courbes CAM, EBM ne ſe rencontreront qu'en ces deux points M & N. Fig. 37.

Mais ſi avec la Courbe CAM, déſignée par l'éq : $xx - ay = 0$, on combine la Courbe EBM repréſentée par Fig. 38.

l'éq :

Pl. IV. l'éq : $yy - 15ax + 14aa = 0$, qui eſt la même que la Cu. IV. Courbe EBM de la *Fig.* préc. tranſportée ſeulement de §. 51. la gauche à la droite, puiſque ces deux équations ne diffèrent que dans le ſigne de x : on aura les racines réelles de l'Egalité $x^4 - 15a^3x + 14a^4 = 0$. En abaiſſant des points d'interſection M, N les ordonnées MP, NQ, on aura les abſciſſes $AP = 2a$ & $AQ = a$, qui font connoître les racines réelles $x = 2a$ & $x = a$, ou $x - 2a = 0$ & $x - a = 0$ de cette Egalité. Et ici, comme dans le Cas précédent, il n'y a ni plus ni moins d'interſections que de racines réelles.

54. C'EST, ſans doute, une néceſſité que de prévenir les inconvéniens cités aux §§. 51 & 52. Mais ce n'eſt que pour plus d'élégance qu'on joint à la Méthode cette condition, que les deux équations, qu'on employe pour conſtruire une Egalité, ſoient les plus ſimples qu'il ſoit poſſible, & de l'Ordre le plus bas qui puiſſe ſuffire à la Conſtruction *.

Ainſi, comme pour conſtruire une Egalité du 4e. dégré, il ſuffit de deux Courbes qui ſe coupent en 4 points, & puiſqu'il ne faut pour cela qué des Lignes du 2^d^. Ordre [§. 46]; on regarderoit comme une faute contre la ſimplicité géométrique d'emploier des Courbes d'un Ordre ſupérieur. Et comme une Egalité du 9e. dégré, n'aiant que 9 racines, ne demande que 9 interſections, ce qui eſt le nombre de points où peuvent ſe rencontrer deux Lignes du 3e. Ordre [§. 46]; il ne faudra pas emploier des Courbes d'un Ordre plus élevé que le 3e, pour la conſtruction des Egalités du 9e. dégré. En général, les Egalités du dégré vv ſe doivent réſoudre par les interſections de deux Lignes de l'Ordre v, qui peuvent ſe couper en autant

* Iacobi BERNOULLI *Opera*, pag. 343.

Fig. 27.

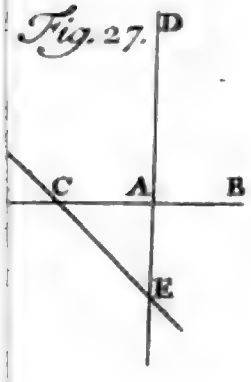


Fig. 28.

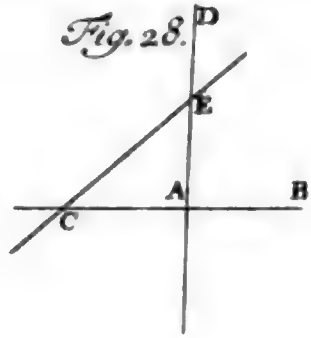


Fig. 29.

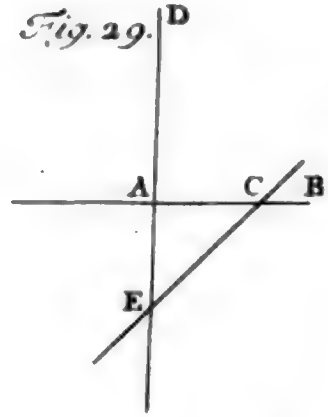


Fig. 31.

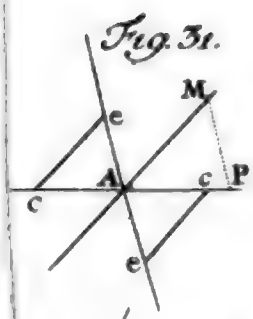


Fig. 32.

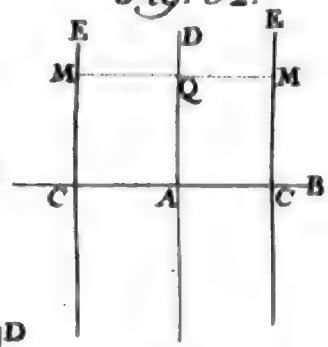


Fig. 33.

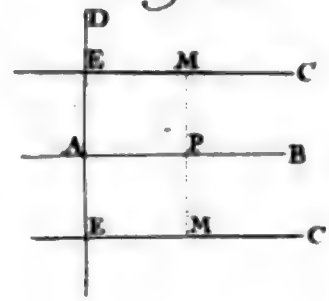
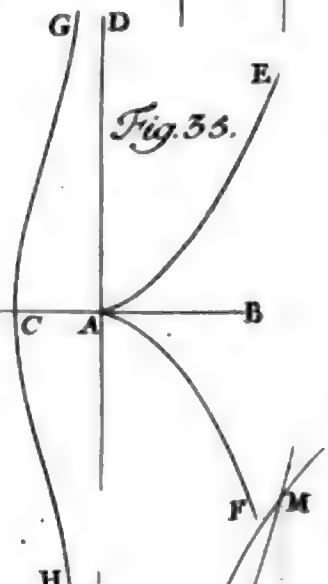


Fig. 35.



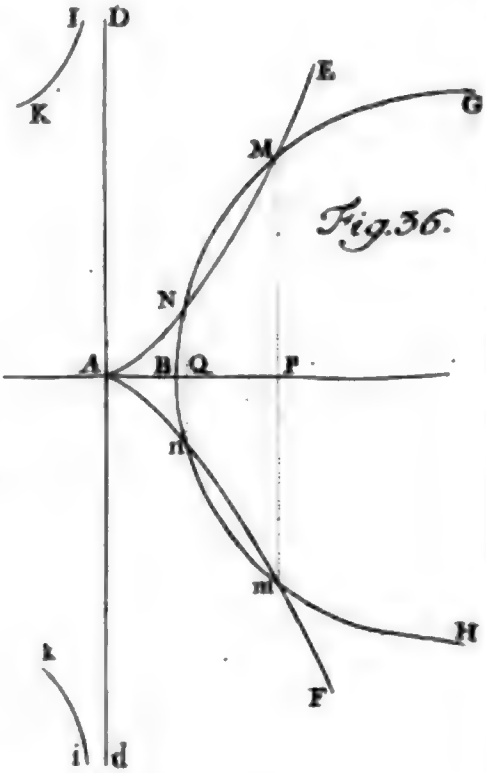
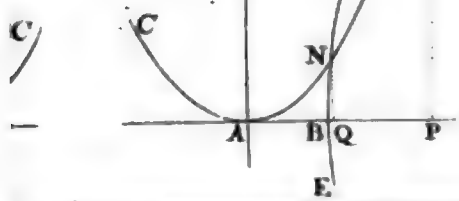


Fig. 36.

Fig. 38.



Digitized by Google

CH. IV. tant de points qu'il y a d'unités dans *vv*, & déterminer par PL. IV.
§. 54 ces interſections toutes les racines de l'Egalité.

Quant aux Egalités dont le dégré n'eſt pas un nombre quarré; on pourroit les conſtruire par deux Lignes telles que le produit des expoſants de leurs Ordres faſſe le dégré de l'Egalité propoſée [§. 46]. On peut, par ex. conſtruire une Egalité du 15e. dégré par les interſections de deux Lignes, l'une du 3e., l'autre du 5e. Ordre. Mais, comme on peut réſoudre toute Egalité du 16e. dégré par deux Lignes du 4e. Ordre, il n'a pas paru convenable d'employer une Ligne d'un Ordre ſupérieur, pour conſtruire une Egalité d'un dégré inférieur, & on a préféré d'élever l'Egalité du 15e. dégré au 16e. en multipliant tous ſes termes par l'inconnuë de l'Egalité. On eſtime donc qu'il y a plus de ſimplicité à employer deux Lignes du 4e. Ordre, qu'une Ligne du 3e. avec une Ligne du 5e. Ordre. De même, pour conſtruire une Egalité du 14e. dégré; ce qu'on pourroit faire avec une Ligne du 7e. & une du 2e. Ordre: on aime mieux employer deux Lignes du 4e. Ordre, & élever l'Egalité du 14e. dégré au 16e., en multipliant tous ſes termes par le quarré de l'inconnuë. Mais les Egalités du 12e. dégré ſe conſtruiſent avec deux Lignes, l'une du 4e. & l'autre du 3e. Ordre. Et c'eſt avec de pareilles Lignes qu'on conſtruit les Egalités du 11e. & du 10e. dégré, après les avoir élevés au 12e. en multipliant tous les termes de la prémiére par l'inconnuë, & tous les termes de la ſeconde, par le quarré de l'inconnuë.

On a donc formé cette Régle générale pour la ſimplicité de la conſtruction géométrique des Egalités déterminées *. » On extraira la racine quarrée du dégré de l'Egalité pro- » poſée. Si cette racine eſt exacte, on conſtruira l'Egalité

* Mr. DE L'HÔPITAL *Sections Coniques*, pag. 346.

Digitized by Google

Pl. IV. » avec deux Lignes dont l'Ordre a pour expoſant cette ra- Ch. IV.
» cine même. Si la racine n'eſt pas exacte, on ôtera du §. 54.
» dégré de l'Egalité le plus grand quarré qui y ſoit conte-
» nu; & ſi le reſte eſt égal ou moindre que la racine de
» ce quarré, l'une des deux Lignes doit être de l'Ordre
» qui a pour expoſant la racine, & l'autre de l'Ordre im-
» médiatement ſupérieur : mais ſi le reſte eſt plus grand
» que la racine, les deux Lignes doivent être chacune de
» l'Ordre dont l'expoſant a une unité de plus que la ra-
» cine.

Si, par ex. l'Egalité étoit du 30e. dégré. Comme la racine quarrée la plus prochaine de 30 eſt 5, dont le quarré 25 ôté de 30 laiſſe pour reſte 5, qui eſt égal à la racine 5; l'Egalité ſe peut conſtruire par deux Lignes, une du 5e. & une du 6e. Ordre. Les mêmes ſerviront à conſtruire les Egalités du 26e, 27e, 28e, & 29e dégré. Mais ſi l'Egalité étoit du 31e. dégré, dont la racine quarrée aprochée eſt auſſi 5; comme le quarré 25, ôté de 31, laiſſe 6, qui eſt plus grand que la racine 5; il faudra pour conſtruire l'Egalité du 31e. degré, deux Lignes du 6e. Ordre. Et il ſuffira auſſi de deux Lignes du même Ordre pour conſtruire les Egalités du 32e, 33e, 34e, 35e, & 36e. dégré.

Les Egalités du dégré	2.	3.	4.	5.	6.	7..	9.	10..	12.	13..	16.	17..	20.	21..	25.	26..	30.	31..	36
ſe conſtruiſent par deux Lignes de l'Ordre —	1	2	2	3	3		4	4		5	5		6	6		7	7		8
& —	2	2	3	3	4		4	5		5	6		6	7		7	8		8

Les Egalités du dégré	37..	42.	43..	49.	50..	56.	57..	64.	65...	72.	73..	81.	82..	90.	91..	100
ſe conſtruiſent par deux Lignes de l'Ordre —		6		7		7		8		8		9		9		10
& —		7		7		8		8		9		9		10		10

55. Telle

CH. IV. §. 55. PL. IV.

55. TELLE eſt la Régle des Géométres modernes pour le choix des Lignes propres à conſtruire une Egalité d'un dégré propoſé. On voit par là, qu'ils meſurent la ſimplicité d'une conſtruction par la ſimplicité de l'Ordre des Lignes qu'on y employe, & qu'ils ſe font une Loi de ne pas admettre des Lignes d'un Ordre ſupérieur, quand celles d'un Ordre inférieur peuvent ſuffire. Je ne ſais cependant ſi cette Régle eſt abſolument la meilleure. Il ſemble que c'eſt moins la ſimplicité de l'équation que la facilité de la deſcription, qu'il faut chercher dans le choix des Lignes propres à conſtruire un Problème. On peut dire que chaque Problème a quelque Courbe propre à le réſoudre plus naturellement que toute autre Courbe, même d'un Ordre inférieur. D'ailleurs, une Courbe d'un Ordre aſſez élevé, mais dont l'équation n'a que peu de termes, ſera ordinairement plus aiſée à décrire, ſoit par points, ſoit au moyen de quelque Inſtrument, qu'une Courbe d'un Ordre plus bas, mais dont l'équation la plus réduite conſerve un grand nombre de termes. On voit même divers Exemples de Courbes faciles à décrire, quoique leur nature ne puiſſe s'exprimer que par des équations fort compoſées. Or, dans les conſtructions géométriques, ne doit-on pas préférer celles qui ſont les plus ſimples? Et les plus ſimples ne ſont-ce pas celles qui s'exécutent par les Courbes les plus aiſées à décrire? L'équation n'eſt proprement qu'un ſigne qui nous guide dans le Calcul; & au fonds, c'eſt la deſcription de la Courbe qui réſout le Problème. Qu'on y parvienne par un Calcul plus ou moins long, plus ou moins difficile, cela n'entre pour rien dans l'opération même qui conſtituë véritablement la Solution. L'équation $xx + yy = rr$ qui eſt la plus ſimple équation du Cercle [§. 7], eſt plus compoſée que celle-ci $xx = ay$, qui déſigne une autre Courbe du ſecond Ordre. On ne balancera pourtant pas à employer le Cercle pour conſtruire

Pl. V. une Egalité, plûtôt que la Courbe repréſentée par l'éq: $xx = ay$. Pourquoi cela; ſi ce n'eſt à cauſe de la facilité avec laquelle on trace une circonférence de Cercle; facilité qui fait qu'on aime mieux ſe ſervir du Cercle que de la Droite en pluſieurs rencontres : quoique la Droite ſoit du premier Ordre, & la circonférence de Cercle du ſecond *. Ch. IV. §. 55.

56. CELA étant, je ne vois pas pourquoi on rejetteroit la Conſtruction ſuivante d'une Egalité quelconque, par le moyen d'une Droite paralléle aux ordonnées, & d'une Courbe dont l'Ordre eſt, à la vérité, égal au dégré de l'Egalité propoſée, mais dont on peut déterminer tous les points par la Géométrie élémentaire †.

Toute Egalité ſe peut réduire à cette forme $a = by + cy^2 + dy^3 + ey^4$ &c. Qu'on décrive la Ligne dont l'équation eſt $x = by + cy^2 + dy^3 + ey^4$ &c, & de laquelle on peut trouver tous les points avec le Compas & la Régle.

Fig. 39. Car, prenant ſur la Ligne des ordonnées AB une ordonnée quelconque AQ [y], on trouvera by qui eſt à b comme y à 1 [1 eſt une Droite priſe à volonté pour ſervir d'unité], & cy^2 qui eſt à c en raiſon doublée de y a 1, & dy^3 qui eſt à d en raiſon triplée de y à 1, & ainſi de ſuite. Puis, menant QM paralléle à la Ligne AC des abſciſſes, & prenant ſur cette Droite la partie QM égale à $by + cy^2 + dy^3$ &c. le point M ſera un de ceux de la Courbe. Cette Courbe AdefM étant ainſi décrite par points, ou de quelqu'autre maniére, ſi l'on en peut trouver de plus commode; ſi l'on prend l'abſciſſe $AG = a$, ſes ordonnées GH, Gl, GK, GL, déterminées en menant par le

* Jac. BERNOULLI *Oper.* pag. 689. & ſuiv. NEWTON *Arithm. univerſ.* pag. 286. 287.

† Jac. BERN. *Oper.* pag. 690. Mr. DE L'HÔPITAL, *Sect. Conic.* pag. 348. STIRLING, *Linea tertii Ordinis* &c. pag. 59.

Ch. IV. §. 56. le point G la Droite GN paralléle à AB, ſeront les racines y de l'Egalité $a = by + cy^2 + dy^3 + ey^4$ &c. Pl. V.

Car, par la nature de la Courbe, le raport de chaque abſciſſe AP [x] à ſon ordonnée PM [y] eſt exprimée par l'éq: $x = by + cy^2 + dy^3$ &c. Donc l'abſciſſe AG étant a, le raport de AG [a] à l'ordonnée GH, GI, GK, où GL [y] eſt exprimé par l'Eg: $a = by + cy^2 + dy^3$ &c. Donc GH, GI, GK, GL ſont les valeurs d'y dans cette Egalité: elles ſont ſes racines.

51. NON-SEULEMENT cette conſtruction eſt ſimple & d'une pratique facile: elle eſt ſurtout utile pour déterminer les limites des Egalités, & le nombre de leurs racines réelles & de leurs racines imaginaires. On voit, par ex. dans la *Fig.* 39, que la Courbe a quatre branches Ad, de, ef, fM. C'eſt pourquoi l'ordonnée GN peut couper cette Courbe en quatre points H, I, K, L. Suppoſons qu'elle la coupe en autant de points, & menons par les ſommets d, e, f, les abſciſſes dΔ, eΞ, fΦ, qui coupent GN en ♪, ♦, φ; on voit que la prémiére racine GH terminée à la branche Ad, eſt plus petite que G♪ ou AΔ, & qu'ainſi elle tombe entre o & AΔ; que la ſeconde racine GI, qui ſe termine à la branche de, tombe entre G♪ & G♦, c'eſt-à-dire, entre AΔ & AΞ; que la troiſiéme racine GK, terminée à la branche ef, tombe entre G♦ & Gφ, ou entre AΞ & AΦ, & qu'enfin la quatriéme racine GL, terminée à la branche fM, tombe au-delà de Gφ, ou AΦ, c'eſt-à-dire entre AΦ & ∞ [l'infini]. De ſorte que o, AΔ, AΞ, AΦ, ∞ ſont des limites entre leſquelles tombent les quatre racines GH, GI, GK, GL.

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} & GH & & GI & & GK & & GL & \\ o & & A\Delta & & A\Xi & & A\Phi & & \infty \end{array} \right\}$$

En menant par les ſommets d, e, f, les ordonnées dD,

 eE, fF,

Pl. V. eE, fF, il eſt viſible, par l'inſpection de la Figure, 1°. que ſi la Droite *a*, à laquelle AG eſt priſe égale, ſe trouve plus petite que AD & plus grande que AE, l'ordonnée GN coupe les quatre branches de la Courbe, & que l'Egalité a quatre racines réelles : 2°. que ſi AG [*a*] eſt plus petite que AE, GH ne coupe que les deux branches Ad, fM, & que l'Egalité n'a que deux racines réelles, les deux moyennes qui devoient ſe terminer aux branches de, ef, étant devenuës imaginaires : 3°. que ſi AG [*a*] tombe entre AD & AF, l'ordonnée GN ne coupe que les branches ef, fM ; & il n'y a que les deux plus grandes racines de l'Egalité qui ſoient réelles, les deux plus petites, qui devoient ſe terminer aux branches Ad, & de étant imaginaires : 4°. enfin, que ſi AG [*a*] ſurpaſſe AF, la Droite GN n'atteint pas la Courbe & que toutes les racines de l'égalité ſont imaginaires. Ch. IV. §. 57.

Toutes ces déterminations dépendent des ordonnées dD, eE, fF, ou AΔ, AΞ, AΦ, & des abſciſſes AD, AE, AF des ſommets d, e, f. Ces abſciſſes & ces ordonnées ſe peuvent déterminer, en conſidérant que dD, eE, fF ſont les limites des branches Ad, de, ef, fM, & qu'elles ſéparent les ordonnées réelles des imaginaires. Donc chaque abſciſſe AD, AE, AF a une ordonnée double ou deux ordonnées égales [§. 17]. Ainſi on trouvera ces abſciſſes en cherchant les valeurs de x qui donnent à l'éq: $x = by + cy^2 + dy^3$ *&c.* ou $0 = -x + by + cy^2 + dy^3$ *&c.* des racines doubles, ou égales deux à deux. Mais la Régle de Mr. Hudde * nous aprend que quand une Egalité a des racines doubles, ſi on multiplie la ſuite bien ordonnée de ſes termes par une progreſſion arithmétique quel-

* Cette Régle ſe trouve parmi les Traités imprimés ordinairement à la ſuite de la *Géométrie de* Des Cartes. Pour éviter au Lecteur la peine d'y recourir, nous en avons joint la Démonſtration dans l'*Appendice N°.* 3.

Digitized by Google

Ch. IV. § 57. quelconque, le produit ſera une autre Egalité qui aura toutes les racines qui étoient doubles dans la propoſée, mais qui ne ſeront que ſimples dans l'Egalité réſultante. Par la comparaiſon de ces deux Egalités, on pourra déterminer les racines doubles qui ſont les ordonnées d D, e E, f F, & conſéquemment les abſciſſes AD, AE, AF. Pl. V.

58. Pour faire bien entendre ceci, il eſt néceſſaire d'y joindre quelque détail. Et comme les Egalités du premier dégré n'ont aucune difficulté, prenons-en d'abord une du ſecond, $a = by + cy^2$, ou plûtôt $(A) \ldots a = by + y^2$, puiſqu'il eſt ordinaire de réduire la plus haute puiſſance de l'inconnuë à n'avoir que l'unité pour coëfficient. La Courbe repréſentée par l'éq : $x = by + y^2$ étend deux branches à-l'infini du côté des abſciſſes poſitives. Car x étant priſe infinie, y le ſera auſſi, puiſque, ſans cela, $by + yy$ ne pourroit égaler x infinie. Mais y étant infinie & b finie, le terme yy ſurpaſſe infiniment le terme by, de ſorte qu'à l'infini l'équation de la Courbe ſe réduit à $x = yy$. Si on prend x poſitive, y a deux valeurs, $+\sqrt{x}$ poſitive & $-\sqrt{x}$ négative. Mais x étant priſe négative, les deux valeurs de y, qui ſont $+\sqrt{-x}$ & $-\sqrt{-x}$ ſont imaginaires. Donc la Courbe a deux branches infinies, du côté des abſciſſes poſitives, & n'en a point du côté des abſciſſes négatives. Sa forme eſt donc à peu près telle qu'on la voit dans la *Fig.* 40. Elle traverſe deux fois l'axe des ordonnées A B, ſçavoir, à l'origine A & au point B, extrémité de l'ordonnée A B $= -b$. Car la ſuppoſition de $x = 0$ donne $0 = by + yy$, qui a deux racines $y = 0$ & $y = -b$. Le point B tombe du côté négatif, ſi b eſt poſitive; du côté poſitif, ſi b eſt négative. *Fig.* 40. *num.* 1.

num. 2.

On voit dans cette *Figure*, qu'aux abſciſſes poſitives répondent deux ordonnées, l'une poſitive & l'autre négative;

Pl. V. ve, mais que les abſciſſes négatives ont deux ordonnées imaginaires, ſi l'abſciſſe ſurpaſſe AD; réelles, ſi l'abſciſſe eſt plus petite que AD; & dans ce dernier cas, négatives, ſi b eſt poſitive [$n°.1$], poſitives, ſi b eſt négative [$n°.2$]. Ch. IV. §. 58.

L'abſciſſe AD, qu'il eſt eſſentiel de connoître, eſt celle qui a une ordonnée double Dd. On la déterminera en multipliant l'éq : $o = -x + by + yy$ par une progreſſion arithmétique, telle que $o.1, 2$; ce qui donne $o = by + 2yy$, ou $o = b + 2y$, ſoit enfin $y = -\frac{1}{2}b$. Dd ou $A\Delta$ vaut donc $-\frac{1}{2}b$. Et au moyen des deux éq : $x = by + yy$, & $y = -\frac{1}{2}b$, on trouve $AD[x] = -\frac{1}{4}bb + \frac{1}{4}bb = -\frac{1}{4}bb$.

Puis donc qu'en prenant l'abſciſſe AG égale à a, les ordonnées GH, GI ſont les racines de l'Egalité (A) .. $a = by + yy$, on voit

1°. Que ſi a eſt poſitive, l'Egalité A a deux racines réelles, une poſitive & une négative, dont la plus grande eſt celle qui a le ſigne contraire à celui de b. Elles ſont égales, ſi $b = o$.

2°. Que ſi a eſt négative, mais plus petite que $-\frac{1}{4}bb$ [AD], l'Egalité A a encore deux racines réelles, de même ſigne, contraire à celui de b, & dont l'une eſt plus grande, l'autre plus petite que $-\frac{1}{2}b$ [Dd].

3°. Que ſi $a = -\frac{1}{4}bb$, l'Egalité A a deux racines égales, ou une racine double égale à $-\frac{1}{2}b$.

4°. Enfin que ſi a eſt plus négative que $-\frac{1}{4}bb$, les deux racines de A ſont imaginaires; & c'eſt ce qui arrive néceſſairement quand $b = o$, & $a < o$.

Cela étoit aſſez connu par la Réſolution ordinaire des Egalités du 2d. dégré. Et il eſt, ſans doute, plus à propos de réſoudre ces Egalités par le moyen du Cercle, que par la Courbe qu'on vient d'examiner. Mais on a crû qu'il n'étoit pas inutile d'appliquer le Principe du §. 57. à

ce

Ch. IV. §. 18. ce Cas ſimple. On en aura plus de facilité à comprendre l'application qu'on en peut faire aux dégrés ſupérieurs. Pl. V.

59. Soit maintenant l'Egalité $(B)\ldots a = by + cy^2 + y^3$ du 3e. dégré. La Courbe que repréſente l'éq: $x = by + cy^2 + y^3$ a deux Branches qui ſe jettent à l'infini de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Car x infinie donnant auſſi y infinie, l'équation de la Courbe à l'infini ſe réduit à $x = y^3$, parce que les termes by & cyy ſont infiniment plus petits que y^3, vis-à-vis duquel ils s'évanouïſſent. Cette éq: $x = y^3$ n'a qu'une racine réelle $y = \sqrt[3]{x}$, qui eſt poſitive quand x eſt poſitive, & négative quand x eſt négative.

La Courbe traverſe l'Axe des ordonnées en autant de points qu'a de racines l'Eg: $0 = by + cy^2 + y^3$, à quoi ſe réduit la propoſée B par la ſuppoſition de $x = 0$. Or cette Egal: $0 = by + cyy + y^3$ a une racine $y = 0$, qui marque que la Courbe paſſe par l'Origine: Ses deux autres racines ſont celles de l'Egal. $0 = b + cy + yy$, ou $-b = cy + yy$, qui peuvent être réelles ou imaginaires. Elles ſont réelles, ſi $-b$ eſt poſitive [§ *préc.* n°. 1], c'eſt-à-dire, ſi b eſt négative, & alors l'une a le ſigne $+$ & l'autre le ſigne $-$. Donc, en ce cas, la Courbe traverſe l'Axe des ordonnées deſſus & deſſous l'Origine A. Ces racines ſont auſſi réelles quand b eſt poſitive, pourvû qu'elle ne ſurpaſſe pas $\frac{1}{4}cc$ [§. *pr.* n°. 2], & alors elles ont toutes deux un même ſigne contraire à celui de c; de ſorte que c étant négative, la Courbe traverſe deux fois l'Axe des ordonnées au-deſſus de l'Origine, & c étant poſitive, la Courbe coupe deux fois l'Axe des ordonnées au-deſſous de l'Origine. Si b eſt égale à $\frac{1}{4}cc$, les deux racines ſont égales à $-\frac{1}{2}c$ [§. *pr.* n°. 3], & la Courbe, au lieu de couper l'Axe des ordonnées, le touche à l'extrémité de l'ordonnée $-\frac{1}{2}c$, c'eſt-à-dire, au-deſſus d'A, ſi c eſt négative, & au-

Fig. 41. *num.* 1. *num.* 2. *num.* 3. *num.* 4.

Pl. V. Fig. 41. num. 5. num. 6, 7. 8. 9. 10. au-deſſous d'A, ſi c eſt poſitive. Mais ſi $b > \frac{1}{4}cc$, les racines de l'Egal: $-b = cy + yy$ ſont imaginaires, & la Courbe ne rencontre l'Axe des ordonnées qu'à l'Origine. Ch. IV. §. 59.

Les ſommets d, e, ſe déterminent en multipliant les termes de l'éq : $o = -x + by + cyy + y^3$ par la progr. arithm : 0, 1, 2, 3; ce qui réduit cette équation à (H)... $o = by + 2cyy + 3y^3$, ou $-\frac{1}{3}b = \frac{2}{3}cy + yy$, dont les racines expriment les ordonnées dD, eE, des ſommets D, E. On aura leurs abſciſſes AD, AE, en cherchant x par le moyen des deux équations H, & $o = -x + by + cyy + y^3$, ce qui donne l'Egalité (I)... $27xx + 18bcx - 4c^3x + 4b^3 - bbcc = o$.

Il ſeroit aiſé de déterminer ces abſciſſes, & par là, les limites qui rendent réelles ou imaginaires les racines de B, en réſolvant l'Egal: I, qui n'eſt que du ſecond dégré. Mais, pour montrer comment il faut s'y prendre dans les Egalités des ordres ſupérieurs, nous n'eſſayerons pas de réſoudre cette Egal. I: nous ſuppoſerons ſeulement qu'on ſait, au moyen des Remarques du §. préc. diſcerner par les coëfficients de cette Egalité, ſi ces racines ſont imaginaires ou réelles, & dans ce dernier cas, ſi elles ſont toutes deux poſitives ou toutes deux négatives, ou l'une poſitive & l'autre négative.

Pour cet effet, on donnera à l'Egal: I cette forme $\frac{bbcc - 4b^3}{27} = \frac{18bc - 4c^3}{27}x + xx$, ſous laquelle on voit [§. *préc.* n°. 4] que ſes deux racines ſont imaginaires, lorſque $\frac{bbcc - 4b^3}{27}$ eſt plus négative que $-\frac{1}{4}(\frac{18bc - 4c^3}{27})^2$, c'eſt-à-dire, lorſque $108b^3 - 27bbcc > 81bbcc - 36bc^4 + 4c^6$, ou $108b^3 - 108bbcc + 36bc^4 - 4c^6 > o$, ce qui, diviſant par 4 & tirant la racine cubique, ſe réduit à $3b - cc > o$. Ainſi

1°. Quand

Ch. IV. §. 19. 1°. Quand $b > \frac{1}{3}cc$, il y a deux racines de l'Egal. *B* qui ſont imaginaires, parce que les abſciſſes AD, AE, les ſommets d, e, & la branche ed qui s'y termine étant imaginaires, la Courbe a, à peu près, la forme qu'on voit au *n°.* 10 de la *Fig.* 41, & qu'elle ne peut être coupée qu'en un ſeul point par l'ordonnée GH. On trouveroit la même choſe, en conſidérant que les ſommets d, e ſont imaginaires quand leurs ordonnées Dd, Ee, ſont imaginaires. Car ces ordonnées ſont les racines de l'Egal. *H*... $-\frac{1}{3}b = \frac{1}{3}cy + yy$, qui ſont imaginaires [§. *pr. n°.* 4] quand $-\frac{1}{3}b$ eſt plus négative que $-\frac{1}{4}(\frac{2}{3}c)^2 = -\frac{1}{3}cc$, c'eſt-à-dire, quand $b > \frac{1}{3}cc$. Pl. V.

2°. Si $b = \frac{1}{3}cc$, alors $\frac{bbcc - 4b^3}{27} = -\frac{1}{4}(\frac{18bc - 4c^3}{27})^2$, & les racines AD, AE de l'Eg. *I* ſont égales entr'elles & à $-\frac{1}{2}(\frac{18bc - 4c^3}{27}) = -\frac{1}{27}c^3$ [§. *pr. n°.* 3]. De même $-\frac{1}{3}b = -\frac{1}{4}(\frac{2}{3}c)^2$, & les racines Dd, Ee de l'Eg. *H* ſont égales entr'elles & à $-\frac{1}{2}(\frac{2}{3}c) = -\frac{1}{3}c$. Dans ce cas, les deux ſommets d, e, ſont réunis en un point, auquel ſe réduit la branche ed. Ce point a ſon abſciſſe AD égale à $-\frac{1}{27}c^3$ & ſon ordonnée Dd égale à $-\frac{1}{3}c$. *Fig.* 41. *n.* 8. & 9.

Donc, ſi AG [*a*] eſt plus grande ou plus petite que AD [$-\frac{1}{27}c^3$], GH ne coupe la Courbe qu'en un point; l'Eg. *B* n'a qu'une racine réelle.

Si AG [*a*] eſt égale à AD [$-\frac{1}{27}c^3$], GH paſſera par le point e ou d, & eſt cenſée y rencontrer trois fois la Courbe: ſi bien que l'Eg. *B* réduite à $-\frac{1}{27}c^3 = \frac{1}{3}cc\,y + cyy + y^3$, ou $y^3 + cyy + \frac{1}{3}ccy + \frac{1}{27}c^3 = 0$, a trois racines égales entr'elles & à $-\frac{1}{3}c$ [Dd]. En effet $y^3 + cyy + \frac{1}{3}cc\,y + \frac{1}{27}c^3 = 0$ n'eſt autre choſe que le Cube de l'Egal: $y + \frac{1}{3}c = 0$, ou $y = -\frac{1}{3}c$.

3°. Si $b < \frac{1}{3}cc$, la Courbe a trois branches, & l'Eg. *B* peut avoir trois racines réelles. Mais il faut pour cela que

Pl. V. AG [a] tombe entre AD & AE, qui ſont les racines de l'Eg. *I*. Nommant ces racines R & r, il faut que des deux grandeurs $R - a$, $r - a$, l'une ſoit poſitive & l'autre négative. Or, pour juger quand cela arrive, on transformera l'Eg. *I* en diminuant ſes racines de la grandeur a, c'eſt-à-dire, en ſubſtituant z à $x - a$, ou $z + a$ à x. La transformée eſt $27zz + 54az + 27aa + 18bcz + 18abc - 4c^3z - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc = 0$, ou $-\frac{27aa+18abc-4ac^3+4b^3-bbcc}{27} = \frac{54a+18bc-4c^3}{27}z + zz$, dont les racines ont des ſignes oppoſés [§. *préc. n°.* 1.] quand le premier membre eſt poſitif, c'eſt-à-dire, quand $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc$ eſt négative. Cette grandeur, que nous nommerons *K*, eſt juſtement le premier membre de l'Eg. *I*, transformé par le changement d'x en a. Si cette grandeur *K* eſt zéro, une des racines z, c'eſt-à dire, $R - a$, ou $r - a$ eſt auſſi zéro, le point G tombe ſur D ou ſur E. Mais ſi *K* eſt poſitive, les deux racines $R - a$, $r - a$ ont le même ſigne, AG eſt ou plus grande, ou plus petite que AD & que AE, le point G tombe hors des limites D, E. Donc b étant $< \frac{1}{3}cc$,

Ch. IV. §. 59.

Fig. 41. n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.

1) Si $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc > 0$, l'Egal: *B* a deux racines imaginaires, & une réelle, parce que G tombant hors des limites E, D, l'ordonnée GH ne coupe la Courbe qu'en un point.

2) Si $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc = 0$, G tombe ſur D ou ſur E, & l'ordonnée GH touche la Courbe en d ou e, & la coupe en un autre point. L'Egal: *B* a donc deux racines égales & une inégale. La valeur des racines égales, qui eſt Dd, ou Ee, ſe détermine au moyen des deux Egal: *B* & *H*; elle eſt $\frac{9a+bc}{6b-2cc}$: & la racine inéga-

Ch. IV. §. 39. inégale eſt $(\frac{6b-2cc}{9a+bc})^2 a$. Pl. V.

3) Si $27aa+18abc-4ac^3+4b^3-bbcc<0$, G tombant entre D & E, l'ordonnée GH coupe la Courbe en trois points, & l'Eg: B a trois racines réelles.

Après avoir reconnu ſi les racines de B ſont réelles ou imaginaires, on s'aſſurera aiſément ſi elles ſont poſitives ou négatives.

Car l'Eg: B a eſſentiellement une racine du même ſigne que le terme a [AG]. Puiſque dans l'éq: $x=by+cyy+y^3$, x ne monte qu'au prémier dégré, la Courbe ne rencontre l'Axe des abſciſſes qu'à l'Origine A [§. 41], d'où elle pouſſe deux Branches infinies de part & d'autre. Ainſi chaque abſciſſe AG [a], poſitive ou négative, aura toûjours une ordonnée GH [y] de même ſigne. Donc

1°. Si l'Eg: B n'a qu'une ſeule racine réelle, on connoît quel eſt ſon ſigne par celui du terme a. Il en eſt de même ſi B a trois racines égales; ce qu'on peut regarder comme n'avoir qu'une racine, mais triple.

Quand les deux autres racines de B ſont réelles, elles ont un même ſigne, qui eſt celui de l'ordonnée Dd, ou de l'ordonnée Ee. Autrement, il faudroit que la Courbe coupât l'Axe des abſciſſes ailleurs qu'en A. Donc

2°. Si Dd & Ee ont un même ſigne, ce ſera auſſi le ſigne de deux racines de l'Eg. B. Or Dd & Ee qui ſont les racines de l'Eg. $H\ldots -\frac{1}{3}b=\frac{2}{3}cy+yy$, ont un même ſigne [§. *pr.* n°. 2] quand $-\frac{1}{3}b$ eſt négative mais moins que $-\frac{1}{4}(\frac{2}{3}c)^2=-\frac{1}{9}cc$, c'eſt-à-dire, quand $b<\frac{1}{3}cc$. Leur ſigne eſt contraire à celui de $\frac{2}{3}c$, ou de c. Donc, quand B a trois racines réelles, b étant poſitive [& il faut pour cela que $b<\frac{1}{3}cc$, ſans quoi deux racines de B ſeroient imaginaires], cette Egalité a une racine de même ſigne qu'a, & deux racines d'un ſigne contraire à celui de c. *Fig.* 41. n. 2. 3. 4. §. 6. 7.

Pl. V. Mais 3°. ſi B a trois racines réelles, b étant négative, elle a une racine de même ſigne que a, & les deux autres d'un ſigne contraire. Ce cas eſt celui de la *Fig.* 41. *n°.* 1, où AG [a] poſitive donne une racine poſitive GH & deux négatives GI, GK, & au contraire AG [a] négative donne deux racines poſitives & une négative. Ce qui s'acorde très-bien avec la Régle de Des Cartes, pour connoître le nombre des racines poſitives & des négatives par le nombre des changemens & des ſucceſſions des ſignes de ſes termes. Ch. IV. §. 19.

On aura tout ceci devant les yeux dans la Table ſuivante.

I. $b > \frac{1}{3}cc$, donne deux Racines imaginaires, & une réelle de même ſigne qu'a.

II. $b = \frac{1}{3}cc$, donne

1°. Si $a >$ ou $< -\frac{1}{27}c^3$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même ſigne qu'a.

2°. Si $a = -\frac{1}{27}c^3$, trois Rac. réelles égales à $-\frac{1}{3}c$.

III. b poſitive & $< \frac{1}{3}cc$, donne, en faiſant $27aa + 18abc - 4ac^3 + 4b^3 - bbcc = K$,

1°. Si $K > 0$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même ſigne qu'a.

2°. Si $K = 0$, deux Rac: égales à $\frac{9a + bc}{6b - 2cc}$, & une égale à $(\frac{6b - 2cc}{9a + bc})^2 a$.

3°. Si $K < 0$, trois Rac: réelles, une de même ſigne qu'a, & deux d'un ſigne contraire à celui de c.

IV. $b = 0$, donne, puiſqu'en ce cas, $K = 27aa - 4ac^3$,

1°. Si $27aa > 4ac^3$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même ſigne qu'a.

2°. Si $27aa = 4ac^3$, ou $a = \frac{4}{27}c^3$, deux Rac. égales à $-\frac{1}{3}c$, & une égale à $\frac{1}{3}c$.

3°. Si

CH. IV. § 59. 3°. Si $27aa < 4ac^3$, trois Racines réelles, une de même ſigne qu'a, & deux de ſigne contraire. PL. V.

V. b négative donne

1°. Si $K > 0$, deux Rac. imaginaires, & une réelle de même ſigne qu'a.

2°. Si $K = 0$, deux Rac. égales à $\frac{9a+bc}{6b-2cc}$, & une égale à $(\frac{6b-2cc}{9a+bc})^2 a$.

3°. Si $K < 0$, trois Rac. réelles, une de même ſigne qu'a, & deux de ſigne contraire.

Il eſt facile de réduire une Egalité du troiſiéme dégré, $a = by + cyy + y^3$, à n'avoir point de ſecond terme, & à paroître ſous cette forme $\alpha = \beta u + u^3$. Il ne faut pour cela que ſubſtituer $u - \frac{1}{3}c$ à y. Alors il ne s'agit que de voir ſi $27\alpha\alpha + 4\beta^3$ eſt poſitive, zéro, ou négative. Si elle eſt poſitive, ce qui ne peut manquer d'être quand β eſt poſitive ou zéro; l'Egalité n'a qu'une Racine réelle de même ſigne que α. Si $27\alpha\alpha + 4\beta^3$ eſt zéro ; l'Egalité a deux racines égales à $\frac{3\alpha}{2\beta}$, & une troiſiéme égale à $-3\frac{\alpha}{\beta}$. Si $27\alpha\alpha + 4\beta^3$ eſt négative ; l'Egalité a trois racines réelles, une du même ſigne que α, & deux du ſigne contraire.

60. POUR dire auſſi quelque choſe des Egalités du quatriéme dégré, ſoit $(C) \ldots a = by + cy^2 + * + y^4$, où pour abréger le Calcul, nous ſuppoſons qu'on ait fait diſparoître le ſecond terme. L'éq : $(L) \ldots x = by + cy^2 + y^4$ répréſente une Courbe à deux Branches, qui s'étendent à l'infini du côté des abſciſſes poſitives. Car à l'infini, ſon équation eſt $x = y^4$, qui a quatre racines $+\sqrt{+}\sqrt{x}$, $-\sqrt{+}\sqrt{x}$, $+\sqrt{-}\sqrt{x}$, $-\sqrt{-}\sqrt{x}$, qui ſont Fig. 42.

toutes

Pl. V. toutes imaginaires quand x eſt négative, & dont les deux derniéres le ſont auſſi, même quand x eſt poſitive. Alors les deux prémiéres ſont réelles, & montrent qu'une abſciſſe infinie poſitive a deux ordonnées infinies, l'une poſitive, l'autre négative. La Courbe a donc, du côté des abſciſſes poſitives, deux Branches infinies, l'une ſupérieure, l'autre inférieure à l'Axe des abſciſſes. Mais elles peuvent ſerpenter près de l'Origine, de maniére qu'on comptera quatre branches. Pour en déterminer, en gros, le contour, voyons d'abord en quels points la Courbe rencontre l'Axe des ordonnées : car pour celui des abſciſſes, il eſt certain qu'elle ne le rencontre qu'en A, puiſque dans l'éq : L, x ne monte qu'au premier dégré [§. 41]. Ch. IV. §. 60.

Si dans cette éq: L, on fait $x = 0$, elle ſe réduit à $0 = by + cy^3 + y^4$, ou $(M) \ldots . - b = cy + y^3$, qui peut avoir trois racines réelles, ou deux imaginaires & une réelle. Elle a trois racines réelles quand $27bb + 4c^3$ eſt négative [§. *préc.*]. Alors la Courbe rencontre l'Axe des ordonnées en trois points, ſans compter l'Origine. De ces trois racines, une a le même ſigne que $-b$, les deux autres ont un ſigne contraire. Donc, b étant poſitive, la Courbe coupe deux fois ſon Axe au-deſſus de l'Origine & une fois au-deſſous : mais b étant négative, elle coupe l'Axe une fois au-deſſus & deux fois au-deſſous de l'Origine. Si $27bb + 4c^3 = 0$, l'Egal : M a deux racines égales à $-\frac{3b}{2c}$, & une troiſiéme égale à $\frac{3b}{c}$. Dans ce cas, la Courbe touche ſon Axe d'un côté, & le coupe de l'autre à une diſtance double. Enfin, ſi $27bb + 4c^3$ eſt poſitive, M n'a qu'une ſeule racine réelle de même ſigne que $-b$. Ainſi la Courbe ne coupe ſon Axe qu'en un point ; au-deſſous de l'Origine, ſi b eſt poſitive ; au-deſſus, ſi b eſt négative.

Fig. 42. *num.* 1. *num.* 2. *n.* 3. & 4. *n.* 5. & 7. *n.* 6. & 8.

Il

CH. IV. §. 60. Il faut maintenant déterminer les ſommets d, e, f. On multipliera donc l'éq : $(L) \ldots o = -x + by + cyy * + y^4$ par la progr. arithm : 0, 1, 2, 3, 4, ce qui la transforme en $o = by + 2cyy * + 4y^4$, ou $(N) -\frac{1}{4}b = \frac{1}{2}cy * + y^4$, dont les racines ſont les ordonnées dD, eE, fF des ſommets. Ainſi deux de ces ſommets, par exemple, d & e, & par conſéquent deux branches ed, df de la Courbe deviennent imaginaires, quand deux racines de l'Egal. *N* ſont imaginaires, c'eſt-à-dire, quand $\frac{1}{2}c$, ou c, & $27(\frac{1}{4}b)^2 + 4(\frac{1}{2}c)^3 = \frac{27bb+8c^3}{16}$, ou $27bb+8c^3$ ſont poſitives [§. *prec.*]. C'eſt le Cas repréſenté aux *n°.* 7 & 8 de la *Fig.* 42, & alors la racine réelle fF eſt du même ſigne que $-\frac{1}{4}b$, c'eſt-à-dire, négative quand b eſt poſitive, & poſitive quand b eſt négative. PL. V. *Fig.* 42. *num.* 7. *num.* 8.

Qu'au moyen des éq : *L* & *N*, on élimine y, on aura $(O) \ldots 64x^3 + 32ccxx + 36bbcx + 4c^4x + \frac{17}{4}b^4 + bbc^3 = o$, dont les racines R, r, ρ ſont les abſciſſes AD, AE, AF des ſommets d, e, f. Ces abſciſſes ſont les limites des valeurs de a [AG] qui donnent à l'Eg : *C* des racines réelles ou imaginaires. Car ſi G tombe du côté négatif au-delà de F, l'Eg : *C* n'aura que des racines imaginaires : Si G tombe entre F & E, l'Eg : *C* aura deux racines réelles & deux racines imaginaires : Si G tombe entre E & D, l'Eg : *C* aura quatre racines réelles. Mais elle n'en aura plus que deux, ſi G tombe au-delà de D du côté poſitif.

Donc, ſi R eſt la plus grande AD, r la moyenne AE, & ρ la plus petite AF des racines de *O*, l'Eg : *C* n'aura que des racines imaginaires, ſi $R - a$, $r - a$, & $\rho - a$ ſont poſitives : Elle aura deux racines réelles & deux imaginaires, ſi $R - a$ & $r - a$ ſont poſitives, & $\rho - a$ négatuve, ou ſi $R - a$, $r - a$, & $\rho - a$ ſont négatives : Enfin, elle aura ſes quatres racines réelles, ſi $R - a$ eſt

PL. V. positive, mais $r - a$, & $\rho - a$ négatives. Donc substituant, dans l'Eg: O, z au lieu de $x - a$; ou $z + a$ au lieu d'x, l'Egal: C aura quatre racines imaginaires, si toutes les racines z de la transformée sont positives: elle aura deux racines réelles & deux imaginaires, si une ou trois racines z sont négatives: & elle aura ses quatre racines réelles, si la transformée a deux racines z négatives & une positive. CH. IV. §. 60.

Par la substitution de $z + a$ à x, l'Eg: O se transforme en $64z^4 + (192a + 32cc)zz + (192aa + 64acc + 36bbc + 4c^4)z + 64a^4 + 32aacc + 36abbc + 4ac^4 + \frac{27}{4}b^4 + bbc^3 = 0$, ou $-a^4 - \frac{1}{2}aacc - \frac{9abbc + ac^4}{16} - \frac{\frac{27}{4}b^4 + bbc^3}{64} = (3aa + acc + \frac{9bbc + c^4}{16})z + (3a + \frac{1}{2}cc)zz + z^3$, que pour abréger, nous écrirons ainsi $(P) \ldots \alpha = \beta z + \gamma zz + z^3$.

Supposons d'abord que cette Egal: P a ses trois racines réelles; & si β est positive, elle a [§. *préc.*] une racine du même signe que α & deux racines d'un signe contraire à γ. Mais si β est négative, P a une racine du même signe que α & deux racines d'un signe contraire. Donc, P ayant ses trois racines réelles, si α & β sont positives, & γ négative, les trois racines de P sont positives, & celles de l'Eg: C sont imaginaires: si α est négative mais β & γ positives, les racines de P sont toutes négatives, & C en a deux réelles & deux imaginaires: ce qui arrive aussi lorsque P a deux racines positives & une négative, c'est-à-dire, quand α & β sont négatives, ou quand α est négative, β positive, & γ négative: enfin si α est positive & β négative, ou si α, β, & γ sont positives, P a deux racines positives & une négative, ce qui marque que les quatre racines de C sont réelles. Pour récapituler, α négative

CH. IV. §. 60. gative donne deux racines réelles & deux imaginaires : Et PL. V. α positive donne quatre racines imaginaires, si β est positive & γ négative : mais elle en donne quatre réelles, si β est négative, ou si β & γ sont positives.

Mais si l'Eg : P a deux racines imaginaires, les abscisses AD, AE des sommets d, e deviennent imaginaires, & la Courbe ne conserve que le sommet f. Les ordonnées dD, eE sont donc aussi imaginaires, & nous avons déja vû que cela arrive, quand c, ou quand $27bb + 8c^3$ sont positives. Alors l'Egal : C ne peut avoir que deux racines réelles. Elles seront même toutes quatre imaginaires si α est plus négative que la seule racine R [AF] de l'Egal : O, si $R - \alpha$ est positive. Or cette racine de l'Egal : P a le même signe que le terme α. Donc si deux racines de P sont imaginaires ; α négative donne à C deux racines réelles, mais α positive rend les quatre racines de C imaginaires. *Fig.* 42. n. 7. & 8.

Pour connoître quels sont les signes des racines de C, on verra d'abord en jettant les yeux sur la *Fig.* 42, que quand ses quatre racines sont réelles, α étant négative, il y en a deux positives & deux négatives : mais α étant positive, on a trois racines positives & une négative, si b est positive, & au contraire trois racines négatives & une positive, si b est négative. Ce qui s'accorde avec la Régle de DES CARTES, puisque, dans le cas des quatre racines réelles, c doit être négative. n. 1. & 2. n. 1. 3. 5. n. 2. 4. 6.

Mais quand C n'a que deux racines réelles, on voit que α positive suppose nécessairement une racine positive & une négative : & que α négative donne deux racines négatives, si b est positive, & deux racines positives, si b est négative. n. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. n. 1. 3 5. 7. n. 2. 4. 6. 8.

On pourroit, en suivant les mêmes principes, passer aux Egalités du cinquiéme dégré. Mais le calcul de l'Egalité générale seroit fort long. Il est plus traitable dans

igitized by Google

Pl. VI. les cas particuliers. D'ailleurs cette ſpéculation nous a déjà retenu peut-être trop long-tems. Il eſt tems de paſſer à d'autres recherches qui ont un raport plus immédiat à l'Analyſe des Courbes. Ch. IV. §. 60.

CHAPITRE V.

Valeur du produit de toutes les ordonnées d'une même abſciſſe.

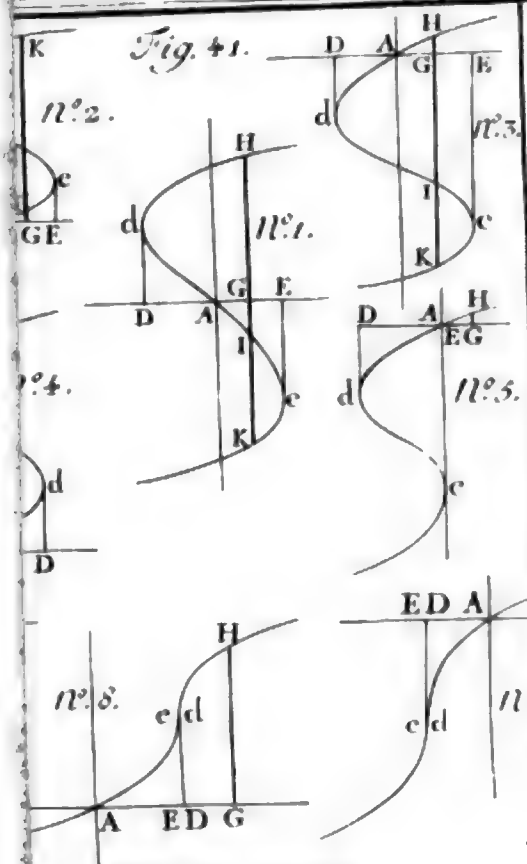
61. NOTRE deſſein eſt de faire voir comment l'Analyſe découvre dans l'équation d'une Courbe ſes principales propriétés. Voici un Théoréme fort général, & qui peut ſervir utilement dans cette recherche *.

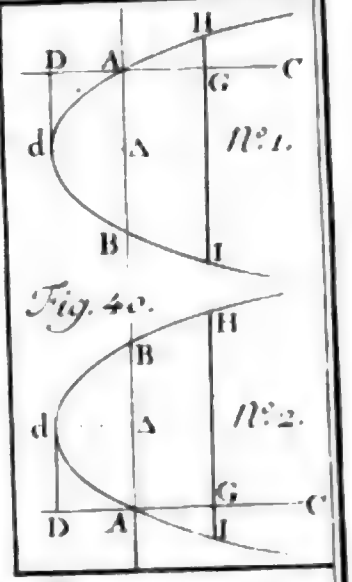
Fig. 43. Une Courbe QMSLRN de l'ordre v étant repréſentée par une équation, dont le premier terme, lorſqu'elle eſt ordonnée par y, ſoit $(\alpha x^{s} + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \&c.)\, y^{v-s}$, & le dernier $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1} + Cx^{v-t-2}$ &c. Je dis que l'Axe des abſciſſes AP coupant la Courbe aux points Q, R, S, &c. ſi on prend dès l'origine A les parties AT, AV, AX &c. égales aux racines de l'éq: $\alpha x^{s} + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2} + \&c. = 0$, & qu'on méne une ordonnée quelconque LN qui rencontre la Courbe en L, M, N &c. le produit des ordonnées PL, PM, PN &c. de l'abſciſſe AP ſera à la fraction $\frac{PQ \times PR \times PS \text{ \&c.}}{PT \times PV \times PX \text{ \&c.}}$ en raiſon donnée de A à α, c'eſt-à-dire,

* NEWTONI *Enumer. linear. 3i. ordinis.* §. II. 3. 4. STIRLING, *Linea tertii ordinis* Newtonianæ, pag. 76–79. Mr. DE GUA, *Uſage de l'Anal.* pag. 68.

Digitized by Google

Fig. 41.


K
n°2.
c
G E
H
d
n°1.
G
E
D
A
I
K
D A H
G
E
d
n°3.
I
c
K
D A H
E G
d
n°5.
c
n°4.
d
D


H
D A
G
C
d
A
n°1.
B
I
Fig. 40.
H
B
d
A
n°2.
G
C
D A
I

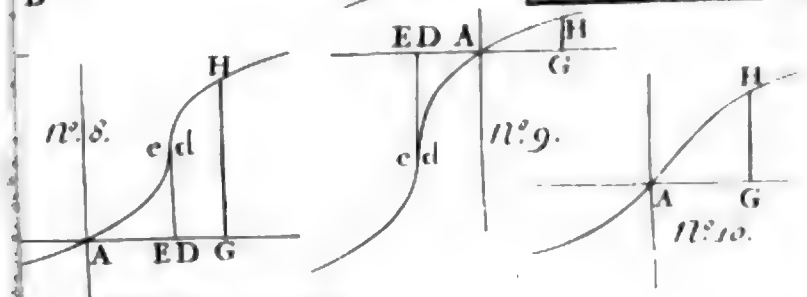
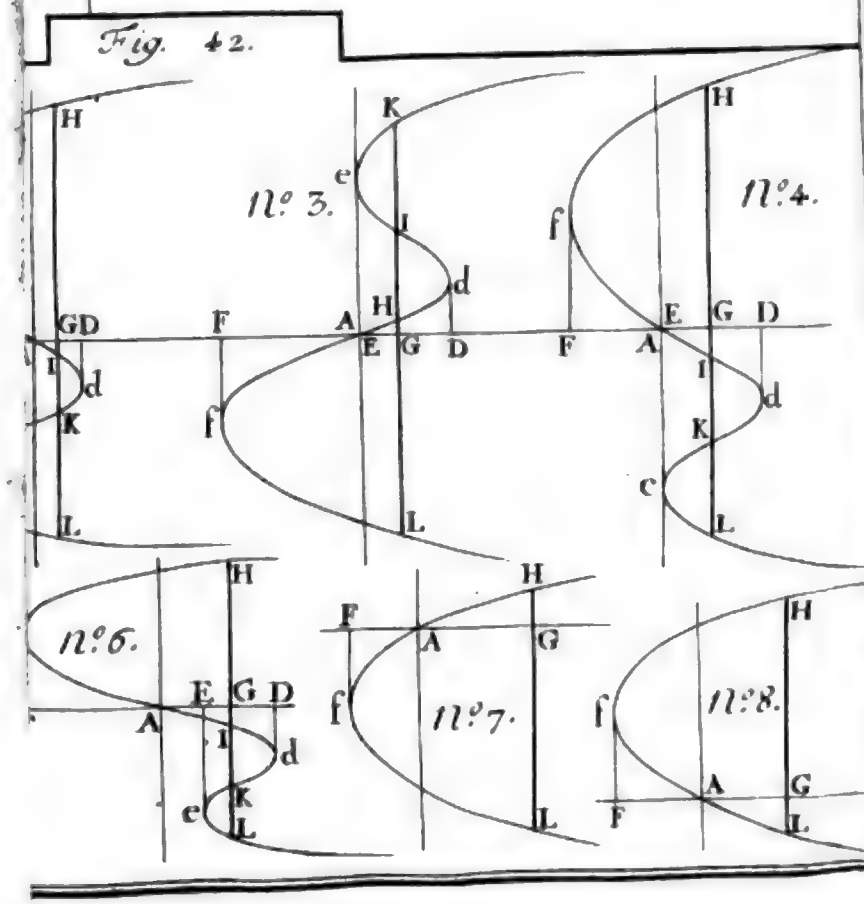

H
n°8.
e d
A E D G
E D A
H
G
c d
n°9.
H
A
G
n°10.

Fig. 42.


H
K
n° 3.
e
I
d
G D
F
A
H
E G D
L
d
K
f
L
H
n°4.
f
E
G D
F
A
I
d
K
c
L
n°6.
H
E G D
A
I
d
e
K
L
F
H
A
G
f
n°7.
L
H
n°8.
f
A
G
F
L

Digitized by Google

CH. V. §. 61. dire, comme le coëfficient de la plus haute puiſſance de x dans le dernier terme, au coëfficient de la plus haute puiſſance de x dans le premier terme. PL. VI.

Démonſtration. Si l'on diviſe l'équation de la Courbe par le coëfficient $\alpha x^s + \beta x^{s-1} + \gamma x^{s-2}$ &c, pour lui donner cette forme $y^{v-s} \ldots + \frac{Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}}{\alpha x^s + \beta x^{s-1}}$ &c. $= 0$, où le premier terme y^{v-s} n'a point d'autre coëfficient que l'unité, le produit de toutes les racines de cette équation, c'eſt-à-dire le produit PL×PM×PN &c. des ordonnées, eſt égal au dernier terme $\frac{Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}}{\alpha x^s + \beta x^{s-1}}$ &c

Or le numérateur de cette fraction eſt égal à A×PQ× PS×PT, &c, & le dénominateur à α×PT×PV×PX &c.

Car les points Q, R, S, &c. où une Courbe rencontre ſon Axe des abſciſſes, ſe déterminent en faiſant $y = 0$ dans ſon équation [§. 15]. Mais cette ſuppoſition de $y = 0$ réduit l'équation à ſon dernier terme $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}$ &c $= 0$, & les racines de cette équation ſont les abſciſſes AQ, AR, AS, &c. qui ont quelque ordonnée égale à zéro. Diviſant donc cette équation par A, afin que le premier terme ſoit pur; $x^{v-t} + \frac{B}{A}x^{v-t-1}$ &c. ſera le produit de $(x - AQ)$ par $(x - AR)$ par $(x - AS)$ &c. c'eſt-à-dire, de (AP — AQ) par (A'P — AR) par (AP — AS) &c. ou de PQ par PR par PS &c. Donc multipliant le tout par A, $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}$ &c. eſt égal au produit A×PQ×PR×PS &c.

De même, puiſque AT, AV, AX &c. ſont les racines

Pl. VI. de l'éq : $\alpha x^{s} + \beta x^{s-1}$ &c. $= 0$, ou, diviſant par α, de $x^{s} + \frac{\beta}{\alpha} x^{s-1}$ &c. $= 0$; le premier membre $x^{s} + \frac{\beta}{\alpha} x^{s-1}$ &c. eſt le produit de $(x - AT)$ par $(x - AV)$ par $(x - AX)$ &c, c'eſt-à-dire, de $(AP - AT)$ par $(AP - AV)$ par $(AP - AX)$ &c, ou de PT par PV par PX &c. Donc multipliant par α, $\alpha x^{s} + \beta x^{s-1}$ &c. eſt égal à $\alpha \times PT \times PV \times PX$ &c. Ch. V. §. 61;

Ainſi, puiſque $PL \times PM \times PN$ &c. eſt égal à $\frac{Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}\ \&c}{\alpha x^{s} + \beta x^{s-1}\ \&c}$; que $Ax^{v-t} + Bx^{v-t-1}$ &c eſt égal à $A \times PQ \times PR \times PS$ &c; & que $\alpha x^{s} + \beta x^{s-1}$ &c. eſt égal à $\alpha \times PT \times PV \times PX$ &c; il ſuit que $PL \times PM \times PN$ &c. eſt égal à $\frac{A \times PQ \times PR \times PS\ \&c}{\alpha \times PT \times PV \times PX\ \&c}$; ou que $PL \times PM \times PN$ &c. eſt à $\frac{PQ \times PR \times PS\ \&c}{PT \times PV \times PX\ \&c}$, comme A à α.

L'application de ce Théoréme aux divers cas qu'il renferme en fera voir la fécondité.

62. SOIT $ayy + (bx + cc)y + dxx + eex + f' = 0$, l'équation générale des Lignes du troiſiéme Ordre.

Fig. 44. I. 1. L'abſciſſe AP & l'ordonnée PL ne peuvent couper la Courbe chacune qu'en deux points, Q, R & L, M [§. 41]. Alors, par le Théoréme préced. le rectangle $PL \times PM$ des ordonnées eſt au rectangle $PQ \times PR$ des parties de l'abſciſſe, en raiſon donnée de d à α, puiſqu'ici $d = A$ & $\alpha = \alpha$.

Par la même raiſon, ſi l'on méne une autre ordonnée lpm, le rectangle $pl \times pm$ eſt au rect : $pQ \times pR$, comme d à α, ou comme le rect : $PL \times PM$ au rect : $PQ \times PR$.

On

CH. V. §. 62. PL. VI.

On peut regarder lm comme l'Axe des abſciſſes, & menant qr paralléle à QR, qui coupe lm en p, on aura $pl \times pm$ à $pq \times pr$ comme $pl \times pm$ à $pQ \times pR$.

Donc enfin $pl \times pm$ eſt à $pq \times pr$ comme $PL \times PM$ à $PQ \times PR$.

Ce qui revient à dire, que ſi on méne par un point p deux droites lm, qr paralléles à deux autres droites LM, QR menées par un point P, & que ces quatre droites coupent chacune en deux points une Ligne du ſecond Ordre ; le rectangle lpm des parties de la prémiére droite eſt au rectangle qpr des parties de la ſeconde droite, comme le rectangle LPM des parties de la troiſiéme eſt au rectangle QPR des parties de la quatriéme.

2. Si l'abſciſſe ap, au lieu de couper la Courbe en deux points, la touche en un ſeul q ; on doit concevoir qu'en ce ſeul point de contact q ſont réünis & confondus les deux points de ſection q, r ; en ſorte que les deux parties pq, pr étant devenuës égales, leur produit eſt un quarré pq^2, auquel le rect : LpM des ordonnées eſt en raiſon donnée de d à a. Fig. 45.

De même, ſi on méne l'ordonnée pl qui touche la Courbe en l, on concevra réünis en ce point les deux points de ſection L, M, & le rectangle LpM eſt devenu un quarré pl^2, qui eſt au quarré pq^2 en raiſon donnée de d à a.

3. S'il arrive que l'éq : $dxx + eex + f^3 = 0$ n'ait que des racines imaginaires, la Ligne des abſciſſes $a\pi$ ne rencontre point la Courbe, les points de ſection Q, R, qui ſeroient déterminés par cette équation [§. 15] étant imaginaires. Le Théoréme ne laiſſe pourtant pas de ſe ſoutenir. Car il eſt toujours vrai que le rect : $\pi L \times \pi M$ des ordonnées eſt égal à $\frac{dxx + eex + f^3}{a}$, ou $\frac{d}{a}(xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d})$. Mais

cette

Pl. VI. cette quantité $xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}$ ne ſera plus un rectangle QPR, qui ſeroit la différence de deux quarrés KQ² & KP² [en diviſant QR par le milieu en K]. Elle ſera la ſomme de deux quarrés, $(x + \frac{ee}{2d})^2$ & $(\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd})$. Qu'on prenne donc, dès l'Origine α, une abſciſſe αB égale à $-\frac{ee}{2d}$; qu'on éléve la perpendiculaire indéfinie BC, & qu'on la coupe en C par le Cercle décrit du centre α avec un raïon $\alpha C = \sqrt{\frac{f^3}{d}}$; ce qui donne $BC = \sqrt{(\alpha C^2 - \alpha B^2)} = \sqrt{(\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd})}$, & on aura $\pi C^2 = \pi B^2 + BC^2 = (x + \frac{ee}{2d})^2 + (\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd}) = xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}$. Donc, puiſque le rect: $\pi L \times \pi M$ eſt $= \frac{d}{a}(xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d})$, ce rect: $L\pi M$ eſt au quarré πC^2 en raiſon donnée de d à a. Ch. V. §. 62.

II. Tout le reſte ſubſiſtant, ſi la grandeur f eſt égale à zéro, l'éq: $dxx + eex = 0$, faite en égalant le dernier terme à zéro, aura une racine $x = 0$. L'Origine tombe donc ſur un des deux points Q, R de la Courbe. Ce qui ne change rien aux Concluſions précédentes.

III. Mais ſi c'eſt e qui eſt $= 0$, l'éq: $dxx + f^3 = 0$ a deux racines réelles, ſi d & f ont différents ſignes, & deux racines imaginaires ſi d & f ont le même ſigne. Dans le premier cas, l'Origine eſt au point K qui diviſe QR en deux également. Dans le ſecond, l'abſciſſe $\alpha\pi$ ne rencontre point la Courbe, & c'eſt le Cas du n°. I. 3 : mais au lieu du point C il faut prendre le point D, ſur la perpendiculaire αD, éloigné de l'Origine α d'une diſtance $\alpha D = \sqrt{f^3}$.

Digitized by Google

CH. V. §. 62. PL. VI.

$\sqrt{\frac{f^2}{d}}$, parce qu'ici $\alpha B\ [-\frac{ee}{2d}]$ dévient nulle. On aura donc le rect: $L\pi M$ au quarré πD^2 en raiſon donnée de d à a.

IV. Si d ſeulement eſt égale à zéro, l'équation de la Courbe étant $ayy+(bx+cc)y+eex+f^2=0$, les ordonnées P L peuvent bien couper la Courbe en deux points L, M; mais les abſciſſes ne la coupent qu'en un ſeul point Q [§. 41]. Alors le rect: $PL\times PM$ eſt égal à $\frac{A}{a}PQ=\frac{ee}{a}\times PQ$; puiſque $A=ee$, & $a=a$. Si on porte donc l'Origine en Q, le rectangle LPM des ordonnées eſt égal au rectangle de l'abſciſſe P Q par une Droite conſtante $\frac{ee}{a}$, troiſiéme proportionelle de a à e. Fig. 46.

V. Si d & e, égales chacune à zéro, réduiſent l'équation à $ayy+(bx+cc)y+f^2=0$, l'Axe des abſciſſes ne rencontrera point la Courbe & le rect: LPM des ordonnées eſt une grandeur conſtante $\frac{f^2}{a}$, quelque abſciſſe qu'on prenne. Ses deux ordonnées LP, PM ſont donc réciproquement proportionelles l'une à l'autre. Fig. 47.

Ce Cas, où l'Axe des abſciſſes ne rencontre point la Courbe, parce que le dernier terme de l'équation eſt réduit à f^2, eſt eſſentiellement différent de celui qui a été touché au n°. I. 3, où l'Axe des abſciſſes ne rencontre point la Courbe, parce que l'éq: $dxx+eex+f^2=0$ n'a que des racines imaginaires.

On ne peut ſuppoſer d, e, & f égales chacune à zéro, parce qu'alors l'équation, diviſible par y, ſe pourroit réduire à deux équations du prémier dégré $y=0$ & $ay+bx+cc=0$, & ne repréſenteroit que deux Lignes droites [§. 21. 40].

Pl. VI. VI. 1. Reprenons l'équation générale, & ſuppoſons $a = 0$, ce qui la réduit à $(bx + cc)y + dxx + cex + f^2 = 0$. Alors chaque abſciſſe n'a plus qu'une ordonnée [§. 41]. Et pour appliquer à ce Cas-ci le Théoréme géné- Ch. V. §. 62.

Fig. 48. ral du §. 61, on prendra AT égale à $-\frac{cc}{b}$ racine de l'éq: $bx + cc = 0$ & PL ſera à $\frac{PQ \times PR}{PT}$, ou le rect: TPL au rect: QPR, en raiſon donnée de d [A] à b [a]. Tranſportant donc l'Origine en T, ce qui ne change rien aux ordonnées, le rectangle TPL des coordonnées eſt au rect: QPR en raiſon donnée de d à b.

Mais ſi l'axe ap, au lieu de couper la Courbe en deux points Q, R, la touche en un ſeul q, le rect: tpL ſera au quarré de pq en raiſon donnée.

Et ſi l'axe $a\pi$ ne rencontre point la Courbe, parce que les racines de l'éq: $dxx + cex + f^2 = 0$ ſont imaginaires, on prendra comme au n°. I. 3, $aB = -\frac{cc}{2d}$, & $BC = \sqrt{(\frac{f^2}{d} - \frac{c^4}{4dd})}$, & le rect: πTL ſera au quarré de πC en raiſon donnée de d à b.

2. Dans cette même équation, ſi $f = 0$, l'Origine tombe ſur un des points Q, R, où la Courbe eſt rencontrée par l'Axe des abſciſſes.

3. Mais $c = 0$ fait tomber l'Origine au point K qui diviſe également QR, lorſque d & f ont des ſignes différens. S'ils ont même ſigne, les racines de l'éq: $dxx + f^2 = 0$ ſont imaginaires, l'Axe $a\pi$ ne rencontre point la Courbe, & on doit tranſporter le point C en D ſur la perpendiculaire aD à la même diſtance de l'origine a.

4. Si l'on a $d = 0$, l'Axe des abſciſſes ne coupera la

Fig. 49. Courbe [§. 41] qu'en un ſeul point Q. Et prenant toûjours

Ch. V. §. 62. jours $AT = -\frac{cc}{b}$, on aura $PL = \frac{ee}{b} \times \frac{PQ}{PT}$, ou TPL [qui eſt le rectangle des coordonnées, en tranſportant l'Origine ſur T] eſt égal au rect: de PQ par une conſtante $\frac{ee}{b}$. Si on méne donc une autre ordonnée pl, on aura $TP \times PL : Tp \times pl = PQ : pQ$. Donc PL eſt à pl en raiſon compoſée de la directe de PQ à pQ & de l'inverſe de PT à pT. Pl. VI.

5. Enfin, ſi l'on a d & e égales chacune à zéro, on aura $TPL = \frac{f^3}{b}$. Donc portant l'Origine en T, le rectangle des coordonnées eſt conſtant. Fig. 101

VII. Dans tous le cas du n°. préc. ſi on avoit $c = 0$, cela ne changeroit rien aux concluſions, ſi ce n'eſt que l'Origine ſe trouve toute portée ſur le point T, puiſque la diſtance AT, qui eſt $-\frac{cc}{b}$, ſe trouve nulle.

VIII. 1. Mais ſi b, auſſi bien que a, eſt égale à zéro, l'équation ſera $ccy + dxx + eex + f^3 = 0$, ce qui donne $y = -\frac{dxx + eex + f^3}{cc} = -\frac{d}{cc}(xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}) =$ Fig. 98.

$-\frac{d}{cc} \times PQ \times PR$. Donc $\frac{cc}{d} \times PL = PQ \times PR$. Le rect: des parties $PQ \times PR$ de l'abſciſſe eſt égal au rectangle de l'ordonnée PL par une droite conſtante $\frac{cc}{d}$.

Si l'abſciſſe ap touche la Courbe en q, c'eſt le quarré de pq qui eſt égal au rectangle de l'ordonnée pL par une conſtante.

Et ſi l'abſciſſe am ne rencontre point la Courbe, les racines de $xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d} = 0$ étant imaginaires, le rect:

PL. VI. de l'ordonnée πL par une conſtante eſt égal au quarré de la Droite πC menée de l'extrémité π de l'abſciſſe au point fixe C, déterminé, comme aux n°. I. 3, & VI. 1, en faiſant $\alpha B = -\frac{ee}{2d}$, & $BC = \sqrt{(\frac{f^3}{d} - \frac{e^4}{4dd})}$. CH. V. §. 62.

2. Ici, comme aux n°. II, III, & VI, la ſuppoſition de $f = 0$ porte l'Origine ſur un des deux points Q & R. Et la ſuppoſition de $e = 0$ porte A en K, ou C en D, ſuivant que les racines de $dxx + f^3 = 0$ ſont réelles ou imaginaires.

Mais on ne peut ſuppoſer $d = 0$, parce que l'équation, n'ayant plus de terme du ſecond dégré, ne repréſenteroit qu'une Ligne du premier Ordre.

63. ON VOIT par cet échantillon, quelle varieté de Cas ſe préſenteroit dans les Lignes des Ordres ſupérieurs. Touchons légérement ceux qui ſe raportent aux Lignes du troiſiéme Ordre. L'équation générale ſera $ay^3 + (bx + cc)\, yy + (dxx + eex + f^3)\, y + gx^3 + hhxx + i^3x + l^4 = 0$.

I. 1. Et d'abord, s'il n'y manque ni le terme ay^3, ni PL. VII. le terme gx^3, l'abſciſſe & l'ordonnée peuvent couper la Courbe LQMRSN repréſentée par cette équation, cha- Fig. 51. cune en trois points Q, R, S; L, M, N. Et ſelon le Théor. général [§. 61], le ſolide PL×PM×PN des ordonnées eſt au ſolide PQ×PR×PS des parties de l'abſciſſe, en raiſon donnée de g [A] à a [α].

De ſorte que menant deux ordonnées LN, ln, le ſolide PL×PM×PN eſt au ſolide PQ×PR×PS comme le ſolide pl×pm×pn au ſolide pQ×pR×pS.

Menant auſſi qs paralléle à QS, on aura, toûjours par la même raiſon, le ſolide pl×pm×pn au ſolide pQ×pR×pS, comme le ſolide $pl \times pm \times pn$ au ſolide $pq \times pr \times ps$.

Donc enfin PL×PM×PN eſt à PQ×PR×PS comme $pl \times pm \times pn$ à $pq \times pr \times ps$.

Ce

Fig. 44.

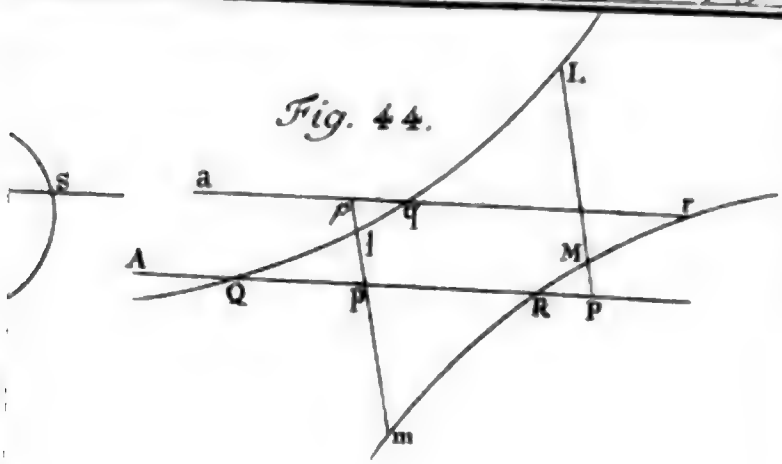


Fig. 45.

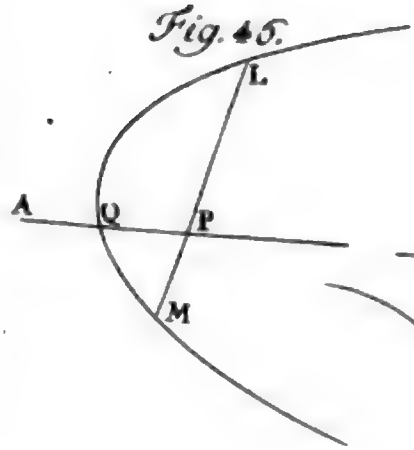


Fig. 47.

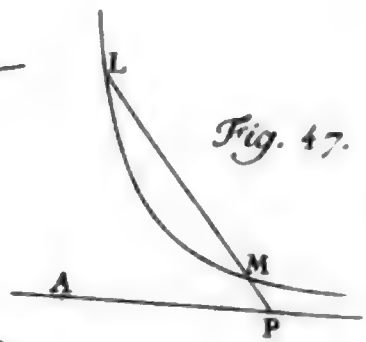
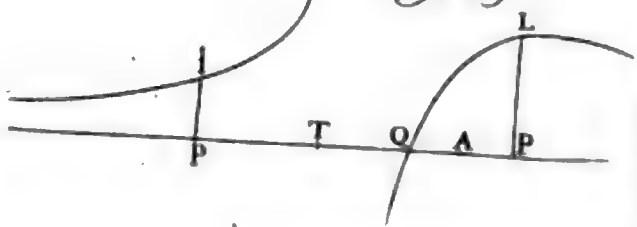


Fig. 49.



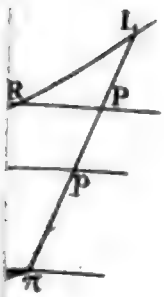
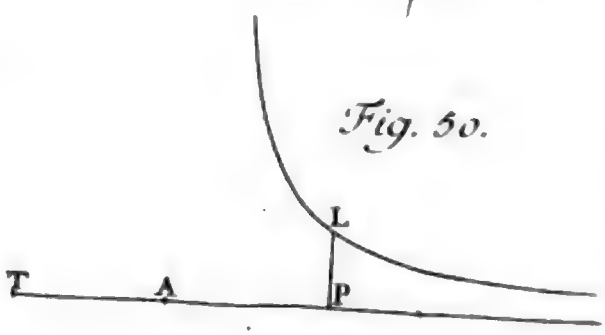


Fig. 50.



Digitized by Google

PL. VII. Ce qui forme ce Théoréme. Si par un point P on méne deux droites LPN, QPS qui coupent chacune en trois points une Ligne du troiſiéme Ordre, & par un autre point *p* deux autres droites l*p*n, q*p*s paralléles aux prémiéres & qui coupent auſſi chacune la même Courbe en trois points ; le ſolide des parties de la prémiére droite LN interceptées entre le point P & la Courbe, eſt au ſolide des parties de la ſeconde droite QS interceptées auſſi entre le point P & la Courbe, comme le ſolide des parties de la troiſiéme droite ln interceptées pareillement entre le point *p* & la Courbe, eſt au ſolide des parties de la quatriéme droite qs interceptées de même entre le point *p* & la Courbe. CH. V. §. 63.

2. Si l'abſciſſe a p coupe la Courbe en un ſeul point s & la touche en un autre point q, où l'on conçoit réünis deux points de ſection, alors le ſolide $pL \times pM \times pN$ eſt au ſolide $pq^2 \times ps$ en raiſon donnée. Fig. 52.

De même, ſi l'ordonnée l*p*m touche la Courbe en m & la coupe en l, le ſolide $pl \times pm^2$ ſera au ſolide $pq^2 \times ps$ en raiſon donnée.

Il peut même arriver que l'abſciſſe [ou l'ordonnée] ne touche la Courbe qu'en un ſeul point, auquel ſe réüniſſent les trois points de ſection Q, R, S. C'eſt ce qui arrive, quand l'éq : $gx^3 + hhxx + i^3x + l^4 = 0$, a ſes trois racines égales. Dans ce Cas, ſi on tranſporte l'Origine ſur ce point de contact, le cube de l'abſciſſe eſt au ſolide des ordonnées en raiſon donnée.

3. Si l'abſciſſe $\alpha\varpi$ ne rencontre la Courbe qu'en un ſeul point σ, & la coupe en ce point-là ſans la toucher, le ſolide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ des ordonnés eſt toûjours égal à $\frac{gx^3 + hhxx + i^3x + l^4}{a}$, ou $\frac{g}{a}\left(x^3 + \frac{hhxx}{g} + \frac{i^3x}{g} + \frac{l^4}{g}\right)$. Mais cette grandeur $x^3 + \frac{hh}{g}xx + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g}$ n'eſt plus le pro-

 duit

Ch. V. Pl. VII. §. 63.

duit de trois droites terminées à l'extrémité ϖ de l'abſciſſe, comme l'étoient PQ, PR, PS à l'extrémité P de l'abſciſſe AP ; parce que l'éq : $x^4 + \frac{bb}{g} xx + \frac{i^3}{g} x + \frac{l^4}{g} = 0$ n'a plus qu'une racine réelle, les deux autres étant imaginaires. On peut pourtant réduire le produit de ces deux racines imaginaires à un quarré, de la maniére ſuivante. Soit $\alpha\sigma = z$. Donc $\varpi\sigma\,[= \alpha\varpi - \alpha\sigma = x - z]$ eſt la racine réelle de l'éq : $x^4 + \frac{bb}{g} x^2 + \frac{i^3}{g} x + \frac{l^4}{g} = 0$. Ainſi, diviſant cette équation par $x - z = 0$, le quotient ſera le produit des racines imaginaires. Ce quotient eſt $xx + (z + \frac{bb}{g}) x + (zz + \frac{bb}{g} z + \frac{i^3}{g})$, & le reſte $z^4 + \frac{bb}{g} z^2 + \frac{i^3}{g} z + \frac{l^4}{g}$ eſt nul ; puiſque z eſt la racine réelle de l'éq : $x^4 + \frac{bb}{g} x^2 + \frac{i^3}{g} x + \frac{l^4}{g} = 0$. Il s'agit donc de trouver un quarré égal à $xx + (z + \frac{bb}{g}) x + (zz + \frac{bb}{g} z + \frac{i^3}{g})$. Pour cela qu'on prenne $\alpha D = \alpha\sigma = z$ & $DE = \frac{bb}{g}$, on aura $\alpha E = z + \frac{bb}{g}$, & ſa moitié $\alpha B = \frac{1}{2} z + \frac{bb}{2g}$. Sur le diamétre αE qu'on décrive le demi-cercle αFE, qui coupera en F la droite DF élevée perpendiculairement ſur αD. De cette maniére αF, moyenne proportionelle entre $\alpha E\,[z + \frac{bb}{g}]$ & $\alpha D\,[z]$, ſera égale à $\sqrt{(zz + \frac{bb}{g} z)}$. Qu'on prenne

ſur

Ch. V. §. 63. Pl. VII.

ſur FE, prolongée s'il le faut, une partie FG égale à $\sqrt{\frac{i^3}{g}}$, & on aura $\alpha G^2 = \alpha F^2 + FG^2 = zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g}$. Qu'on décrive donc, du centre α, avec le raïon αG, un cercle GC, qui coupe en C la droite BC perpendiculaire à αB, & on aura $BC^2 = \alpha C^2 - \alpha B^2 = \alpha G^2 - \alpha B^2 = (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g}) - (\frac{1}{2}z + \frac{bb}{2g})^2 = \frac{1}{4}zz + \frac{bb}{2g}z + \frac{i^3}{g} - \frac{b^4}{4gg}$. Donc $\varpi C^2 = \varpi B^2 + BC^2 = (x + \frac{1}{2}z + \frac{bb}{2g})^2 + \frac{1}{4}zz + \frac{bb}{2g}z + \frac{i^3}{g} - \frac{b^4}{4gg} = xx + (z + \frac{bb}{g})x + (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g})$. Ainſi puiſque le ſolide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ eſt à $x^3 + \frac{bb}{g}x^2 + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g}$ en raiſon donnée de g à α, & que $x^3 + \frac{bb}{g}x^2 + \frac{i^3}{g}x + \frac{l^4}{g}$ eſt le produit de $x - z$ [qui eſt $\varpi\sigma$] par $xx + (z + \frac{bb}{g})x + (zz + \frac{bb}{g}z + \frac{i^3}{g})$ [qui eſt ϖC^2], on conclura que le ſolide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ des ordonnées eſt au ſolide $\varpi\sigma \times \varpi C^2$ en raiſon donnée de g à α.

II. 1. Si la grandeur l eſt égale à zéro, alors l'éq: $gx^3 + bbxx + i^3x = 0$, a une racine $x = 0$: ce qui montre que l'Origine tombe ſur un des trois points Q, R, S, où l'Axe des abſciſſes rencontre la Courbe. D'ailleurs tout le reſte ſubſiſte comme dans le n°. préc. ſi ce n'eſt qu'il faut un peu varier la conſtruction du cas où cette éq: $gx^3 + bbxx + i^3x = 0$ a deux racines imaginaires, & imiter celle du §. 62. n°. I. 3. On prendra $\alpha B = -\frac{bb}{g}$, on élévera

Pl. VII. élévera la perpendiculaire indéfinie BC & on la coupera en C par un cercle décrit du centre α avec le raïon $\alpha C = \sqrt{\frac{iii}{g}}$, pour avoir le point fixe C, duquel menant la droite ϖC, on aura $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ à $\varpi C^2 \times \varpi\alpha$ [car, dans ce cas, α & σ ſont le même point] en raiſon donnée de g à a. Car le ſolide $\varpi L \times \varpi M \times \varpi N$ des ordonnées eſt égal à $\frac{gx^3 + hhxx + iiix}{a} = \frac{gx}{a}(xx + \frac{hh}{g}x + \frac{iii}{g}) =$ $\frac{g}{a}(\varpi\alpha \times \varpi C^2)$. Ch. V. §. 63.

2. Si l & i ſont nuls, l'équation, faite en égalant à zéro le dernier terme, ſe réduit à $gx^3 + hhxx = 0$, qui a deux racines égales à zéro. Donc alors deux des points où l'Axe coupe la Courbe ſont réünis en un ſeul point q, auquel eſt ſituée l'Origine. Et le ſolide $pL \times pM \times pN$ des ordonnées eſt en raiſon donnée au ſolide qui a pour baſe le quarré pq^2 de l'abſciſſe, & pour hauteur la droite ps.

Enfin, ſi les trois grandeurs h, i, l ſont nulles, l'équation du dernier terme $gx^3 = 0$ a ſes trois racines $x = 0$. Les trois points Q, R, S, communs à la Courbe & à l'Axe, ſe confondent en un ſeul, ſur lequel eſt pris l'Origine, & le ſolide des trois ordonnées eſt au cube de l'abſciſſe en raiſon donnée.

III. 1. Si au contraire, dans le dernier terme, la grandeur g eſt la ſeule qui ſoit zéro, l'équation faite de ce dernier terme ſera $hhxx + iiix + l^4 = 0$, qui n'a que
Fig. 53. deux racines. L'Axe AP ne peut donc couper la Courbe qu'en deux points Q, R. Et $PL \times PM \times PN$ eſt égal à $\frac{A}{a} \times PQ \times PR = \frac{hh}{a} \times PQ \times PR$, puiſqu'ici $A = hh$, & $a = a$.

Le

CH. V. §. 63. Le ſolide des ordonnées PL×PM×PN eſt égal à un ſolide qui a une hauteur donnée $\frac{hh}{a}$, & une baſe égale au rectangle des parties PQ, PR de l'abſciſſe. PL. VII.

Si l'abſciſſe ap touche la Courbe au point q, le rect: PQ×PR devient le quarré pq². Tranſportant donc l'Origine a ſur ce point q, le ſolide pL×pM×pN des ordonnées eſt égal au ſolide qui a pour hauteur une droite donnée $\frac{hh}{a}$, & pour baſe le quarré de l'abſciſſe pq.

Mais ſi l'Axe $a\pi$ ne rencontre point la Courbe, ce qui arrive quand les racines de l'éq: $hhxx+iiix+l^4=0$ ſont imaginaires; alors on prendra, comme au §. 62. n°. I. 3, $a\beta=-\frac{iii}{2hh}$, on élévera la perpendiculaire BC, on la coupera par un Cercle décrit du centre a avec un raïon $aC=\sqrt{\frac{l^4}{hh}}=\frac{ll}{h}$, & on aura le point fixe C, duquel menant $C\pi$, le ſolide $\pi L\times\pi M\times\pi N$ des ordonnées eſt égal au ſolide qui a la hauteur donnée $\frac{hh}{a}$ & la baſe égale au quarré de πC.

2. Si g & h ſont toutes deux nulles, le dernier terme de l'éq: de la Courbe ſera $iiix+l^4$ qui, égalé à zéro, n'a qu'une racine $-\frac{l^4}{i^3}$. L'Axe AP ne rencontre la Courbe qu'en un ſeul point Q. Et le ſolide PL×PM×PN des ordonnées eſt égal à $\frac{A}{a}PQ=\frac{i^3}{a}PQ$, c'eſt-à-dire, [en tranſportant l'Origine au point Q] que le ſolide des ordonnées eſt égal au ſolide, qui a pour hauteur l'abſciſſe PQ & une baſe donnée $\frac{i^3}{a}$. Fig. 54.

Pl. VII. 3. Enfin ce ſolide PL×PM×PN des ordonnées eſt d'une grandeur conſtante $\frac{l^4}{a}$, ſi les quantités g, b, i ſont chacune égale à zéro. Ch. V. §. 63.

Fig. 55.

IV. 1. Si dans l'éq : de la Courbe $ay^3 + (bx + cc)yy + (dxx + cex + f^3)y + gx^3 + hhxx + iix + l^4 = o$, le coëfficient a du premier terme eſt zéro, ce qui donne la prémiére place au terme $(bx + cc)yy$: l'Axe des abſciſſes peut bien couper la Courbe en trois points Q, R, S ; mais aucune abſciſſe AP n'aura plus de deux ordonnées PL, PM. Et prenant $AT = -\frac{cc}{b}$, racine de l'éq : $bx + cc = o$, on aura [§. 61] le rect : PL×PM à $\frac{PQ \times PR \times PS}{PT}$ comme A à a, c'eſt-à-dire, comme g à b. Donc le ſolide PT×PL×PM eſt au ſolide PQ×PR×PS en raiſon donnée. Ainſi PT×PL×PM : PQ×PR×PS = pT×pl×pm : pQ×pR×pS. En prenant le point donné T pour l'Origine, on dira que le ſolide PT×PL×PM de l'abſciſſe & des ordonnées eſt proportionel au ſolide PQ×PR×PS des parties de l'Axe.

Fig. 56.

Ici, comme au n°. I. 2 du préſent §. l'Axe ap peut toucher la Courbe en q & la couper en s, & alors c'eſt au ſolide $pq^2 \times ps$ que le ſolide pt×pL×pM de l'abſciſſe & des ordonnées eſt proportionel.

Il peut arriver auſſi que l'abſciſſe $a\pi$ ne rencontre la Courbe qu'en un ſeul point σ. Dans ce cas prenant, comme au n°. I. 3 de ce §, $aB = \frac{1}{2}z + \frac{bb}{2g}$, & $BC = \sqrt{(\frac{1}{4}zz + \frac{bb}{g}z + \frac{iii}{g} - \frac{b^4}{4gg})}$, on aura le ſolide $\pi\sigma \times \pi C^2$ proportionel au ſolide $\pi T \times \pi L \times \pi M$ de l'abſciſſe & des ordonnées.

2. a

Ch. V. § 63. 2. a étant toûjours zéro, ſi de plus $l = o$, l'Origine tombe ſur un des points Q, R, S, ou ſi l'Axe ne rencontre la Courbe qu'en un ſeul point σ, c'eſt à ce point σ qu'eſt l'Origine. On cherchera, en ce dernier Cas, le point fixe C, comme au n°. II. 1 de ce §, & on aura le ſolide $\pi T \times \pi L \times \pi M$ de l'abſciſſe & des ordonnées proportionel au ſolide $\pi\sigma \times \pi C^2$. Pl. VII.

Si outre cela, $b = o$, l'Axe a q touche la Courbe & l'Origine eſt priſe au point de contact q. Mais on a toûjours le ſolide $p t \times p L \times p M$ proportionel au ſolide $p s \times p q^2$.

Enfin, ſi a, l, b & i ſont zéros, les trois points Q, R, S ſe confondent en un ſeul, où eſt l'Origine. Et le ſolide $PT \times PL \times PM$ eſt proportionel au Cube de l'abſciſſe.

3. Suppoſons maintenant que, dans le dernier terme, g ſeule ſoit zéro, l'Axe AP ne peut rencontrer la Courbe qu'en deux points, & en raiſonant comme au n°. III. 1 de ce §, on trouvera que le ſolide $PT \times PL \times PM$ eſt égal au ſolide $\frac{bb}{a} \times PQ \times PR$, ſi l'Axe AP coupe la Courbe en deux points; ou que le ſolide $pt \times pL \times pM$ eſt égal au ſolide $\frac{bb}{a} \times pq^2$, ſi l'Axe ap rencontre la Courbe en un ſeul point q: ou enfin que le ſolide $\varpi T \times \varpi L \times \varpi M$ eſt égal au ſolide $\frac{bb}{a} \times \varpi C^2$ ou $\frac{bb}{a} \times \varpi D^2$, ſi l'Axe $a\varpi$ ne rencontre point la Courbe; le point C, ou le point D, étant déterminé, dans ce dernier cas, comme au n°. III. 1 de ce §. Fig. 57.

Si, non-ſeulement g, mais encore b eſt zéro, l'Axe AP ne peut couper la Courbe qu'en un ſeul point Q, & & le ſolide $PT \times PL \times PM$ eſt égal au ſolide $\frac{iii}{a} \times PQ$. Mais Pl. VIII. Fig. 58.

Pl. VIII. si de plus $i = 0$, l'Axe ap ne rencontre point la Courbe, & le solide $pt \times pL \times pM$ de l'abscisse par les ordonnées [en fixant l'Origine en t] est d'une grandeur constante $\frac{l^4}{a}$. Ch. V. §. 63.

V. Si dans tous les Cas du n°. préced. on suppose $c = 0$, les conclusions qui ont été tirées restent précisément les mêmes. La seule différence est que l'Origine A est nécessairement fixée au point T, puisque AT $[-\frac{cc}{b}]$ se trouve nulle.

VI. Mais si dans ces mêmes cas on avoit $b = 0$, l'équation se réduiroit à cette forme $yy + \frac{dxx + eex + f^3}{cc} y + \frac{gx^3 + hhxx + iiix + l^4}{cc} = 0$. Le rect : des ordonnées

Fig. 59. PL×PM est donc égal à $\frac{gx^3 + hhxx + iiix + l^4}{cc} = \frac{g}{cc} \times (x^3 + \frac{hh}{g} xx + \frac{iii}{g} x + \frac{l^4}{g}) = \frac{g}{cc} \times PQ \times PR \times PS$. Donc $\frac{cc}{g} \times PL \times PM = PQ \times PR \times PS$. On aura ici toutes les mêmes conclusions qui se tirent dans le n°. IV, si ce n'est qu'au lieu de la droite variable PT $[x + \frac{cc}{b}]$ on doit prendre une droite constante $\frac{cc}{g}$.

VII. Supposons maintenant que a, b & c étant nuls fassent disparoître les deux premiers termes de l'éq : générale, & la réduisent à $(dxx + eex + f^3) y + gx^3 + hhxx +$

Fig. 60. $iiix + l^4 = 0$. Chaque abscisse AP n'aura qu'une seule ordonnée PL. Et pour appliquer ici le Théor. général, on prendra

Fig. 52.

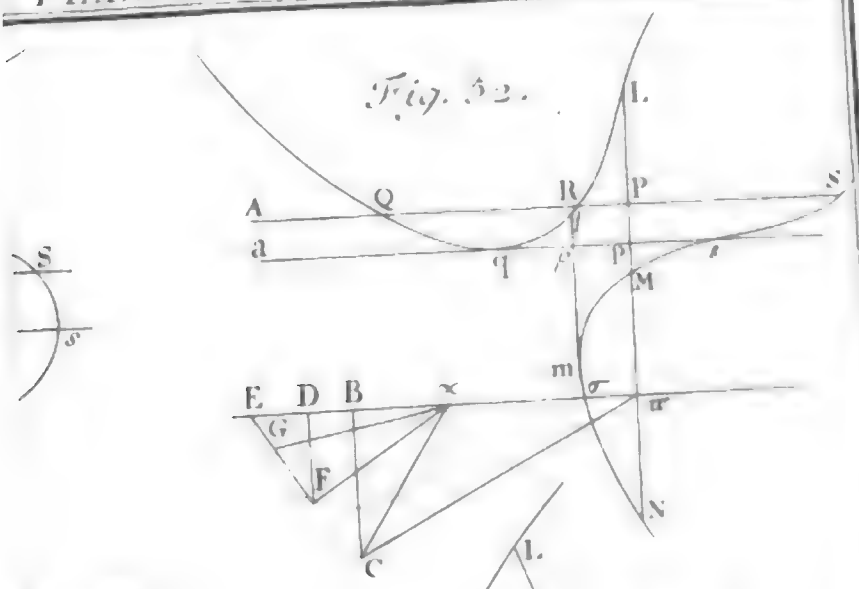


Fig. 54.

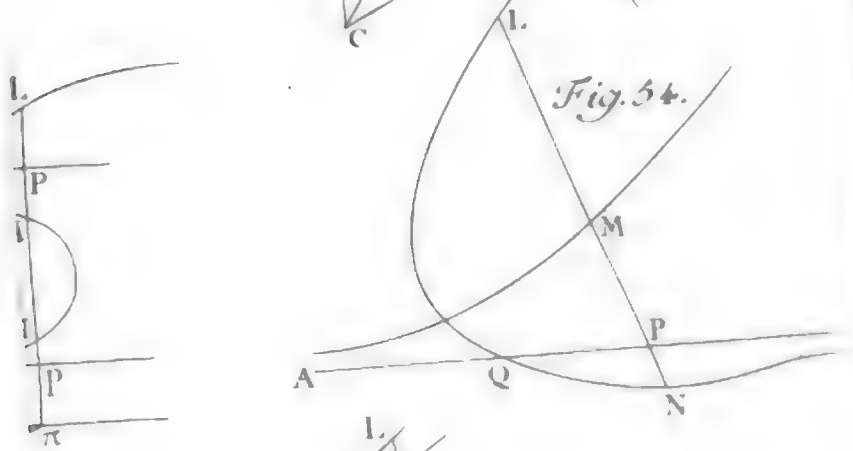


Fig. 55.

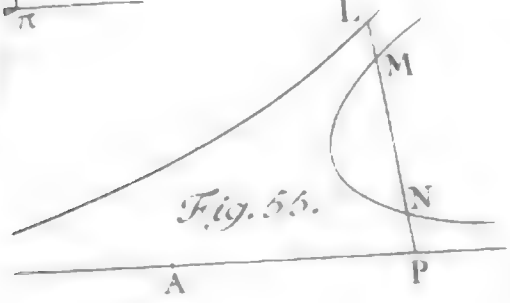
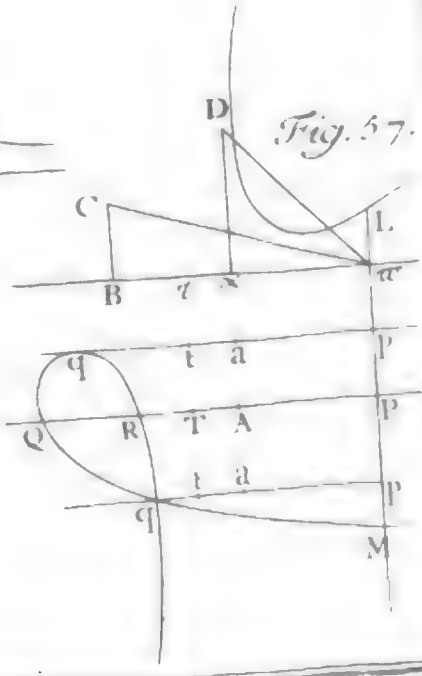


Fig. 57.



Digitized by Google

Ch. V. §. 63. prendra AT & AV égales aux deux racines de l'éq : $dx^2 + eex + f^3 = o$, & l'on aura PL à $\frac{PQ \times PR \times PS}{PT \times PV}$, ou le ſolide $PT \times PV \times PL$ au ſolide $PQ \times PR \times PS$ en raiſon donnée de g à d. Pl. VIII.

Lorſque les racines AT, AV de l'éq : $dx^2 + eex + f^3 = o$ ſont réelles, on les peut déterminer par cette conſtruction triviale. Prenez ſur l'Axe des abſciſſes $AH = -\frac{ee}{2d}$, élevez la perpendiculaire $HI = \sqrt{\frac{f^3}{d}}$, & du centre I, avec un raïon IT égal à AH, décrivez un Cercle qui coupera l'Axe en T & V. Car HT ou $HV = \sqrt{(IT^2 - IH^2)} = \sqrt{(AH^2 - HI^2)} = \sqrt{(\frac{e^4}{4dd} - \frac{f^3}{d})}$. Donc $AT = AH - HT = -\frac{ee}{2d} + \sqrt{(\frac{e^4}{4dd} - \frac{f^3}{d})}$, & $AV = AH + HV = -\frac{ee}{2d} - \sqrt{(\frac{e^4}{4dd} - \frac{f^3}{d})}$, qui ſont les deux racines de l'éq : $gxx + eex + f^3 = o$.

Mais ſi les racines de cette équation ſont imaginaires, ce qui arrive quand IT ou $AH [\frac{ee}{d}] < IH [\sqrt{\frac{f^3}{d}}]$, la grandeur $xx + \frac{ee}{d}x + \frac{f^3}{d}$ ne peut plus repréſenter un rectangle $PT \times PV$; mais elle pourra exprimer le quarré d'une droite IP, menée de l'extrémité P de l'abſciſſe AP à un point fixe I, qui ſera déterminé comme au §. 62. n°. I. 3, en prenant $AH = -\frac{ee}{2d}$, élevant la perpendiculaire indéfinie HI, & la coupant en I par un Cercle décrit du centre A avec un raïon $AI = \sqrt{\frac{f^3}{d}}$.

PL. VIII. Ainſi le ſolide $PQ \times PR \times PS$ eſt proportionel au ſolide $PT \times PV \times PL$ quand les deux racines de l'éq : $dxx + eex + f^3 = o$ ſont réelles, & au ſolide $PI^2 \times PL$ quand ces racines ſont imaginaires. CH. V. §. 63.

Dans l'un & dans l'autre cas, ce ſolide $PQ \times PR \times PS$ eſt métamorphoſé ſuivant toutes les maniéres indiquées aux n°. I, II, & III du préſent §, ſoit par la poſition de l'Axe des abſciſſes, ſoit par les ſuppoſitions de $l = o$, ou de $l = i = o$, ou de $l = i = b = o$; ou de $g = o$, ou de $g = b = o$, ou de $g = b = i = o$.

VIII. Si avec a, b, & c, on a encore $f = o$, le point T tombe ſur A, & le point V doit être pris à une diſtance AV de l'Origine qui ſoit $-\frac{ee}{d}$, parce que les racines de l'éq : $dxx + eex = o$ ſont $x = o$ & $x = -\frac{ee}{d}$. On a donc, en ce cas, le ſolide $PA \times PV \times PL$ proportionel au ſolide $PQ \times PR \times PS$, ou à tous ceux dans leſquels ce dernier ſe métamorphoſe par les ſuppoſitions des n°. I, II, & III.

IX. Si ce n'eſt pas f, mais e, qui ſoit $= o$, les points T & V tombent de part & d'autre de l'Origine A, à une diſtance $\sqrt{-\frac{f^3}{d}}$, lorſque f & d n'ont pas le même ſigne, parce que $x - \sqrt{-\frac{f^3}{d}} = o$ & $x + \sqrt{-\frac{f^3}{d}} = o$ ſont les racines de l'éq : $dxx + f^3 = o$. Si f & d ont le même ſigne, $\sqrt{-\frac{f^3}{d}}$ eſt une grandeur imaginaire ; mais $xx + \frac{f^3}{d}$ exprime le quarré de KP menée de l'extrémité de l'abſciſſe AP au point K, déterminé en prenant $AK\ [= AI] = \sqrt{f^3}$

CH. V. §. 63. PL. VIII.

$= \sqrt{\frac{f^3}{d}}$, sur la perpendiculaire indéfinie élevée au point A. Alors, le solide $PL \times PK^2$ est proportionel au solide $PQ \times PR \times PS$, ou à tous ceux que lui substituent les suppositions des n°. I, II, & III.

X. Si les deux grandeurs f & e sont, en même tems, $= o$, les deux points T & V tombent ensemble sur l'Origine A, parce que les deux racines de l'éq : $dxx = o$ sont $x = o$, $x = o$: & c'est le solide $PL \times PA^2$ qui est proportionel au solide $PQ \times PR \times PS$, ou aux solides équivalents.

De même, la supposition de $d = \frac{e^4}{4f^3}$ donnant à l'éq: $dxx + eex + f^3 = o$ deux racines égales, chacune à $-\frac{2f^3}{ee}$ ou $-\frac{ee}{2d}$, fait tomber les deux points T & V sur le point H, & change le rect: $PT \times PV$ en un quarré PH^2, sur lequel élevant un Parallélépipéde qui ait PL pour hauteur, il sera proportionel au solide $PQ \times PR \times PS$, ou à ceux en qui il se transforme par les suppositions des n°. I, II, & III.

XI. Si a, b, c & d sont nuls, l'éq: $dxx + eex + f^3 = o$ réduite à $eex + f^3 = o$ n'a qu'une racine $x = -\frac{f^3}{ee}$, à laquelle prenant égale AT, on atura [§. 61] Fig. 61

$PL = \frac{A \times PQ \times PR \times PS}{a \times PT} = \frac{g}{ee} \times \frac{PQ \times PR \times PS}{PT}$. Donc le solide de la constante $\frac{ee}{g}$ par l'abscisse PT [en portant l'Origine de A en T] & par l'ordonnée PL est égal au solide $PQ \times PR \times PS$, ou à ceux dans lesquels le transforment les suppositions des n°. I & II.

XII. En-

Digitized by Google

PL. VIII. XII. Enfin, ſi a, b, c, d, & e ſont nuls, l'éq: de la Courbe réduite à $f^3y + gx^3 + hhxx + iiix + l^4 = o$, ou $\frac{f^3}{g}y + x^3 + \frac{hh}{g}x^2 + \frac{iii}{g}x + \frac{l^4}{g} = o$, fait voir que le ſolide de l'ordonnée PL [y] par le rect : conſtant $\frac{f^3}{g}$ eſt égal au ſolide PQ × PR × PS, ou à ceux qui lui ſont ſubſtitués dans les n°. I & II. CH. V. §. 63. Fig. 62.

Dans le cas des n°. X. & XI. on ne peut pas, comme au n°. III, ſuppoſer $g = o$; parce qu'alors l'équation, n'ayant plus de terme du troiſiéme dégré, ne repréſenteroit qu'une Ligne du ſecond Ordre.

On voit aſſez, je penſe, que ſi l'on vouloit détailler tous ces Cas, combiner enſemble ceux qui peuvent l'être, & ſe laiſſer aller aux conſéquences qui en ſuivent naturellement, il y auroit dequoi faire un Volume. Mais nous ne nous propoſons que d'indiquer les principes généraux, & d'autres conſidérations nous apellent.

CHAPI-

Digitized by Google

CHAPITRE VI.

Des Diamétres, Contre-diamétres, & Centres des Lignes Courbes.

64. TOUT ce qui a été démontré au Chap. préced. n'eſt que la conſéquence de ce Principe, Que le dernier terme d'une équation eſt égal au produit de toutes ſes racines. On ſait auſſi que le coëfficient du ſecond terme, pris avec un ſigne contraire, eſt égal à la ſomme de toutes les racines. Donc $(ax^t + \beta x^{t-1} \&c) y^{v-t} + (ax^{t+1} + bx^t + \&c) y^{v-t-1} \&c = 0$ étant l'équation d'une Courbe MmOμQ, de l'Ordre v, ſi on la diviſe par le coëfficient du prémier terme, afin que la plus haute puiſſance de y ſoit ſans autre coëfficient que l'unité, elle prendra cette forme $y^{v-t} + \frac{ax^{t+1} + bx^t \&c}{ax^t + \beta x^{t-1} \&c} y^{v-t-1} + \&c = 0$, où le coëfficient du ſecond terme, pris avec un ſigne contraire, c'eſt-à-dire, $-\frac{ax^{t+1} + bx^t + \&c.}{ax^t + \beta x^{t-1} \&c.}$ exprime la ſomme de toutes les racines y, ou de toutes les ordonnées PM, Pm, Pμ, &c. Pl. VIII. Fig. 63.

65. Si ſur les mêmes Axes on décrit une autre Ligne quelconque NνQn repréſentée par une équation dont les deux premiers termes ſoient $y^{v-s} + \frac{ax^{t+1} + bx^t \&c}{ax^t + \beta x^{t-1} \&c}$

PL. VIII. y^{v-s-1}, la ſomme de ſes ordonnées PN + Pn + P, &c. CH. VI. §. 65.
ſera auſſi $-\frac{ax^{t+1}+bx^{t}\ \&c}{ax^{t}+\beta x^{t-1}\ \&c}$, c'eſt-à-dire, la même que la ſomme des ordonnées PM + Pm + Pμ &c. de la prémiére Ligne.

La comparaiſon de ces deux Lignes & les varietés infinies dont elles ſont ſuſceptibles [car il ſuffit qu'elles conviennent dans le coëfficient du ſecond terme, leurs équations étant ordonnées par y : elles peuvent différer dans tout le reſte] donnent lieu à une infinité de Propoſitions. Contentons-nous de remarquer un Cas fort ſimple. C'eſt celui où $s = t$, c'eſt-à-dire, celui où les deux Lignes ſont du même ordre v, & où leurs équations ont les deux mêmes premiers termes. Si l'on ne prend que les abſciſſes qui dans chaque Ligne n'ont point d'ordonnées imaginaires, ou, ce qui eſt la même choſe, ſi l'on ne prend que les ordonnées qui coupent l'une & l'autre Ligne en autant de points qu'il y a d'unités dans le plus haut expoſant $v-t$ de la variable y ; non-ſeulement la ſomme PM + Pm + Pμ &c. des ordonnées de la prémiére Ligne MmOμQ eſt égale à la ſomme PN + Pn + P, &c. des ordonnées de la ſeconde Ligne N, Qn ; mais encore le nombre des ordonnées de l'une eſt égal au nombre des ordonnées de l'autre. Et l'éq: PM + Pm + Pμ &c. = PN + Pn + P, &c. peut prendre cette forme PM − PN + Pm − Pn + Pμ − P, &c. = 0, ou − NM + mn + μ, &c = 0, ſoit MN &c = mn + μ, &c. Propoſition qu'on peut énoncer ainſi.

Deux Lignes d'un même Ordre, & dont les équations ordonnées par y ont les deux mêmes prémiers termes, étant décrites ſur les mêmes Axes ; toute ordonnée qui coupe l'une & l'autre en un nombre de points égal à l'expoſant de la plus haute puiſſance d'y, eſt coupée en ſorte que

Ch. VI. §. 65. que la ſomme de ſes parties interceptées entre la prémiére & la ſeconde Ligne eſt égale à la ſomme de ſes parties interceptées entre la ſeconde & la prémiére Ligne. Je diſtingue ces parties en ſuppoſant qu'on parcourt l'ordonnée d'un bout à l'autre, & j'apelle *parties interceptées entre la prémiére & la ſeconde Ligne* celles qu'on parcourt en allant d'un point de la prémiére Ligne à un point de la ſeconde, & *parties interceptées entre la ſeconde & la prémiére Ligne* celles qu'on parcourt en allant d'un point de la ſeconde Ligne à un point de la prémiére. Ainſi parcourant l'ordonnée Nν de N à ν, MN eſt une partie interceptée entre la ſeconde & la prémiére Ligne, mais mn & $\mu\nu$ ſont interceptées entre la prémiére Ligne & la ſeconde. Pl. VIII.

66. S'IL n'y a dans l'équation aucune puiſſance de x qui ait un expoſant négatif, comme on le ſuppoſe d'ordinaire, & que t ſoit zéro, le coëfficient $\frac{\alpha x^{t+1}+bx^{t}+\&c}{\alpha x^{t}+\beta x^{t-1}\&c}$ du ſecond terme ſe réduit à $\alpha x+b$. Alors on peut toûjours prendre pour l'une des deux Lignes, le Syſtême d'autant de Droites qu'il y a d'unités dans v. Et ces Droites ſe peuvent décrire en une infinité de façons. Car ſi AB, AH ſont les deux Axes, & qu'ayant pris une abſciſſe AB $=1$, on lui donne les ordonnées BC $[-c]$, BD $[-d]$, BE $[-e]$ &c. dont le nombre ſoit v, & la ſomme $[-c-d-e\ \&c.]$ égale à $-a$, où l'on peut, ſi l'on veut, prendre le zéro pour une ou pluſieurs de ces grandeurs c, d, e, &c. & qu'on mène par l'Origine A les Droites ACc, ADd, AEe, &c. qu'on prenne auſſi ſur l'Axe des ordonnées les parties AF $[-f]$, AG $[-g]$, AH $[-b]$ &c. dont la ſomme $[-f-g-b\ \&c.]$ ſoit égale à $-b$: & qu'on mène les Droites Ff, Gg, Hh, &c. paralléles à AC, AD, AE, &c. Le ſyſtême de ces Droites Ff, Fig. 64.

PL. VIII. Gg, Hh &c. ſera repréſenté par une équation dont les deux premiers termes ſeront $y^v + (ax + b)y^{v-1}$. Car l'ordonnée Pf de la Droite Ff eſt égale à Pc + cf. Or Pc eſt la troiſiéme proportionelle à AB [1], BC [$-c$] & AP [x]. Donc Pc $= -cx$. Et cf eſt égale à AF [$-f$], Ff étant paralléle à Ac. Donc Pf [$=$ Pc + cf] $= -cx - f$. L'équation de la Droite Ff eſt donc $y + cx + f = 0$. Par la même raiſon l'éq: de Gg eſt $y + dx + g = 0$, celle de Hh eſt $y + ex + b = 0$, & ainſi de ſuite autant qu'il y aura de Droites. Donc le ſyſtême de ces Droites eſt repréſenté par le produit $(y + cx + f)(y + dx + g)(y + ex + b)$ &c $= 0$ de toutes ces équations [§. 20], dont le premier terme eſt y^v & le ſecond $((cx + f) + (dx + g) + (ex + b) + \&c)\, y^{v-1} = ((c + d + e\ \&c)x + (f + g + b\ \&c))\, y^{v-1} = (ax + b)y^{v-1}$, puiſque $c + d + e + \&c = a$, & $f + g + b + \&c = b$. Le ſyſtême de ces Droites eſt donc repréſenté par l'éq: $y^v + (ax + b)y^{v-1} + \&c = 0$, dont le ſecond terme a pour coëfficient $ax + b$, qui étant pris avec un ſigne contraire, donne $-ax - b$ pour la ſomme Pf + Pg + Ph &c. des ordonnées. CH. VI. §. 66.

On peut auſſi, ſi l'on veut, & cela revient au même, prendre les ordonnées AF, AG, AH &c. égales à f, g, b &c. dont la ſomme ſoit $-b$, & les abſciſſes AI, AK, AL &c. égales à i, k, l, &c. telles que $\frac{f}{i} + \frac{g}{k} + \frac{b}{l}$ &c. ſoit $-a$, & mener les Droites IF, KG, LH. Car AP étant x, on a AI [i] : AF [f] $=$ IP [$i + x$] : Pf $= f + \frac{f}{i}x$. De même Pg $= g + \frac{g}{k}x$, & Ph $= b + \frac{b}{l}x$, &c. Donc la ſomme Pf + Pg + Ph &c $= f + g + b$ &c +

Ch. VI. §. 66. Pl. VIII.

$$\&c + \left(\frac{f}{i} + \frac{g}{k} + \frac{h}{l}\ \&c\right) x = -b - ax.$$

Ainſi décrivant ſur les mêmes Axes une Courbe MQmμ dans l'équation de laquelle les deux prémiers termes ſoient $y^v + (ax+b)\,y^{v-1}$, ſi l'on méne une ordonnée Pμ qui rencontre cette Courbe en un nombre v de points M, m, μ &c. la ſomme des ordonnées PM, Pm, Pμ &c. de la Courbe, ſera égale à la ſomme des ordonnées Pf, Pg, Ph, &c. des Droites Ff, Gg, Hh, &c. & les parties hμ, gm, &c. interceptées entre les Droites & la Courbe, ſeront égales aux parties [ou à la partie] Mf &c. interceptées entre la Courbe & les Droites.

67. Rien n'empêche de prendre les ordonnées AF, AG, AH &c. égales entr'elles, & comme leur nombre eſt v & leur ſomme $-b$, chacune ſera $-\frac{b}{v}$. On peut de même prendre les abſciſſes AI, AK, AL, &c. égales entr'elles. Les nommant $-r$, la ſomme $+\frac{b}{vr} + \frac{b}{vr} + \frac{b}{vr}\ \&c = +\frac{b}{r}$ doit être $-a$: ce qui donne $r = -\frac{b}{a}$. Alors Fig. 65. toutes les Droites IF, KG, LH &c. ſe réduiſent à une ſeule RS repréſentée par l'éq: $y + \frac{a}{v}x + \frac{b}{v} = 0$ ou $vy + ax + b = 0$. Son ordonnée PS priſe v fois eſt égale à la ſomme PM + Pm + Pμ &c. des ordonnées de la Courbe MQmμ, & les parties MS, mS, &c. interceptées entre la Courbe & la Droite ſont égales aux parties [ou à la partie] Sμ &c. interceptée entre la Droite & la Courbe. De ſorte que ſi l'on prend cette Droite RS pour l'Axe des abſciſſes, la ſomme des ordonnées négatives SM + Sm, &c.

PL. VIII. eſt égale à la ſomme $S\mu$ &c. des poſitives. Une Droite qui a cette poſition ſe nomme un *Diamétre*, à prendre ce mot dans une ſignification étenduë *. CH. VI. §. 67.

68. IL n'y a point de Courbe algébrique qui n'ait une infinité de Diamétres, parce qu'il n'y a point de Courbe dont on ne puiſſe transformer, en une infinité de façons, l'équation $(\alpha x^t + \beta x^{t-1}$ &c.$)y^{v-t} + (\alpha x^{t+1} + b x^t$ &c.$)y^{v-t-1}$ &c. $= 0$, de ſorte que l'expoſant t devienne égal à zéro. Il faut pour cela que la plus haute puiſſance de l'ordonnée y ſoit d'un dégré dont l'expoſant $[v - t]$ ſoit égal à v. Or c'eſt ce qu'on peut toûjours faire en donnant une poſition convenable aux ordonnées.

Car puiſque l'Ordre de la Courbe eſt v, il y aura néceſſairement dans ſon équation des termes, tels que $\alpha x^t y^{v-t}$, $\alpha x^{t+1} y^{v-t-1}$, &c où la ſomme des expoſants de x & y ſera v [§. 31]. On change la poſition des ordonnées en ſubſtituant $z + ru$ à x, & su à y [§. 25], ſubſtitution qui change ces termes en $\alpha(z+ru)^t s^{v-t} u^{v-t}$, $\alpha(z+ru)^{t+1} s^{v-t-1} u^{v-t-1}$, &c. c'eſt-à-dire, en $\alpha(z^t \ldots + r^t u^t) s^{v-t} u^{v-t}$, $\alpha(z^{t+1} \ldots r^{t+1} u^{t+1}) s^{v-t-1} u^{v-t-1}$, &c. ou $\alpha s^{v-t} z^t u^{v-t} + \ldots \alpha r^t s^{v-t} u^v$, $\alpha s^{v-t-1} z^{t+1} u^{v-t-1} + \ldots \alpha r^{t+1} s^{v-t-1} u^v$, &c. Il y aura donc des termes $\alpha r^t s^{v-t} u^v$, $\alpha r^{t+1} s^{v-t-1} u^v$, &c, où l'expoſant v de l'ordonnée u eſt le même que celui de l'Ordre de la Courbe. Donc, pourvû qu'on choiſiſſe r & s de telle grandeur que le coëfficient $\alpha r^t s^{v-t} + \alpha r^{t+1} s^{v-t-1} +$ &c. de

* NEWTON, *Enumer. lin. tert. ordinis.* §. II. 1.

CH. VI. §. 68. de u^v ne ſoit pas zéro, c'eſt-à-dire, pourvû que $a + a\frac{r}{s}$ PL. VIII. $+ \&c.$ ne ſoit pas zéro, ce qui ſe peut faire en une infinité de maniéres, ces ordonnées u auront un Diamétre.

69. MAIS on peut s'élever à des Propoſitions encore plus générales ſur cette matiére. Soit CMNn une Courbe Fig. 66. de l'Ordre v, dont l'équation rélative aux abſciſſes AP $[x]$ & aux ordonnées PM $[y]$ ſoit $y^v + (ax + b)y^{v-1} + (cxx + dx + e)y^{v-2} + (fx^3 + gxx + hx + i)y^{v-3} + \&c = 0$, où la variable y s'éléve à la puiſſance v, ce qui eſt toûjours poſſible [§. *préc.*]. Soit de plus BQD une autre Ligne décrite ſur les mêmes Axes, dont les abſciſſes ſoient AP $[x]$ & les ordonnées PQ $[u]$. Qu'on nomme z la partie QM, QN, ou Qn, de l'ordonnée compriſe entre les deux Lignes, & qu'on ſubſtituë, dans l'éq: de la Courbe CMNn, $\pm z + u$ au lieu d'y. Cette équation ordonnée, après ſa transformation, ſuivant les dimenſions de z aura pour premier terme z^v, & les coëfficients du ſecond, troiſiéme, quatriéme &c. termes ſeront reſpectivement, $vu + (ax + b)$, $\frac{v.v-1}{1.2}u^2 + \frac{v-1}{1}(ax + b) + (cx^2 + dx + e)$, $\frac{v.v-1.v-2}{1.2.3}u^3 + \frac{v-1.v-2}{1.2}(ax + b)u^2 + \frac{v-2}{1}(cxx + dx + e) + (fx^3 + gxx + hx + i)$, $\&c.$

Si l'on ſuppoſe ſucceſſivement chacun de ces coëfficients égal à zéro, il en réſultera les conſéquences ſuivantes.

I. Le coëfficient du ſecond terme d'une équation étant égal

Pl. VIII. égal à la ſomme de ſes racines : ſi ce coëfficient eſt zéro la ſomme des racines poſitives eſt égale à la ſomme des négatives. Donc, faiſant $vu + ax + b = o$ la ſomme des v poſitives eſt égale à la ſomme des v négatives. Mais $vu + ax + b = o$ eſt une équation à la Ligne droite. Ainſi une Courbe CMNn étant donnée, on peut mener une Droite BQD telle que la prenant pour l'Axe des abſciſſes, la ſomme des ordonnées poſitives QM, QN, &c. ſera égale à la ſomme des ordonnées négatives Qn, &c. [§. *préc.*]. Ch. VI. §. 68.

II. Le coëfficient du troiſiéme terme d'une équation eſt la ſomme de tous les produits qu'on peut faire de ſes racines priſes deux à deux. Cette ſomme eſt donc nulle, les produits poſitifs QM×QN &c. ſont égaux aux négatifs QM×Qn + QN×Qn &c, lorſque ce coëfficient eſt zéro : ce qui donne l'équation $\frac{v.v-1}{1.2} v^2 + \frac{v-1}{1}(ax + b) + (cxx + dx + e) = o$ à une Ligne du ſecond Ordre. Donc lorſqu'une Courbe du troiſiéme Ordre ou d'un Ordre ſupérieur eſt donnée, on peut toûjours décrire une Ligne du ſecond Ordre qui coupe ſes ordonnées, de maniére que, faiſant tous les produits qu'on peut faire en multipliant deux à deux les parties d'une ordonnée compriſes entre ces deux Lignes, la ſomme des produits poſitifs ſera égale à la ſomme des négatifs.

III. De même, puiſque le coëfficient du quatriéme terme d'une équation eſt la ſomme des produits des racines priſes trois à trois, ſi l'on fait ce coëfficient égal à zéro, on aura l'éq : $\frac{v.v-1.v-2}{1.2.3} u^3 + \frac{v-1.v-2}{1.2}(ax + b) u^2 + \frac{v-2}{1}(cxx + dx + e) u + (fx^3 + gxx + hx + i) = o$ à une Ligne du troiſiéme Ordre. On peut donc aſſurer

Ch. VI. §. 69. assurer, qu'une Ligne du quatriéme Ordre ou de quelque Ordre supérieur étant donnée, on peut toûjours tracer une Ligne du troisiéme Ordre qui partage les ordonnées de la prémiére Ligne, de maniére que faisant tous les produits possibles de trois dimensions avec les parties d'une ordonnée compriſes entre ces deux Lignes, la somme des produits positifs sera égale à la somme des produits négatifs. Pl. VIII.

Et ces Propositions se peuvent continuer à l'infini *.

70. Les Courbes, qui diviſent ainsi les ordonnées d'une autre Courbe, en peuvent être apellées les *Diamétres Curvilignes*. On attache quelquefois à ce mot de Diamétre une signification bien plus resserrée. On désigne par ce nom un Axe qui coupe les ordonnées de façon que chaque abscisse ait des ordonnées positives & négatives égales. Il coupe donc l'espace terminé par la Courbe en deux parties égales & qui sont même semblables lorsque les ordonnées sont perpendiculaires à l'Axe. Mr. Newton apelle ces Diamétres, des *Diamétres absolus* †.

L'on voit d'abord qu'en ce cas chaque abscisse a des ordonnées en nombre pair, puisqu'à chaque ordonnée positive il répond une ordonnée négative égale. Donc la plus haute puissance de y doit être une puissance paire. Mais de plus il faut que toutes les puissances impaires de y manquent dans l'équation. Car, si chaque ordonnée positive a une ordonnée négative égale, chaque racine positive $[+X]$ de y aura une racine négative correspondante $[-X]$, en sorte que l'équation aura autant de racines $y+X=0$ que de racines $y-X=0$. On peut join-

* Stirling, *Lin. tert. Ord.* Newton. pag. 75.
† Newton, *Enum. lin. tert. Ord.* §. III. à la fin.

Digitized by Google

Pl. VIII. dre ces racines par couples & en faire l'équation du ſecond dégré $yy - XX = 0$, où il n'y a point de puiſſance impaire de y. Donc, dans l'équation de la Courbe toute compoſée de pareilles équations, on ne verra aucune puiſſance impaire de y. Ch. VI. §. 70.

71. Il eſt clair par les §§. préced. que tout Diamétre d'une Ligne du ſecond Ordre eſt un Diamétre abſolu. Car, dans cet Ordre, chaque abſciſſe ne peut avoir que deux ordonnées [§. 41]. Donc, ſi leur ſomme eſt égale à zéro, ce qui eſt le propre des Diamétres [§. 67], il faut que l'une étant poſitive & l'autre négative, elles ſoient égales : ce qui conſtituë la nature du Diamétre abſolu [§. *préc.*]

Par conſéquent, quelque poſition qu'on donne aux ordonnées d'une Ligne du ſecond Ordre, pourvû que chaque abſciſſe ait deux ordonnées, on pourra toûjours leur trouver un Diamétre abſolu. Car quelque poſition qu'ayent les ordonnées d'une Courbe, on peut toûjours leur trouver un Diamétre, pourvû que, dans l'équation, la plus haute puiſſance d'y ait le même expoſant que l'Ordre de la Courbe [§. 68]. Donc, dans le ſecond Ordre, pourvû qu'y s'éléve au quarré, c'eſt-à-dire, pourvû que chaque abſciſſe ait deux ordonnées [§. 41], la Courbe aura un Diamétre. Et dans cet Ordre, tout Diamétre eſt abſolu.

72. Il n'en eſt pas de même dans les Ordres ſupérieurs. Une Courbe peut n'avoir aucun Diamétre abſolu, parce qu'encore qu'on puiſſe toûjours faire évanouïr quelques-uns des termes de l'équation qui renferment des puiſſances impaires d'y, il n'eſt pas toûjours poſſible de les faire tous diſparoître.

Dans les Courbes, par ex. du troiſiéme Ordre, repréſentées généralement par l'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx$

Ch. VI. §. 72. $+fxx+gy^3+hxyy+ixxy+lx^3=0$, ſi l'on demande quel doit être le raport des coëfficients a, b, c, d, &c. qui permet que la Courbe ait un Diamétre abſolu : On peut répondre 1°. que cela aura lieu quand b, e, g, & i, qui multiplient les puiſſances impaires d'y, ſont zéro : & alors la Ligne même des abſciſſes eſt le Diamétre. Car l'équation, réduite à $yy+\frac{lx^3+fx^2+cx+a}{bx+d}=0$, a deux racines égales, l'une poſitive, l'autre négative, $=\pm\sqrt{-\frac{lx^3+fx^2+cx+a}{bx+d}}$, à moins qu'elles ne ſoient toutes deux imaginaires. 2°. La Courbe peut avoir un Diamétre abſolu différent de l'Axe des abſciſſes. Et pour déterminer en quel cas la choſe eſt poſſible, on donnera aux deux Axes une poſition indéterminée, en ſubſtituant $m+pz+ru$ à x & $n+qz+su$ à y [§. 24], ou ſeulement $qz+su$, parce que la poſition de l'Origine ſur l'Axe des abſciſſes étant indifférente, on peut la placer au point où la nouvelle Ligne des abſciſſes coupe la primitive, ce qui rend $n=0$. Après cette ſubſtitution, ſi on égale à zéro les coëfficients des termes u, uz, uzz, u^3 qui contiennent les puiſſances impaires de l'ordonnée u, on aura ces quatre équations.

Pl. VIII.

$(A)\ldots bs+cr+ems+2fmr+imms+3lmmr=0$

$(B)\ldots 2dqs+eps+eqr+2fpr+2bmqs+2imqr+2impr+6lmpr=0$

$(C)\ldots 3gqqs+3hpqs+hqqr+2ipqr+ipps+3lppr=0$

$(D)\ldots gs^3+hrss+irrs+lr^3=0$

On peut déterminer le raport de s à r, ou la valeur de la fraction $\frac{s}{r}$ par l'éq : $D\ldots g\frac{s^3}{r^3}+h\frac{s^2}{r^2}+i\frac{s}{r}+l=0$, qui étant du troiſiéme dégré a toûjours au moins une racine réelle. Ce raport ainſi déterminé, ſi on le

PL. VIII. CH. VI. §. 72.

ſubſtituë dans l'éq: A réduite à cette forme $m^2 + \frac{2f + e\frac{s}{r}}{3l + i\frac{s}{r}} m$ $+ \frac{c + b\frac{s}{r}}{3l + i\frac{s}{r}} = 0$, on déterminera la valeur de m. Et comme l'éq : B donne $\frac{q}{p} = \frac{(e + 2im)\frac{s}{r} + 2f + 6lm}{e + 2im + (2d + 2hm)\frac{s}{r}}$, le raport de q à p eſt déterminé, dès que $\frac{s}{r}$ & m ſont connus. Mettant donc ces valeurs de $\frac{q}{p}$ & de $\frac{s}{r}$ dans l'éq: C qui ſe réduit à $3g \cdot \frac{q^2}{p^2} \cdot \frac{s}{r} + 2b \cdot \frac{q}{p} \cdot \frac{s}{r} + i \cdot \frac{s}{r} + b \cdot \frac{q^2}{p^2}$ $+ 2i \cdot \frac{q}{p} + 3l = 0$, on aura l'équation qui exprime le raport que doivent avoir entr'eux les coëfficients $b, c, d, e, f, g, h, i, l$, afin que la Courbe ſoit ſuſceptible de Diamétres abſolus.

Mais ce Calcul ſera fort long, ſi l'on ne trouve quelques abrégez. On y ſuppléera en quelque ſorte, ſi l'on conſidére qu'on peut toûjours faire évanouïr le terme u^3 par la réſolution de l'équat: $g\frac{s^3}{r^3} + b\frac{s^2}{r^2} + i\frac{s}{r} + l = 0$. qui détermine la poſition des ordonnées qui ne repugne pas à un Diamétre abſolu. Cette équation ne pouvant avoir qu'une ou trois racines réelles, il en ſuit, qu'une Ligne du troiſiéme Ordre ne ſauroit avoir qu'un ou trois Diamétres abſolus. Mais toute Ligne de cet Ordre n'en eſt

CH. VI. §. 72. PL. VIII.

eſt pas ſuſceptible. Suppoſant que l'équation de la Courbe, après l'évanouïſſement du terme u^3, ſoit $(Az+B)u^2+(Czz+Dz+E)u+Fz^3+Gzz+Hz+I=o$, il faut encore voir ſi l'on peut donner à l'axe des Abſciſſes une poſition qui faſſe diſparoitre le ſecond terme. Car on ne peut plus changer la poſition des ordonnées ſans faire reparoître u^3. On donnera donc à l'Axe des abſciſſes une poſition quelconque [§. 25] en ſubſtituant pz pour z & $m+u+qz$ pour u; ce qui transforme l'équation en $(Apz+B)(mm+2mu+uu+2mqz+2quz+qqzz)+(Cppzz+Dpz+E)(m+u+qz)+Fp^3z^3+Gp^2z^2+Hpz+I=o$, dont les termes qui renferment la prémiére puiſſance d'u [ce ſont ceux qu'il faut anéantir] ſont $(Apz+B)(2mu+2quz)+(Cppzz+Dpz+E)u$, ou $(2Apq+Cpp)uzz+(2Amp+2Bq+Dp)uz+(2Bm+E)u$. Ces trois termes égalés à zéro donnent ces trois équations $2Apq+Cpq=o$, $2Amp+2Bq+Dp=o$, & $2Bm+E=o$. Des deux prémiéres on déduit $2\frac{A}{C}=-\frac{p}{q}=\frac{2B}{2Am+D}$. Donc $\frac{A}{C}=\frac{B}{2Am+D}=$ [puiſque l'éq : $2Bm+E=o$ donne $2m=-\frac{E}{B}$] $\frac{B}{D-\frac{AE}{B}}=\frac{BB}{DB-AE}$. Ainſi on a l'éq : $CBB=ABD-AAE$, ou $AAE-ABD+BBC=o$, pour déterminer le raport des coëfficients A, B, C, D, E propres à donner à la Courbe un Diamétre abſolu.

73. A L'IMITATION des Diamétres, Mr. DE BRAGELONGNE * a imaginé les *Contre-Diamétres*. C'eſt le nom

* *Hiſt. de l'Acad.* 1732. pag. 70.

Digitized by Google

Pl. VIII. nom qu'il donne à un Axe des abſciſſes tel que les abſciſſes oppoſées égales ont des ordonnées oppoſées égales. Il coupe donc la Courbe en deux parties égales & ſemblables, comme le Diamétre, mais avec cette différence, que les parties ſemblables ſont oppoſées : celle qui eſt dans l'angle des coordonnées poſitives étant égale & ſemblable à celle qui ſe trouve dans l'angle des coordonnées négatives, &c. ſi bien que, quand un Axe eſt en même tems Diamétre & Contre-Diamétre, la Courbe ſe trouve partagée par ſes Axes en quatre parties égales & ſemblables ; à ſuppoſer, comme on le fait ici, que les ordonnées ſont perpendiculaires aux abſciſſes. Telle eſt la Courbe qu'on a examinée au §. 16. Ch. VI. §. 73.

L'équation d'une Courbe, dont la Ligne des abſciſſes eſt un Contre-Diamétre, doit être telle que, changeant $+x$ en $-x$, & $+y$ en $-y$, elle reſte préciſément la même. Car alors les $-x$ égales aux $+x$ auront des $-y$ égales aux $+y$. Cela a lieu toutes les fois que, dans l'équation miſe ſur le Triangle analytique [§. 35], il manque tous les Rangs pairs, à compter du plus haut Rang en deſcendant. Ainſi l'éq : (A) du quatriéme Ordre, à qui il manque le ſecond & quatriéme Rangs, ne changera

(A)

$$my^4 + nxy^3 + oxxyy + px^3y + qx^4$$
$$+ dyy + exy + fxx$$
$$+ a$$

point, ſi au lieu de $+x$ on écrit $-x$ & $-y$ au lieu de $+y$. Une pareille ſubſtitution changera l'éq : (B) du troiſiéme Ordre, à qui il manque auſſi les Rangs pairs, en l'éq : (C), qui eſt juſtement la même, quoique les ſignes

CH. VI. §. 73. gnes ſoient changez : Car ſi $+B=0$, auſſi $-B=0$, PL. VIII. c'eſt-à-dire, $C=0$.

$$(B) \qquad +gy^3 +hxyy +ixxy +lx^3 \qquad +by +cx$$

$$(C) \qquad -gy^3 -hxyy -ixxy -lx^3 \qquad -by -cx$$

74. QUAND l'équation d'une Courbe indique un Contre-Diamétre, on peut changer, comme on voudra, la poſition des abſciſſes & des ordonnées ; elle conſervera ſon Contre-diamétre, pourvû qu'on conſerve la même Origine. Car cette tranſpoſition des abſciſſes & des ordonnées ſe fait [§. 25] en ſubſtituant $pz+ru$ à x, & $qz+su$ à y. Or puiſqu'ici les z & les u ſont du même dégré que les x & les y, il eſt clair que z & u dans l'équation transformée ſeront au même dégré que x & y dans les termes correſpondants de la propoſée : de ſorte que les termes, qui naiſſent de la ſubſtitution faite en un Rang quelconque de l'équation propoſée, reſtent dans le même Rang de la transformée. Donc, puiſque, la Courbe ayant un Contre-Diamétre, les Rangs pairs manquent dans la propoſée [§. *préc.*], ils manqueront auſſi dans la transformée. Ainſi la Ligne des z eſt un Contre-Diamétre, auſſi bien que la Ligne des x.

Cela n'eſt pas moins évident par cette Démonſtration. Soit PAp le Contre-Diamétre d'une Courbe MAm, A l'Origine, d'où prenant les abſciſſes AP, Ap oppoſées & égales, on aura les ordonnées PM, pm auſſi oppoſées & égales. Donc les triangles APM, Apm ſont égaux & ſemblables. Donc AM eſt égale & oppoſée à Am. Maintenant, ſi l'on change l'Axe des abſciſſes & qu'on lui donne une poſition quelconque QAq, pourvû qu'il paſſe par la même Fig. 67.

PL. VIII. même Origine A, & qu'on méne auſſi comme on voudra les ordonnées MQ, mq; puiſqu'elles ſont paralléles, les triangles AMQ, Amq ſont ſemblables & égaux, à cauſe de AM égale à Am. Donc les abſciſſes oppoſées & égales AQ, Aq, ont des ordonnées QM, qm oppoſées & égales. Donc QAq eſt auſſi un Contre-Diamétre. CH. VI. §. 74.

75. ON VOIT par-là que le Contre Diamétre, dans les Courbes qui en ſont ſuſceptibles, dépend du choix de l'Origine. Elle doit être placée de maniére qu'elle diviſe en deux parties égales toutes les droites MAm, qui, menées par ce point A, ſe terminent de part & d'autre à la Courbe. De ſorte que de toutes parts de l'Origine les parties directement oppoſées de la Courbe font une ſimétrie parfaite. Le Point qui a cette ſituation s'apelle le *Centre* de la Courbe *.

76. Pour reconnoître par l'équation d'une Courbe, ſi elle peut avoir un Centre, & pour déterminer le raport de ſes coëfficients qui l'en rend ſuſceptible, auſſi bien que la poſition de ce Centre ; on tranſportera l'Origine en un point quelconque, écrivant [§. 25 ou 29] $m + z$ pour x, & $n + u$ pour y dans l'équation de cette Courbe. Puis on ſuppoſera que les rangs pairs, à compter dès le plus haut, s'évanouïſſent, & les équations que donne cette ſuppoſition ſont celles qui déterminent le raport des coëfficients propre à donner un Centre à la Courbe, & qui fixent la poſition de ce Centre.

Exemple I. L'équation générale des Lignes du ſecond Ordre eſt $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$. Par la ſubſtitution de $m + z$ à x, & de $n + u$ à y, elle ſe change en

$$duu$$

* NEWTON, *Enumer. lin. tert. Ord.* §. III. Mr. DE GUA *Uſage de l'Anal. &c.* pag. 1.

Digitized by Google

Fig. 59.

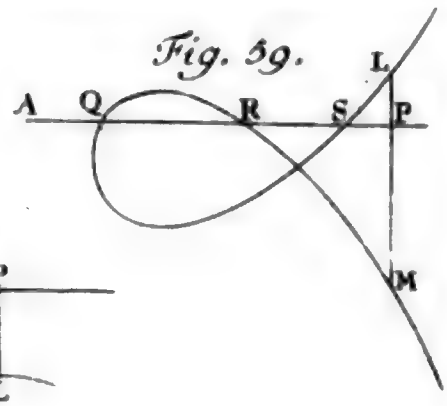


Fig. 60.

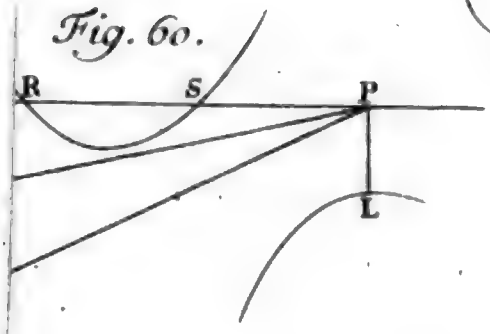


Fig. 62.

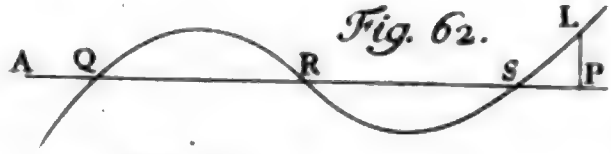


Fig. 64.

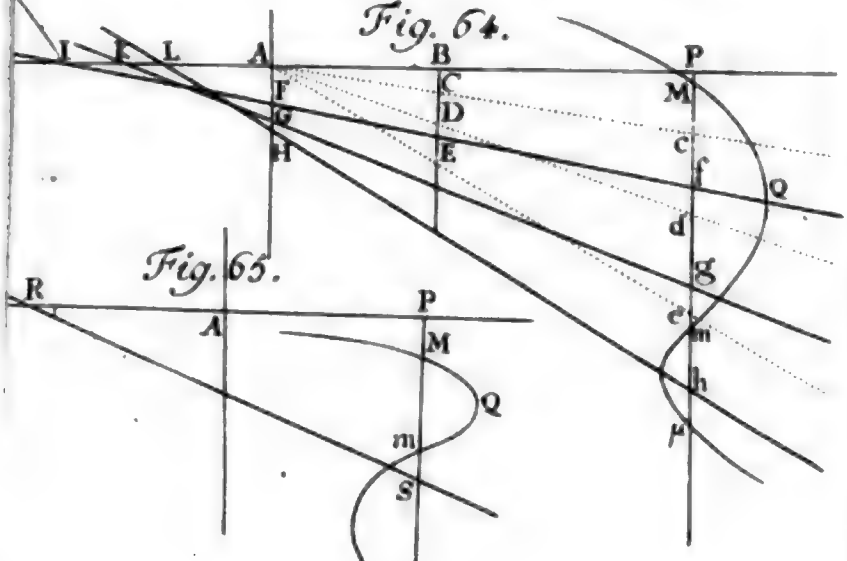
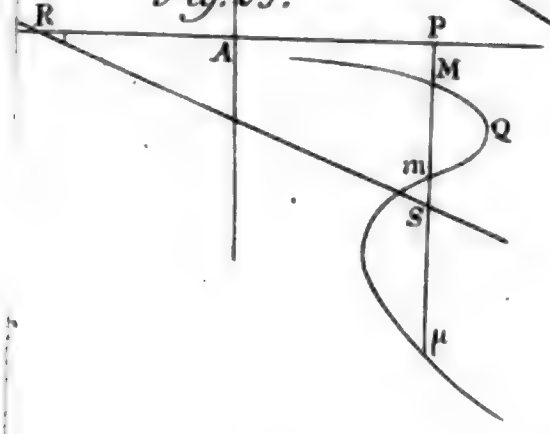
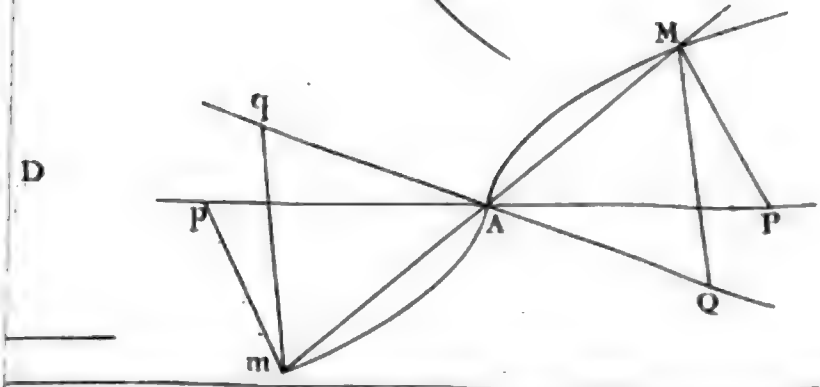


Fig. 65.





Ch. VI. §. 76.

$$\left.\begin{array}{l} duu \;+\; ezu \;+fzz \\ +(b+em+2dn)u \;+\; (c+en+2fm)z \\ +(a+bn+cm+dnn+enm+fmm) \end{array}\right\} = 0$$

Pl. VIII.

On fera disparoître le second Rang, en égalant $b + em + 2dn$ & $c + en + 2fm$ chacun à zéro, d'où l'on tirera $m = \frac{be - 2cd}{4df - ee}$ & $n = \frac{ce - 2bf}{4df - ee}$. Donc, en général, les Courbes du second Ordre peuvent avoir un Centre, dont la position est déterminée par ces valeurs de m & de n. Car ce Centre est le point dont m est l'abscisse & n l'ordonnée.

Il n'y a qu'une exception; c'est quand $4df - ee = 0$. Alors m & n sont infinies; ce qui transporte le Centre infiniment loin & le fait disparoître.

Cependant, si $4df - ee$ étant zéro, $be - 2cd$ est aussi zéro, on aura $e = \frac{2cd}{b}$, & cette valeur substituée dans $4df - ee = 0$, la change en $4df - \frac{2cde}{b} = 0$, ou divisant par $\frac{2d}{b}$, en $2bf - ce = 0$. Donc $ce - 2bf$ est aussi zéro, & par conséquent n aussi bien que m s'expriment par la fraction $\frac{0}{0}$, qui est d'une valeur indéterminée. La position du Centre est donc indéterminée. Mais dans ce cas, l'équation générale, réduite à $a + by + bx\sqrt{\frac{f}{d}} + dyy + 2xy\sqrt{df} + fxx = 0$, est réductible en ces deux équations du premier Ordre $y\sqrt{d} + x\sqrt{f} + \frac{b + \sqrt{(bb - 4ad)}}{2\sqrt{d}} = 0$, & $y\sqrt{d} + x\sqrt{f} + \frac{b - \sqrt{(bb - 4ad)}}{2\sqrt{d}} = 0$. Elle n'exprime donc que deux Droites paralléles

Pl. VIII. [§. 40], qui ont une infinité de Centres, aſſavoir tous les points de la Droite, qui leur eſt paralléle & autant éloignée de l'une que de l'autre. Ch. VI. §. 76.

Au reſte, tout Contre-Diamétre d'une Ligne du ſecond Ordre en eſt auſſi un Diamétre abſolu. Car l'équation, qui exprime la nature d'une Ligne du ſecond Ordre relativement à l'Origine placée au Centre, aura cette forme $Ayy + Bxy + Cxx + D = 0$, puiſque le ſecond Rang y doit manquer. Et l'on peut toûjours faire diſparoître le terme Bxy ſans changer l'Origine ni l'Axe des abſciſſes, mais en donnant ſeulement aux ordonnées une poſition convenable, c'eſt-à-dire, en faiſant $y = 2Cu$ & $x = z - Bu$ [§. 25], ce qui transformera l'éq : $Ayy + Bxy + Cxx + D = 0$, en $(4ACC - BBC)uu + Czz + D = 0$, où il n'y a aucune puiſſance impaire de u. Ce qui fait voir que la Ligne des z eſt un Diamétre abſolu, auſſi bien qu'un Contre-Diamétre.

Exemple 2. L'équation générale des Lignes du troiſiéme Ordre, $a + by + cx + dyy + exy + fxx + g y^3 + hxyy + ix^2 y + kx^3 = 0$, par la ſubſtitution de $m + z$ à x, & de $n + u$ à y, ſe change en $0 =$

$$\begin{array}{c} gu^3 + hu^2 z + iuz^2 + kz^3 \\ (3gn+hm+d)u^2 + (2hn+2im+e)uz + (3lm+in+f)zz \\ \left(\begin{array}{c}3gnn+2hmn+imm\\ +2dn+em+b\end{array}\right)u + \left(\begin{array}{c}3lmn+2imn+hnn\\ +2fm+en+c\end{array}\right)z \\ gn^3 + hn^2 m + inm^2 + lm^3 \\ + \left(\begin{array}{c} + dn^2 + enm + fm^2 \\ + bn + cm \end{array}\right) \\ + a \end{array}$$

Si la Courbe a un Centre, le ſecond & quatriéme Rang doivent diſparoître. L'évanouïſſement du ſecond donne ces trois équations $3gn + hm + d = 0$, $2hn + 2im + e = 0$ &

CH. VI. §. 76. & $3lm + in + f = 0$. La comparaiſon de la 1e. & de la 3e. donnent $m = \frac{di - 3fg}{9gl - hi}$ & $n = \frac{fh - 3dl}{9gl - hi}$. Et ces valeurs ſubſtituées dans la 2e., la changent en $ehi - 2dii - 2fhh + 6dhl + 6fgi - 9egl = 0$, équation qui exprime un raport des coëfficients d, e, f, g, h, i, l, ſans lequel la Courbe ne ſauroit avoir un Centre. Il faut de plus ſubſtituer ces mêmes valeurs de m & de n, dans l'éq: $gn^3 + hnnm + \&c = 0$, faite en égalant le 4e. Rang à zéro, & cette ſubſtitution donnera un ſecond raport des coëfficients également néceſſaire pour que la Courbe du troiſiéme Ordre puiſſe avoir un Centre : mais ce raport ſeroit fort compliqué. Il ſera plus ſimple, en appliquant le Principe à une équation moins compoſée que la générale. PL. VIII.

Par ex. l'éq : $xyy + Ey + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ repréſente la plus grande partie des Courbes du troiſiéme Ordre. En la comparant avec l'éq : générale, on aura $a = D$, $b = E$, $c = C$, $d = 0$, $e = 0$, $f = B$, $g = 0$, $h = 1$, $i = 0$, $l = A$. Les trois équations que donne l'évanouïſſement du 2e. rang, ſe réduiſent donc à $0n + m + 0 = 0$, $2n + 0m + 0 = 0$, & $3Am + 0n + B = 0$, d'où l'on tire $m = 0$, $n = 0$, $B = 0$. Et ces valeurs ſubſtituées dans l'équation qui réſulte de l'évanouïſſement du 4e. Rang, la réduiſent à $0 = a = D$. Ainſi la Courbe ne peut avoir de Centre, à moins que B & D ne ſoient zéro, & alors ce Centre eſt ſur l'Origine même, puiſque m & n ſont l'une & l'autre égales à zéro.

CHAPITRE VII.

Détermination des plus grands termes d'une équation. Principes de la Méthode des Series ou Suites infinies.

77. IL N'Y A rien de plus remarquable dans les Courbes, que les Branches infinies, & les Points ſinguliers : c'eſt le nom qu'on donne aux Points d'une Courbe qui ont quelque choſe qui les diſtingue des autres. C'eſt par le nombre, l'eſpéce & la poſition des Branches infinies, que les Courbes ſe diviſent en Genres & Eſpèces : & c'eſt la nature, le nombre & la poſition des Points ſinguliers, qui caractériſent les diverſes Courbes d'une même Eſpèce.

Voici le Principe qui nous guidera dans ces Recherches. Si dans une équation indéterminée, on ſuppoſe une des variables x ou y infinie ou infiniment petite, cette ſuppoſition rend certains termes de l'équation infiniment plus grands que les autres. On peut donc retrancher ceux-ci ſans ſcrupule, parce qu'ils ne ſont rien en comparaiſon des plus grands, qui forment ſeuls toute l'équation. Par ce retranchement elle devient plus ſimple & plus traitable. Il ne s'agit que d'avoir une Régle pour diſcerner dans une équation propoſée, quels ſont les termes que la ſuppoſition d'x ou d'y infiniment grande ou infiniment petite, rend infiniment plus grands que tous les autres.

78. IL EST bien clair que quand une variable devient infinie, toutes ſes puiſſances & toutes ſes racines ſont auſſi infinies.

infinies.* Mais ces infinis conſtituent divers *Ordres*, ſelon les dégrés de leurs expoſants. Quand x eſt infinie, ſon quarré xx, qui eſt le produit de l'infini multiplié par l'infini, ou l'infini repeté infiniment ſouvent, ſon quarré, dis-je, eſt infiniment infini, ou l'infini du ſecond Ordre. Le cube xxx, qui eſt le quarré xx multiplié par l'infini x, eſt l'infini du troiſiéme Ordre, & ainſi de ſuite. Ces Ordres de l'infini ſont les *Ordres potentiels*. CH. VII. §. 78.

Il faut auſſi reconnoître les *Ordres radicaux*. Quoique $x^{1:2}$, ou $\sqrt{x}$ ſoit infinie, aucun fini ne pouvant l'égaler, elle eſt pourtant infiniment moindre que x, puiſqu'elle eſt moyenne proportionelle entre x & l'unité, entre l'infini & le fini. Et $x^{1:3}$, ou $\sqrt[3]{x}$, auſſi infinie, eſt infiniment moindre que $x^{1:2}$.

En général, toute puiſſance, parfaite ou imparfaite, de l'infini $[x]$ eſt infiniment plus grande que toute autre puiſſance du même infini, dont l'expoſant eſt inférieur au ſien. x^{m+n} eſt infiniment plus grande que x^m, parce que x^{m+n} eſt x^m multipliée par x^n. Or x^n eſt infinie. Donc x^{m+n} eſt x^m priſe une infinité de fois.

Mais les puiſſances d'un expoſant négatif, dont la racine eſt infinie, ſont des infiniment petits. Par ex. x^{-1}, qui eſt $\frac{1}{x}$, eſt infiniment petite. Car le quotient d'une Diviſion diminuant dans la même proportion que le diviſeur augmente, le fini $[1]$ diviſé par l'infini $[x]$ aura un quotient $[\frac{1}{x}]$ infiniment petit. Et x^{-2}, ou $\frac{1}{xx}$, eſt encore infiniment plus petite, puiſque c'eſt l'infiniment petit

* FONTENELLE, *Geom. de l'Infini.* Part. I. Sect. 2.

Digitized by Google

CH. VII. §. 78.

tit $\left[\frac{1}{x}\right]$ diviſé par l'infini $[x]$, ou l'infinitiéme partie de l'infiniment petit. Par la même raiſon x^{-3} eſt d'un Ordre encore plus bas, & ainſi de ſuite. Mais $x^{-1:2}$, ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$, quoiqu'infiniment petite, puiſque $\sqrt{x}$ eſt infiniment grande, $x^{-1:2}$, dis-je, eſt infiniment moins petite que x^{-1}: car $x^{-1:2}$ [ou $\frac{1}{\sqrt{x}}$] eſt la moyenne proportionelle entre 1 & x^{-1} [ou $\frac{1}{x}$].

79. QUAND on ſuppoſe une variable infiniment petite, toutes ſes puiſſances & toutes ſes racines d'un expoſant poſitif ſont auſſi infiniment petites; mais avec la même gradation & la même diſtinction d'Ordre que dans l'infini, en ſorte que de deux puiſſances d'une même racine infiniment petite, celle qui a le plus grand expoſant eſt infiniment plus petite que l'autre. Si x eſt infiniment petite, xx eſt encore infiniment plus petite, ou l'infiniment petit du ſecond Ordre, xxx celui du troiſiéme Ordre, &c. Car 1, x, xx, xxx, *&c.* ſont des quantités proportionelles; de ſorte que 1 étant infiniment plus grand que x, x eſt infiniment plus grande que xx, & xx que xxx, & en général x^m eſt infiniment plus grande que x^{m+n}.

A ces *Ordres potentiels* des infiniment petits, il faut joindre les *Ordres radicaux*. Puiſque $x^{1:2}$ eſt moyenne proportionelle entre le fini [1] & l'infiniment petit [x], elle eſt infiniment petite, quoiqu'elle le ſoit infiniment moins

moins que x. Et $x^{1:3}$, autre infiniment petit, l'eſt infiniment moins que $x^{1:2}$. Car $x^{1:3}$ [$= x^{2:6}$] eſt à $x^{1:2}$ [$= x^{3:6}$] comme le fini [1] à l'infiniment petit [$x^{1:6}$]. CH. VII. §. 79.

Mais la racine x étant infiniment petite, les puiſſances ou racines d'un expoſant négatif ſont infinies. Ainſi x^{-1} [ou $\frac{1}{x}$] eſt l'infini du prémier Ordre, parce que le fini [1] contient l'infiniment petit [x] une infinité de fois. Et x^{-2} [ou $\frac{1}{xx}$], étant l'infini [$\frac{1}{x}$] multiplié par lui-même, eſt l'infini de l'infini, ou l'infini du ſecond Ordre, &c. Mais $x^{-1:2}$ [ou $\frac{1}{x^{1:2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$] eſt un infini radical, &c.

80. CETTE ſubordination des infinis & des infiniment petits étant bien établie, il ſemble d'abord que rien ne ſoit plus aiſé que de reconnoître dans une équation les termes que la ſuppoſition d'x ou d'y infinie ou infiniment petite rend infiniment plus grands que les autres. Si on ſuppoſe x infiniment grande, il ſemble qu'on n'ait qu'à choiſir les termes où x a le plus grand expoſant: au contraire, ſi on ſuppoſe x infiniment petite, on croiroit n'avoir qu'à prendre les termes où ſon expoſant eſt le plus petit. Mais ce ſeroit conclure avec précipitation. Car l'équation, ou la Courbe qu'elle repréſente, peut être telle qu'à x infinie réponde y infinie, ou finie, ou infiniment petite. Il faudra donc, du moins par raport aux termes où entrent x & y, avoir égard aux expoſants de ces deux variables. Si, par ex., le terme x^3y eſt celui où x a le plus grand expoſant,

CH. VII. §. 80. poſant, on ne doit pas ſe preſſer de conclure que ce terme eſt infiniment plus grand que xy^4 autre terme de l'équation. Car ſi x & y ſont deux grandeurs infinies d'un même Ordre, x^3y n'eſt que du quatriéme Ordre de l'infini, au lieu que xy^4 eſt du cinquiéme Ordre. C'eſt donc plutôt xy^4 qui ſurpaſſe infiniment x^3y.

On ne doit pas non plus juger qu'un terme ſoit d'un Ordre ſupérieur à un autre, parce que les expoſants de x & de y pris enſemble font une ſomme plus grande dans l'un que dans l'autre. Par ce principe on concluroit que xy^4 eſt infiniment plus grand que x^3y, & cela ſeroit vrai, ſi x & y étoient deux infinis du même Ordre. Mais ſi x étant infinie, y eſt ou infiniment petite, ou finie, ou ſeulement d'un Ordre plus petit que $x^{2:3}$, x^3y l'emporte infiniment ſur xy^4.

Quel moyen y aura-t-il donc pour diſcerner les plus grands termes d'une Equation, puiſqu'il ſemble qu'on ne les peut reconnoître ſans ſavoir de quel Ordre eſt y par raport à x, & qu'on ne peut découvrir ce raport de y à x ſans avoir ſéparé des autres les plus grands termes de l'équation? Quel fil nous conduira dans ce Labyrinthe?

81. D'ABORD il eſt évident qu'on ne ſauroit ſuppoſer qu'un ſeul terme de l'équation ſoit infiniment plus grand que tous les autres. Car tous les autres termes s'évanouïroient en comparaiſon de celui-là & pourroient être retranchés. Alors ce terme ſeul ſeroit égal à zéro, & le plus grand terme de l'équation ne ſeroit rien: ce qui eſt abſurde.

Les plus grands termes ſont donc au moins au nombre de deux. Mais rien n'empêche qu'on ne prenne deux termes quelconques, & qu'on ne les ſuppoſe les plus grands de l'équation; à moins que les conſéquences de cette ſuppoſition ne détruiſent la ſuppoſition même.

Qu'on

Digitized by Google

Qu'on propoſe, par ex. l'éq : $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$, & qu'on ſuppoſe d'abord x infinie. On commencera par comparer x^2y & ay^2, en ſuppoſant que ces termes ſont toute l'équation, & qu'étant infiniment plus grands que $-a^2x$, ce terme peut être impunément retranché. On aura donc $x^2y + ay^2 = 0$, ou $x^2y = -ay^2$, & diviſant par $-ay$, $y = -\frac{x^2}{a}$. Donc x étant infinie, y eſt un infini du ſecond Ordre. Donc les termes x^2y & ay^2 ſont des infinis du quatriéme Ordre, en comparaiſon deſquels a^2x, qui n'eſt qu'un infini du premier Ordre, s'évanouït. Il n'y a donc rien d'abſurde à ſuppoſer que x^2y & ay^2 ſont les plus grands termes de l'équation. CH VII. §. 81.

On peut enſuite comparer x^2y & $-a^2x$, & ſuppoſer toute l'équation réduite à $x^2y - a^2x = 0$, ce qui, tranſpoſant & diviſant par x^2, donne $y = \frac{a^2}{x}$. Donc x étant infinie, y eſt infiniment petite, & dans cette ſuppoſition, le terme ay^2 eſt un infiniment petit du ſecond Ordre, qui s'évanouït auprès des termes infinis x^2y & a^2x. On a donc pû faire ſans abſurdité cette ſuppoſition.

Il reſte à comparer les termes ay^2 & $-a^2x$. S'ils ſont infiniment plus grands que x^2y, toute l'équation ſe réduit à $ay^2 - a^2x = 0$, qui donne $y = a^{1:2}x^{1:2}$. Mais cette valeur de y, ſubſtituée dans x^2y, le change en $a^{1:2}x^{5:2}$. Ce terme x^2y, ou $a^{1:2}x^{5:2}$, qu'on ſuppoſoit infiniment plus petit que les deux autres ay^2 [$= a^2x$], & $-a^2x$, eſt donc infiniment plus grand, puiſque ſon expoſant [5 : 2] ſurpaſſe le leur [1]. Ainſi la ſuppoſition ſe détruit elle-même & ne peut ſubſiſter.

Suppoſons maintenant x infiniment petite. Et ſi l'on compare d'abord les termes ay^2 & $-a^2x$ en les ſuppo-

CH. VII. §. 81. sant infiniment plus grands que x^2y, cette ſuppoſition ne méne à aucune abſurdité. Elle réduit l'éq : à $ay^2 - a^2x = 0$, qui donne $y = a^{1:2}x^{1:2}$. Et cette valeur ſubſtituée dans x^2y, le transforme en $a^{1:2}x^{5:2}$, où l'expoſant d'x [5 : 2] eſt plus grand que dans les deux autres termes ay^2 [$= a^2x$] & $-a^2x$. Or x étant infiniment petite, les puiſſances d'un plus haut expoſant ſont infiniment plus petites que celles d'un expoſant inférieur [§. 79]. Donc x^2y eſt infiniment plus petit que ay^2 & que $-a^2x$; ce qui eſt conforme à la ſuppoſition.

Mais, ſi on ſuppoſoit que le terme $-a^2x$ eſt infiniment plus petit que les deux autres, on réduiroit l'équation à $x^2y + ay^2 = 0$, ce qui donne $y = -\frac{x^2}{a}$. Ainſi x^2y & ay^2 ſe transforment en $-\frac{x^4}{a}$ & $+\frac{x^4}{a}$. Ce ſont donc des infiniment petits du quatriéme Ordre, qui diſparoiſſent auprès de $-a^2x$, infiniment petit du premier Ordre. La ſuppoſition ſe contredit donc à elle-méme.

J'en dis autant de la ſuppoſition, qui établiroit x^2y & $-a^2x$ pour les plus grands termes de l'équation. Il en réſulte $y = \frac{aa}{x}$, c'eſt-à-dire, y infinie, quand x eſt infiniment petite. Donc le terme ay^2, qu'on ſuppoſoit le plus petit, eſt réellement infiniment plus grand que les autres : ce qui détruit la ſuppoſition.

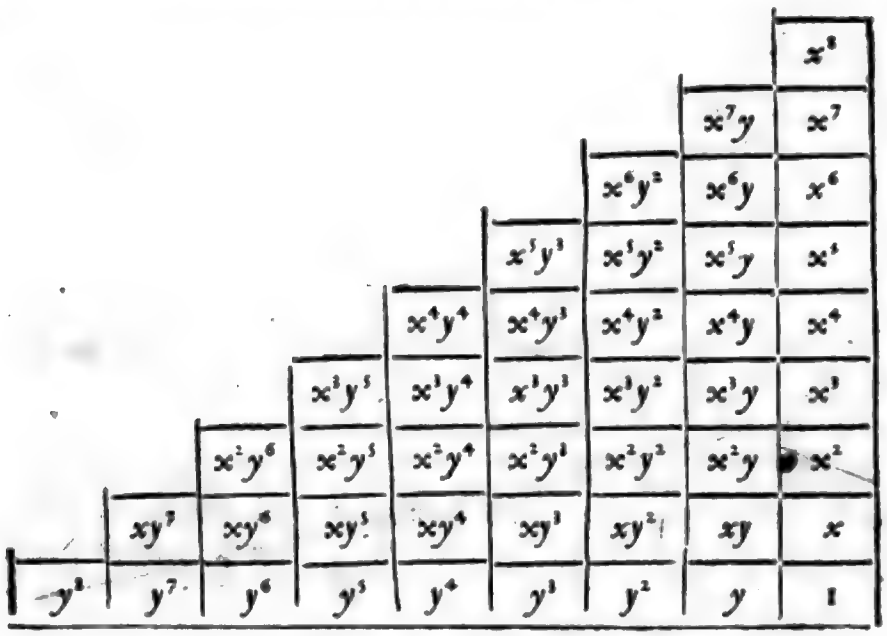
Par tout ce détail il paroît, qu'à ſuppoſer x infinie, l'équation propoſée $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$ ſe réduit à ces deux-ci, $x^2y + ay^2 = 0$, ou $xx + ay = 0$, & $x^2y - a^2x = 0$, ou $xy - aa = 0$: & qu'à ſuppoſer x infiniment petite, elle ſe réduit à celle-ci ſeulement, $ay^2 - a^2x = 0$, ou $y^2 - ax = 0$.

82. MAIS

82. MAIS ce qui a été facile dans un Exemple, où l'équation propoſée n'avoit que trois termes, deviendroit fort pénible, ſi l'on avoit eu une équation plus complexe, où le nombre des termes engageroit à beaucoup de comparaiſons, la plûpart infructueuſes. Dans ces Cas-là, il eſt fort commode de ſe ſervir du Triangle analytique, & de placer chaque terme de l'équation dans la Caſe qui lui eſt aſſignée. En concevant ce Triangle couché ſur la bande ſans x, lorſqu'on ſuppoſe x infinie ou infiniment petite [on le coucheroit ſur la bande ſans y ſi la ſuppoſition étoit de y infinie ou infiniment petite] il eſt clair que de de tous les termes qui ſe trouvent dans une même bande perpendiculaire, on ne peut regarder comme un des plus grands termes de l'équation que celui qui occupe la plus haute place de cette bande, en ſuppoſant x infinie, ou celui qui y eſt placé le plus bas, en prenant x pour infiniment petite. Car dans tous les termes d'une même colomne, y ayant le même expoſant, leur ſubordination dépend uniquement des expoſants d'x. Donc, x étant infinie, le plus grand terme de la colomne eſt celui où x a le plus grand expoſant, c'eſt-à-dire, celui qui eſt placé le plus haut; & x étant infiniment petite, le plus grand terme de la colomne eſt celui où x a le plus petit expoſant, celui qui eſt placé le plus bas [§§. 78. 79].

CH. VII. §. 82.

Ch. VII. §. 81.



83. CETTE considération ſert déjà beaucoup à diminuer les nombre des comparaiſons qu'il faudroit faire pour diſcerner les plus grands termes d'une équation [§. 81]. Mais pour éviter toutes les comparaiſons inutiles, il faut y joindre cette obſervation. C'eſt que ſi on compare deux termes quelconques, en les ſuppoſant d'un même Ordre, & qu'on méne une ligne droite par les centres des Caſes où logent ces deux termes, tous les termes qui ſont dans les Caſes dont les centres ſe trouvent ſur cette même Droite, ſeront auſſi du même Ordre que les termes comparés. Et que toutes les Caſes, dont les centres ſont au-deſſus de cette ligne droite renferment des termes d'un Ordre ſupérieur ; comme, au contraire, les Caſes dont les centres ſont au-deſſous de la ligne droite, contiennent des termes d'un Ordre inférieur.

Ainſi, quand on veut comparer les termes x^2 & x^1y^2, en

en les ſuppoſant d'un même Ordre ; ils ſeront encore d'un même Ordre, après diviſé l'un & l'autre par une même grandeur x^2. Donc $[\frac{x^2}{x^2} =]\ 1$ & $[\frac{x^3y^2}{x^2} =]\ xy^2$ ſont d'un même Ordre. L'unité étant une grandeur finie, xy^2 eſt auſſi une grandeur finie. Qu'on la nomme R^2. On aura donc $xy^2 = R^2$, ou $y^2 = \frac{R^2}{x}$, & $y = \frac{R}{\sqrt{x}} = Rx^{-\frac{1}{2}}$. Si on méne une Droite, ou qu'on applique une Régle aux centres des Caſes x^2 & x^1y^2, on verra qu'elle paſſe auſſi par le centre de la Caſe x^4y^4, &, en prolongeant le Triangle, par les centres des Caſes x^1y^6, x^6y^1, *&c.* Subſtituant dans ces termes, au lieu de y^2 ſa valeur $\frac{R^2}{x}$, ils ſeront changez en R^4x^2, R^6x^2, R^1x^2, *&c*, qui ſont tous de l'Ordre x^2. Mais toute Caſe, comme x^4y^1, dont le centre eſt au-deſſus de la Régle, contient un terme d'un Ordre ſupérieur. Car, mettant pour y ſa valeur $Rx^{-1:2}$, x^4y^1 eſt transformé en $R^3x^{4-3:2} = R^3x^{5:2}$ dont l'expoſant ſurpaſſe celui de x^2. Toute Caſe, au contraire, comme x^1y^1, dont le centre eſt au-deſſous de la Régle, loge un terme d'un Ordre inférieur à x^2. Car $Rx^{-1:2}$ ſubſtitué pour y dans x^3y^3, le change en $R^3x^{3-3:2} = R^3x^{3:2}$ qui eſt d'un Ordre inférieur à x^2.

CH. VII. § 83.

De même, la Régle qui paſſe par les centres des Caſes y^2 & xy^1, paſſe auſſi par le centre de la Caſe x^2y^2. Qu'on ſuppoſe d'un même Ordre deux quelconques de ces termes, comme xy^1 & x^2y^2. Ils ſeront donc du même Ordre en les diviſant par la même grandeur x^2y^1. Donc

Ch. VII. §. 83. $\frac{x^2y^2}{x^2y^2}$ [$=1$] étant une grandeur finie, $\frac{xy^3}{x^2y^2}$, ou $\frac{y^3}{x}$ ſera auſſi une grandeur finie, qu'on peut nommer R^3, & on aura $y^3 = R^3x$, ou $y = Rx^{1:3}$. Cette valeur ſubſtituée dans les termes y^2, xy^3, x^2y^3, qui ſont ſur la Régle, les change en $R^8x^{8:3}$, $R^5x^{1+5:3} = R^5x^{8:3}$, $R^2x^{2+2:3} = R^2x^{8:3}$, & fait voir qu'ils ſont tous du même Ordre $x^{8:3}$. Mais, ſi on prend une Caſe dont le centre ſoit au-deſſus de la Régle, comme x^2y^4; on verra, en écrivant $Rx^{1:3}$ pour y, que le terme qui la remplit eſt [$R^4x^{2+4:3} = R^8x^{10:3}$] d'un Ordre ſupérieur à $x^{8:3}$. Qu'on prenne, au contraire, une Caſe dont le centre eſt au-deſſous de la Régle, comme xy^4; & la ſubſtitution de $Rx^{1:3}$ à y, change le terme qui remplit cette Caſe en $R^4x^{1+4:3} = R^4x^{7:3}$, qui eſt d'un Ordre inférieur à $x^{8:3}$.

84. Il faut, avant qu'aller plus loin, démontrer cette propriété du Triangle analytique. Elle eſt fondée ſur ce que les Caſes qui ont leurs centres en Ligne droite ſont remplies de termes où les expoſants de x & de y ſont des progreſſions arithmétiques. Cela eſt évident, quand cette Droite, ou cette Régle, eſt couchée ſur une bande horizontale, ou ſur une verticale. Pour rendre l'expreſſion plus courte, nous apellerons celles-là des *Lignes* & celles-ci des *Colomnes*. Quand la Régle eſt horizontale, les termes par leſquels elle paſſe ont tous le même expoſant de x, & ceux d'y ſont les nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c. Quand

Quand la Régle eſt verticale, les expoſants d'y ſont tous les mêmes, & ceux de x ſont la progreſſion 1, 2, 3, 4, &c. Enſuite lorſque la Régle eſt inclinée aux bandes; ſi on ſuppoſe que, partant du centre d'une Caſe, elle ne rencontre le centre d'une autre Caſe qu'après avoir traverſé k lignes & l colomnes; il eſt clair, puiſque les Caſes ſont rangées uniformément, qu'il lui faudra encore traverſer k lignes & l colomnes pour atteindre le centre d'une troiſiéme Caſe, & encore autant pour parvenir à une quatriéme, & ainſi de ſuite. Donc, comme l'expoſant de x augmente d'une unité en montant d'une ligne, & que l'expoſant de y augmente auſſi d'une unité en traverſant une colomne de droite à gauche; ſi le terme qui eſt dans la prémiére Caſe eſt $x^m y^n$, celui de la ſeconde ſera $x^{m+k} y^{n+l}$, celui de la troiſiéme $x^{m+2k} y^{m+2l}$ & ainſi de ſuite: où les expoſants de x ſont la progr. arithm: m, $m+k$, $m+2k$ &c. & ceux de y la progreſſion n, $n+l$, $n+2l$, &c. CH. VII. §. 84.

Réciproquement, ſi l'on choiſit des termes, comme $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, &c. où les expoſants, tant de x que de y, ſoient en progreſſion arithmétique dont les différences ſoient k & l: tous ces termes ſe trouvent dans des Caſes, dont les centres ſont ſur une même ligne droite qui traverſe en même tems k lignes & l colomnes: ce qui détermine l'inclinaiſon de cette Droite aux bandes du Triangle.

85. CAR l'inclinaiſon de la Régle aux bandes du Triangle, & le raport de k à l dépendent entiérement l'un de l'autre, puiſque k & l ſont le nombre des lignes & le nombre des colomnes que traverſe en même tems la Régle. Si k ſurpaſſe l, la Régle eſt plus inclinée aux colomnes qu'aux

CH. VII. §. 85. qu'aux lignes, & coupe une plus grande portion de la premiére bande verticale que de la premiére bande horizontale, à compter ces portions dès la Pointe. C'eſt le contraire ſi l ſurpaſſe k. En général, puiſque la Régle traverſe k lignes en traverſant l colomnes, elle traverſera de colomne en colomne un nombre de lignes exprimé par $\frac{k}{l}$, ſoit que $\frac{k}{l}$ déſigne un nombre entier ou un nombre rompu. Si la Régle traverſe deux colomnes en traverſant une ſeule ligne, elle ne traverſera qu'une demi-ligne en traverſant une ſeule colomne.

86. DONC, ſi on tire ſur la ſurface du Triangle analytique deux Droites paralléles, & par conſéquent autant inclinées l'une que l'autre aux lignes & aux colomnes; les Caſes, dont ces Droites traverſent le centre, contiennent des termes où les expoſants de x, & auſſi ceux de y, font des progreſſions arithmétiques, qui ont dans l'une & l'autre Droite la même différence. Ceux de la prémiére Droite étant, par ex., $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$ &c. ceux de la ſeconde peuvent être $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$, $x^{p+2k} y^{q+2l}$ &c.

Réciproquement, ſi l'on choiſit deux ſuites de termes, $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$ &c. & $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$, $x^{p+2k} y^{q+2l}$, &c. où les expoſants de x, & auſſi ceux de y, faſſent des progreſſions arithmétiques qui dans l'une & dans l'autre ſuite ayent les mêmes différences: ces deux ſuites de termes ſe trouveront ſur deux Droites paralléles.

87. TELLE

87. TELLE étant la diſpoſition des termes ſur le Triangle analytique, ſi on compare enſemble deux termes quelconques, en les ſuppoſant d'un même Ordre d'infini, & qu'on applique une Régle ſur les centres des Caſes où logent ces deux termes : Je dis que tous les termes, qui ſont dans des Caſes par les centres deſquelles paſſe cette Régle, ſont auſſi du même Ordre. Car leurs expoſants ſont en progreſſion arithmétique [§. 84]. On peut donc repréſenter ces termes par la ſuite $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, $x^{m+3k} y^{n+3l}$, $x^{m+4k} y^{n+4l}$, $x^{m+5k} y^{n+5l}$, *&c.* Prenons-en deux termes quelconques, comme $x^{m+2k} y^{n+2l}$ & $x^{m+5k} y^{n+5l}$, & ſuppoſons-les d'un même Ordre. Ils reſteront d'un même Ordre, après avoir été diviſés par une même grandeur $x^{m+2k} y^{n+2l}$. Donc $\left[\frac{x^{m+2k} y^{n+2l}}{x^{m+2k} y^{n+2l}} =\right] 1$, & $\left[\frac{x^{m+5k} y^{n+5l}}{x^{m+2k} y^{n+2l}} =\right] x^{3k} y^{3l}$ ſont d'un même Ordre. Ainſi l'unité étant eſſentiellement une grandeur finie, $x^{3k} y^{3l}$, & ſa racine cubique $x^k y^l$, & toutes ſes racines & ſes puiſſances ſont finies. Ainſi tous les termes qui ſont ſur la Régle, $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{n+2l}$, *&c.* n'étant que $x^m y^n$ multiplié ſucceſſivement par les grandeurs finies 1, $x^k y^l$, $x^{2k} y^{2l}$, $x^{3k} y^{3l}$, *&c.* ſont tous du même Ordre.

CH. VII. §. 87.

Par la même raiſon, tous les termes $x^p y^q$, $x^{p+k} y^{q+l}$,

Ch. VII. §. 87. $x^{p+2k}\,y^{q+2l}$, &c. qui ſont ſur une Droite paralléle à la Régle, ſont tous du même Ordre que $x^p\,y^q$. Et réciproquement tous les termes qui ſont d'un même Ordre ſont logés dans des Caſes dont les centres ſe trouvent ſur la Régle; ou ſur une Droite paralléle à la Régle.

88. Puiſque $x^k\,y^l$ eſt une grandeur finie, ſi on la nomme R, on aura $y = R^{1:l}\,x^{-k:l}$, ce qui détermine le raport des Ordres d'x & d'y, en faiſant voir qu'y eſt du même Ordre que la puiſſance d'x qui a pour expoſant négatif le nombre $\left[\frac{k}{l}\right]$ de lignes que traverſe la Régle, tandis qu'elle traverſe une ſeule colomne [§. 85].

En ſubſtituant $R^{1:l}\,x^{-k:l}$ à y, dans le terme $x^m\,y^n$ ou dans le terme $x^p\,y^q$, on le transforme en $R^{n:l}\,x^{m-nk:l}$ & $R^{q:l}\,x^{p-qk:l}$: ce qui marque que les termes $x^m\,y^n$, $x^{m+k}\,y^{n+l}$ &c. qui ſont ſur la Régle, ſont de l'Ordre $m-nk:l$, & que les termes $x^p\,y^q$, $x^{p+k}\,y^{q+l}$ &c. qui ſont ſur une paralléle à la Régle, ſont de l'Ordre $p-qk:l$.

89. On trouvera auſſi les expoſants de ces Ordres, en examinant quel eſt le point auquel la Régle, ou ſa paralléle, coupe la prémiére bande verticale. Si c'eſt le centre de quelque Caſe de cette bande, la puiſſance de x qui eſt dans cette Caſe, montre par ſon expoſant quel eſt l'Ordre des termes placés ſur la Régle, ou ſur ſa paralléle, puiſque tous ces termes ſont du même Ordre [§. *préc.*].

Mais

Mais ſi la Régle, ou ſa paralléle, paſſe entre les centres de deux Caſes, le point où elle paſſe déſigne encore l'Ordre de ſes termes, dont alors l'expoſant eſt un nombre rompu. Il faut concevoir cette bande verticale, & en général chaque colomne, comme une Droite diviſée en parties égales par les centres des Caſes, imaginer que les termes x^1, x^2, x^3, *&c.* dont les expoſants ſont des nombres entiers, ſont placés ſur les points de diviſion, & feindre que les termes, comme $x^{1:2}$, $x^{1+1:3}$, $x^{2+3:4}$, *&c.* dont les expoſants ſont des nombres rompus ou mixtes, ſont placés ſur les points qui diviſent les intervalles des centres, dans la même raiſon que l'unité eſt diviſée par la fraction qui fait, ou concourt à faire l'expoſant de x. Ainſi, on concevra $x^{1:2}$ préciſément au milieu entre x^0 ou 1, & x^1; & $x^{1+1:3}$ ſera placé ſur le premier point de la ſubdiviſion qui partageroit en trois parties égales l'intervalle entre x^1 & x^2, &c. Cela bien conçû, ſi la Régle, ou ſa paralléle, paſſoit, par ex. entre les centres de x^2 & de x^3, mais trois fois plus près du dernier que du premier, c'eſt-à-dire, par le point où l'on doit concevoir $x^{2+3:4}$, on concluroit que tous les termes placés ſur cette Droite, ſont de l'Ordre $2\frac{3}{4}$. CH. VII. §. 89.

L'expoſant d'un Ordre peut être négatif, lorſque la Régle, ou ſa paralléle, ne coupe point la prémiére bande verticale, mais bien ſon prolongement au-deſſous de la prémiére bande horizontale. Cela arrive quand $m < nk:l$ ou $p < qk:l$, c'eſt-à-dire, quand $\frac{k}{l} > \frac{m}{n}$ ou $\frac{p}{q}$. Alors l'expoſant $m - nk:l$, ou $p - qk:l$, eſt négatif. Dans ce cas, on conçoit la prémiére colomne comme une Droite prolongée au-deſſous de la Pointe, & diviſée en parties

Ch. VII. §. 89. égales à celles qui ſont au-deſſus, & l'on attache aux points de diviſion les termes d'expoſants négatifs, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, *&c.*

90. Donc, puiſque de deux Droites paralléles celle qui eſt ſupérieure coupe la prémiére colomne en un point ſupérieur ; tous les termes qui ſont ſur la Droite ſupérieure ſont d'un Ordre ſupérieur aux termes qui ſont ſur la Droite inférieure. Ainſi la Régle paſſant par les termes $x^{m}y^{n}$, $x^{m+k}y^{n+l}$, $x^{m+2k}y^{n+2l}$, *&c.* qui ſont tous de l'Ordre $m-nk:l$; un autre terme quelconque eſt d'un Ordre ſupérieur ou inférieur ſelon qu'il eſt logé dans une Caſe dont le centre eſt au-deſſus ou au-deſſous de la Régle.

91. C'EST-LA' le Principe qui détermine les comparaiſons qu'on peut faire pour chercher les plus grands termes d'une équation [§. 80, 83]. En ſuppoſant x infinie, on voit qu'il ſeroit inutile de regarder deux termes comme étant du même Ordre & les plus grands de l'équation, ſi la Régle, appliquée aux centres de leurs Caſes, laiſſe au-deſſus d'elle quelque autre terme. Car ce terme [§. *préc.*] ſeroit d'un Ordre ſupérieur à ceux par leſquels paſſe la Régle. Il ſeroit donc infiniment plus grand que ceux qu'on voudroit ſuppoſer les plus grands [§. 78] ; ce qui ſeroit abſurde.

Et en ſuppoſant x infiniment petite, la comparaiſon de deux termes ſera inutile, ſi la Régle, appliquée aux centres de leurs Caſes, laiſſe au-deſſous d'elle quelque terme de l'équation. Car quand on voudra ſuppoſer que ces deux termes ſont du même Ordre & les plus grands de l'équation, il ſe trouvera [§. *préc.*] que les termes qui ſont

ſont dans une Caſe inférieure ſeront d'un Ordre inférieur, & par conſéquent infiniment plus grands [§. 79] que ceux qu'on a ſuppoſé les plus grands : ce qui eſt contradictoire. CH. VII. §. 91.

92. De-là on déduit naturellement la Régle ſuivante pour diſcerner dans une équation indéterminée les termes qui deviennent infiniment plus grands que tous les autres, par la ſuppoſition d'x ou d'y infinie ou infiniment petite *.

Ayant tracé le Triangle analytique ; on placera chaque terme de l'équation dans la Caſe qui lui eſt propre. Ou, ce qui dans la pratique eſt plus commode, on formera le Triangle avec des points diſpoſés en quinconce, & on changera en une étoile, ou en une petite croix, chaque point qui tient la place d'un des termes de l'équation. On peut auſſi avoir un Triangle de bois ou d'ivoire, percé de petits trous rangés à égales diſtances & parallélement aux côtés du Triangle, & on remplira avec de petites chevilles les trous qui repréſentent les Caſes où devroient être logés les termes de l'équation.

Puis on couchera le Triangle, ou on ſe le repréſentera couché, ſur la bande ſans x, ſi c'eſt x qu'on ſuppoſe infinie ou infiniment petite : mais on le couchera ſur la bande ſans y, ſi c'eſt y qu'on veut ſuppoſer infinie ou infiniment petite.

Après cela, ſi la variable eſt ſuppoſée infinie, on verra quelles ſont les Caſes pleines par le centre deſquelles peut paſſer une Régle ſans laiſſer au-deſſus d'elle aucune autre Caſe pleine. Les termes qui occupent ces Caſes

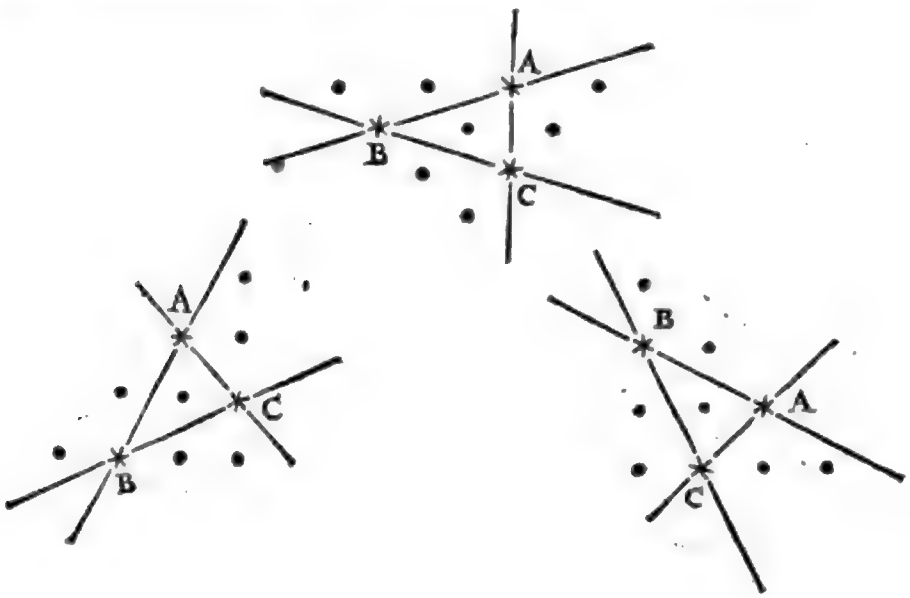
* NEWTON, *Methode des Fluxions.* §. 29 & ſuiv. *Epiſtola ad* OLDENBURGUM *poſterior.* TAYLOR, *Methodus Increment.* Part. I. Prop. 9. STIRLING, *Lineæ 3i. ordinis &c.* pag. 12. s'GRAVESANDE, *Elementa Mathef. univerſ.* pag. 233. & ſeq.

Digitized by Google

CH. VII. §. 92. ceux qui sont seuls toute l'équation. Et la Droite qui, menée le long de la Régle, détermine ainsi ces plus grands termes, s'apellera *Une Déterminatrice supérieure.* Il s'en peut trouver plusieurs pour une même équation.

Mais si l'on suppose x ou y infiniment petite, on cherchera, avec la Régle, quelles sont les Cases pleines par le centre desquelles peut passer une Droite, sans laisser au-dessous d'elle aucune Case pleine. Cette Droite, ou ces Droites, car il peut y en avoir plus d'une, se nommeront des *Déterminatrices inférieures*, parce qu'elles déterminent les plus grands termes de l'équation : ce sont ceux qui occupent les Cases par les centres desquelles elles passent.

L'*Exemple* 1, sera celui de l'équation proposée ci-dessus [§. 81] $x^2y + ay^2 - a^2x = 0$. Ayant décrit le Triangle avec des points, & converti en étoiles les points qui représentent les Cases x^2y, y^2, & x, on verra,



Qu'on

Qu'on ne peut mener par les Cafes pleines que trois déterminatrices AB, BC, CA, deſquelles, couchant 1°. le Triangle ſur la bande ſans x, deux ſont ſupérieures AB, AC, & une inférieure BC: mais en le couchant 2°. ſur la bande ſans y, la déterminatrice AB eſt ſupérieure, & AC & BC inférieures. CH. VII. §. 92.

La déterminatrice AB donne l'éq: $x^2y + ay^2 = 0$, ou $xx + ay = 0$.

La déterminatrice AC donne $x^2y - a^2x = 0$, ou $xy - aa = 0$.

Et la déterminatrice BC donne $ay^2 - a^2x = 0$, ou $yy - ax = 0$.

Donc par la ſuppoſition de x infinie, l'équation propoſée eſt réduite à ces deux $xx + ay = 0$, & $xy - aa = 0$, que fourniſſent les déterminatrices AB, AC, ſupérieures quand le Triangle eſt couché ſur la bande ſans x.

Et par la ſuppoſition de x infiniment petite, l'équation ſe réduit à $yy - ax = 0$, que donne la déterminatrice BC inférieure dans la même poſition du Triangle.

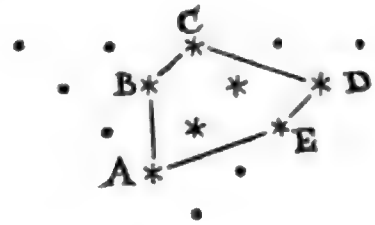
Mais par la ſuppoſition d'y infinie, l'équation eſt réduite à $xx + ay = 0$, donnée par la déterminatrice AB ſupérieure dans le Triangle couché ſur la bande ſans y.

Et la ſuppoſition d'y infiniment petite réduit l'équation à $xy - aa = 0$, & $yy - ax = 0$, que fourniſſent les déterminatrices AC, BC inférieures dans cette même poſition du Triangle:

Exemple 2. On propoſe l'éq: $xxyy + axy^2 + bx^2y + cx^3 + ddxy + eexx + f^3y = 0$. Après l'avoir miſe ſur le Triang: analyt: c'eſt-à-dire, après avoir formé le Triangle avec des points, & changé en étoiles ceux qui répondent aux termes de l'équation, on verra que toutes les étoiles peuvent être renfermées dans le Pentagone $ABCDE$. Il y a donc cinq déterminatrices, qui fourniſſent les cinq équations ſuivantes.

AB -

CH. VII. §. 92.



AB donne $f^3y+axy^2=0$, ou, diviſant par ay, $xy+\frac{f^3}{a}=0$.

BC donne $axy^2+x^2y^2=0$, ou, diviſant par xy^2, $x+a=0$.

CD donne $x^2y^2+cx^3=0$, ou, diviſant par x^2, $yy+cx=0$.

DE donne $cx^3+ecx^2=0$, ou, diviſant par cx^2, $x+\frac{ee}{c}=0$.

& *EA* donne $eex^2+f^3y=0$, ou, diviſant par ee, $xx+\frac{f^3}{ee}y=0$.

Si on ſuppoſe x infinie, on couchera le Triangle ſur la bande ſans x, & on examinera quelles déterminatrices deviennent ſupérieures. C'eſt la ſeule *CD*. Donc cette ſuppoſition réduit l'équation propoſée à la ſeule éq: $yy+cx=0$.

Et ſi on ſuppoſe x infiniment petite, en laiſſant le Triangle dans la même ſituation, on verra quelles déterminatrices ſont inférieures. Ce ſont *AB* & *AE* qui donnent les éq: $xy+\frac{f^3}{a}=0$, & $xx+\frac{f^3}{ee}y=0$. C'eſt donc à ces deux équations que ſe réduit la propoſée par la ſuppoſition d'x infiniment petite.

Si on veut ſuppoſer y infinie, il faut concevoir le Triangle couché ſur la bande ſans y, & voir quelles déterminatrices deviennent alors ſupérieures. Ce ſont *AB*, *BC*, *CD*.

Digitized by Google

CD. Les éq : $xy + \frac{f^3}{a} = 0$, $x + a = 0$, $yy + cx = 0$, qu'elles donnent, ſont celles auxquelles la ſuppoſition d'y infinie réduit la propoſée.

Mais en ſuppoſant y infiniment petite, on prendra les déterminatrices inférieures *AE*, *ED*, qui donnent les éq : $xx + \frac{f^3}{ee} y = 0$, & $x + \frac{ee}{c} = 0$ pour celles auxquelles ſe réduit la propoſée par la ſuppoſition d'y infiniment petite.

93. Une déterminatrice peut paſſer par plus de deux Caſes, & alors l'équation qu'elle fournit a plus de deux termes. Mais cette équation peut ſe réſoudre par les Régles ordinaires de l'Algébre en pluſieurs équations ſimples. Si la déterminatrice paſſe par les Caſes $x^m y^n$, $x^{m+k} y^{n+l}$, $x^{m+2k} y^{m+2l}$, *&c.* [§. 84] elle donnera une équation telle que $ax^m y^n + bx^{m+k} y^{n+l} + cx^{m+2k} y^{n+2l} + dx^{m+3k} y^{n+3l}$ *&c* $= 0$, dont les termes qui répondent à des Caſes vuides, auront leurs coëfficients a, b, c, ou *&c.* égaux à zéro. Tous les termes de cette équation étant diviſibles par $x^m y^n$, elle ſe peut réduire à $a + bx^k y^l + cx^{2k} y^{2l} + dx^{3k} y^{3l}$ *&c* $= 0$, ou, ſuppoſant $x^k y^l = z$, à $a + bz + czz + dz^3$ *&c* $= 0$. Soient R, r, ρ, *&c.* les racines de cette équation. Elle peut donc ſe décompoſer en ces équations $z - R = 0$, $z - r = 0$, $z - \rho = 0$, *&c.* c'eſt-à-dire, $x^k y^l - R = 0$, $x^k y^l - r = 0$, $x^k y^l - \rho = 0$, *&c.* qu'on réduit à $y^l = Rx^{-k}$, $y^l = rx^{-k}$,

§. 93. $y = \rho x^{\frac{-k}{l}}$ &c, ou enfin à $y = R^{1:l} x^{-k:l}$, $y = r^{1:l} x^{-k:l}$, $y = \rho^{1:l} x^{-k:l}$ &c. : ce qui convient avec l'éq : $y = R^{1:l} x^{-k:l}$ trouvée au §. 88 ; la valeur de la lettre R, qui avoit été prise en général pour désigner un coëfficient quelconque, étant ici déterminée à marquer les racines R, r, ρ, &c. de l'éq : $a + bz + czz + dz^3$ &c $= o$.

94. Ces coëfficients R, r, ρ, &c. des éq: $y = R^{1:l} x^{-k:l}$, $y = r^{1:l} x^{-k:l}$, $y = \rho^{1:l} x^{-k:l}$, &c. peuvent être imaginaires. Ils le sont tous, lorsque l'éq : $a + bz + czz$ &c $= o$ n'a que des racines imaginaires : ce qui peut arriver toutes les fois qu'elle est d'un dégré pair, quand le nombre complet de ses termes est impair, lorsque la déterminatrice passe par un nombre de Cases impair, à compter depuis la premiére de celles qui sont pleines jusqu'à la derniére. Mais quand ce nombre de Cases est pair, l'éq : $a + bz + czz$ &c $= o$, étant d'un dégré impair, a nécessairement quelque racine réelle. En particulier, elle n'en peut avoir d'imaginaires, lorsque la déterminatrice ne traverse que deux Cases pleines, qui soient sur deux bandes, horizontales ou verticales, contigues. Car l'équation étant $ax^m y^n + bx^{m+1} y^{n+l} = o$, ou $ax^m y^n + bx^{m+k} y^{n+1} = o$, [k ou l n'étant que l'unité, à cause de la contiguité des bandes], on aura $a + bxy^l = o$, ou $a + bx^k y = o$, c'est-à-dire, $x = -\frac{a}{b} y^{-l}$, ou $y = -\frac{a}{b} x^{-k}$.

95. Il

95. Il ſe peut que les coëfficients R, r, ρ, *&c.* ſoient réels, & que cependant les valeurs $R^{1:l\ -k:l}x$, $r^{1:l\ -k:l}x$, $\rho^{1:l\ -k:l}x$ *&c.* ſoient imaginaires, ou entiérement ou à demi. J'apelle *demi-imaginaire*, une racine qui, comme $\sqrt{ax}$, eſt réelle quand on prend x poſitive, & imaginaire quand on prend x négative; ou qui, comme $\sqrt{-ax}$, eſt imaginaire quand x eſt poſitive, & réelle quand x eſt négative. J'apelle *entiérement imaginaire*, ou ſimplement *imaginaire*, une racine qui, comme $\sqrt{-xx}$, eſt imaginaire, quelque valeur, poſitive ou négative, qu'on donne à x. CH. VII. §. 95.

Puiſque les puiſſances paires d'une racine, poſitive ou négative, ſont néceſſairement poſitives; mais que les puiſſances impaires ſont poſitives, ſi la racine eſt poſitive, & négatives, ſi la racine eſt négative : il eſt clair qu'une racine impaire eſt toûjours réelle, quelle que ſoit la puiſſance dont on tire cette racine : mais qu'une racine paire n'eſt réelle qu'autant que la puiſſance eſt poſitive. Donc ſi cette puiſſance eſt une puiſſance paire d'une quantité variable, la racine paire ſera réelle, ou entiérement imaginaire, ſelon que la puiſſance eſt priſe poſitivement ou négativement, c'eſt-à-dire, ſelon qu'elle eſt affectée d'un coëfficient poſitif ou négatif. Mais ſi la puiſſance, dont on tire une racine paire, eſt une puiſſance impaire d'une quantité variable, la racine eſt demi-imaginaire. Ainſi dans l'éq : $y = R^{1:l\ -k:l}x = \sqrt[l]{Rx^{-k}}$, ſi l eſt un nombre impair, y eſt toûjours une grandeur réelle : mais ſi l eſt pair, y eſt demi-imaginaire, k étant impair; & k étant pair, y eſt réelle lorſque R eſt poſitif, imaginaire lorſque R eſt négatif.

CH. VII. §. 96.

96. Il eſt bon de remarquer touchant l'expoſant $-\frac{k}{l}$ de x dans les éq: $y = R^{1:l} x^{-k:l}$ que donne la déterminatrice,

1°. Qu'il eſt négatif, quand k & l ont le même ſigne: ce qui arrive quand les progreſſions arithmétiques $m, m+k, m+2k$, &c. $n, n+l, n+2l$, &c. des expoſants de x & de y dans les termes qui ſont ſur la Régle [§. 84] ſont toutes deux aſcendantes ou toutes deux deſcendantes. Alors la Régle s'éloigne en même tems de la prémiére Bande horizontale & de la prémiére Bande verticale ; elle ne coupe qu'une de ces deux bandes, ou elle part de la Pointe. Dans ce Cas, x infinie rend y [$= R^{1:l} x^{-k:l}$, ou $(\frac{R}{x^k})^{1:l}$] infiniment petite, & x infiniment petite rend y infinie [§. 78. 79].

2°. Que cet expoſant $-\frac{k}{l}$ eſt poſitif, quand l & k ont des ſignes contraires : ce qui a lieu quand les progr: arithm: $m, m+k, m+2k$, &c. $n, n+l, n+2l$, &c. ſont l'une aſcendante & l'autre deſcendante: quand la Régle s'aproche d'une des deux Bandes extérieures du Triangle en s'éloignant de l'autre : quand elle les coupe toutes deux ailleurs qu'à la Pointe. Dans ce Cas, x & y [$R^{1:l} x^{k:l}$ ou $(Rx^k)^{1:l}$] ſont toutes deux infinies ou toutes deux infiniment petites. Elles ſont d'un même Ordre, ſi $\frac{k}{l} = 1$, ſi $k = l$, ſi la déterminatrice eſt également inclinée aux deux bandes. Mais ſi $\frac{k}{l} > 1$, ſi $k > l$, ſi la déterminatrice, plus inclinée aux bandes verticales qu'aux horizon-

horizontales, retranche une plus grande portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x; alors $y\,[R^{1:l}\,x^{k:l}]$ eſt d'un Ordre ſupérieur à x, ſoit dans l'infini ſoit dans l'infiniment petit : comme, au contraire, il lui eſt d'un Ordre inférieur, ſi $\frac{k}{l} < 1$, ſi $k < l$, ſi la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x. CH. VII. §. 96.

3°. Que ſi $k = 0$, ce qui arrive quand la déterminatrice eſt paralléle à la Bande ſans x, alors $y = R^{1:l}\,x^{-k:l}$ ſe réduit à $y = R^{1:l}\,x^{0} = R^{1:l}$. Donc x infinie ne donne pour y que des valeurs finies.

4°. Et par la même raiſon, quand la déterminatrice, paralléle à la Bande ſans y, rend l égal à zéro, on conclura que y infinie ne donne pour x que des valeurs finies, déterminées par les racines de l'équation $ax^{m}y^{n} + bx^{m+k}y^{n+l} + cx^{m+2k}y^{n+2l}\,\&c = 0$, qui, puiſque $l = 0$, ſe réduit, en diviſant par $x^{m}y^{n}$, à $a + bx^{k} + cx^{2k} + \&c = 0$.

97. Il y a bien des recherches ſur les Lignes courbes où il ſuffit de connoître le raport d'y à x, quand ces variables ſont infinies ou infiniment petites. Mais il en eſt beaucoup d'autres où il faut aller plus loin, & chercher ce que produiſent les termes qu'on a négligés comme infiniment petits en comparaiſon de ceux qu'on a employés. Il eſt même ſouvent très-utile de trouver le raport d'y à x finies, du moins par approximation. Ceci nous méne naturellement à la *Méthode des Séries ou Suites infinies*, qui découle ſans peine de ce qu'on vient d'établir.

Ch. VII. §. 98.

98. UNE *SERIE* eſt une ſuite de termes qui fait une approximation continuelle à la racine d'une équation. On la nomme *convergente*, pour marquer qu'on aproche d'autant plus de la valeur de la racine, qu'on prend un plus grand nombre de termes de la Série : enſorte qu'on auroit au juſte cette racine, ſi le nombre des termes de la Série étoit fini, ou qu'étant infinis en nombre, on pût les ſommer.

Une *Série*, au contraire, ſeroit *divergente*, quand on s'éloigneroit d'autant plus de la racine de l'équation, qu'on prendroit plus de termes de la Série. Il eſt clair qu'une Série divergente eſt trompeuſe, ou du moins inutile. Car il vaudroit mieux s'en tenir au premier terme que d'y joindre les ſuivants.

On propoſe par ex. l'éq : $ay^3 - x^3y - ax^3 = 0$. Si on cherche y en x, c'eſt-à-dire, ſi on regarde y comme inconnuë, & x comme connuë, quoique variable, on trouvera que l'équation a ces quatre racines,

$$(A) \ldots\ldots x + \frac{xx}{3a} * - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4} \text{ \&c.}$$

$$(B) \ldots - a - \frac{a^4}{x^3} - \frac{3a^7}{x^6} - \frac{12a^{10}}{x^9} - \frac{55a^{13}}{x^{12}} \text{ \&c.}$$

$$\text{ou } -a - a^4x^{-3} - 3a^7x^{-6} - 12a^{10}x^{-9} - 55a^{13}x^{-12}, \text{ \&c.}$$

$$(C) \ldots + a^{-1:2}x^{3:2} + \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{8}a^{5:2}x^{-3:2} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \text{ \&c.}$$

$$(D) \ldots - a^{-1:2}x^{3:2} + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{8}a^{5:2}x^{-3:2} + \tfrac{1}{2}a^4x^{-3} \text{ \&c.}$$

parce que chacune de ces quatre Séries ſubſtituée dans l'équation au lieu d'y, en réduit le premier membre à zéro, & par conſéquent à l'égalité avec le ſecond membre.

Les Séries A, B, C, D ſont donc les valeurs d'y, & ces valeurs ſeroient exactes, ſi on épuiſoit ces Séries. Mais quand

quand cela n'eſt pas poſſible, on a du moins dans ces Séries une approximation continuelle aux véritables valeurs d'y, pourvû qu'elles ſoient convergentes : ce qui a lieu, lorſque chaque terme eſt plus petit que celui qui le précéde, & que ces termes diminuent à l'infini. CHAP. II. §. 98.

99. Pour cet effet, on range tous les termes d'une Série de façon que les expoſants des puiſſances de ſa variable aillent toûjours en croiſſant ou toûjours en décroiſſant. Car une Série, dont les termes ſont diſpoſés ſelon cette Loi, ſera ſûrement convergente, pourvû qu'on prenne ſa variable aſſez petite ou aſſez grande.

Ainſi, dans la Série $A \ldots . x + \frac{x^2}{3a} * - \frac{x^4}{81a^3} + \frac{x^5}{243a^4}$ *&c.* les expoſants d'x vont en croiſſant. Si donc on ſuppoſe x fort petite, en comparaiſon d'a, enſorte que $\frac{x}{a}$ ſoit une fraction moindre que l'unité, les puiſſances $\frac{x}{a}$, $\frac{xx}{aa}$, $\frac{x^3}{a^3}$, $\frac{x^4}{a^4}$ *&c.* de cette fraction ſont une progreſſion géométrique qui décroit à l'infini, d'autant plus rapidément que $\frac{x}{a}$ eſt plus petite. Si par ex. $x = \frac{1}{10} a$, ou $\frac{x}{a} = \frac{1}{10}$, la ſuite des puiſſances de $\frac{x}{a}$ ſera $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$ &c. Si $\frac{x}{a} = \frac{1}{100}$, la ſuite de ſes puiſſances ſera $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{1000000}$, &c. Ce qui ſuffit pour faire voir que plus x eſt petite par raport à a, plus vite décroit la ſuite des puiſſances de $\frac{x}{a}$. Donc, ſi les termes de la Série A ſont réglés ſur les puiſ-

CH. VII. §. 99. puiſſance de $\frac{x}{a}$, comme on voit qu'elle l'eſt en lui donnant cette forme

$$a\times\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{3}\times\frac{xx}{aa}+0\times\frac{x^3}{a^3}-\frac{1}{81}\times\frac{x^4}{a^4}+\frac{1}{243}\times\frac{x^5}{a^5}+\&c.\right)$$

on pourra toûjours prendre x ſi petite, que chaque terme ſera beaucoup plus petit que celui qui le précéde, & qu'ils décroîtront à l'infini : ce qui rendra la Série convergente.

Au contraire, dans les Séries B, C, D, les expoſants d'x vont en décroiſſant. Il faudra donc ſuppoſer x fort grande en comparaiſon d'a, en ſorte que la fraction $\frac{a}{x}$ ſoit beaucoup plus petite que l'unité. Alors la Série ſera convergente, parce que les puiſſances de cette fraction $\frac{a}{x}$, $\frac{aa}{xx}$, $\frac{a^3}{x^3}$, $\frac{a^4}{x^4}$, &c. font une progreſſion géométrique qui décroît avec d'autant de viteſſe que x eſt plus grande. Les Séries B, C, D, aiant leurs termes ordonnés ſelon les puiſſances de $\frac{a}{x}$, comme on le voit en leur donnant cette forme

$$(B)\ldots-a\left(1+\frac{a^3}{x^3}+3\frac{a^6}{x^6}+12\frac{a^9}{x^9}+55\frac{a^{12}}{x^{12}}\,\&c\right).$$

$$(C)\,\&\,(D)\ldots a\times\left(\pm1\left(\frac{a}{x}\right)^{-3:2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{0}\mp\frac{3}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^{3:2}+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x}\right)^{3}\&c\right).$$

il eſt clair, qu'en prenant x aſſez grande, ces Séries ſeront infailliblement convergentes.

Par la raiſon des contraires, la Série A, appliquée à une valeur d'x plus grande qu'a, & les Séries B, C, D, appli-

appliquées à des valeurs d'x plus petites qu'a, ſeroient di- CH. VII. §. 99.
vergentes.

100. On diſtingue donc deux ſortes de Séries. Les unes ſont d'autant plus convergentes que leur variable eſt plus petite : les autres *convergent* d'autant plus que cette variable eſt plus grande. Dans les prémiéres, qui ſe nomment *Séries croiſſantes*, ou *aſcendantes*, les expoſants de la variable vont en croiſſant. Ils vont en décroiſſant dans les autres, qui s'apellent *Séries décroiſſantes* ou *deſcendantes*. Il eſt néceſſaire de les diſtinguer : car on les employe à des uſages très-différens ou même oppoſés.

101. La forme générale d'une Série eſt $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \&c$, où les expoſants b, i, k, l, $\&c$. vont en croiſſant, ou en décroiſſant, ſelon que la Série eſt aſcendante ou deſcendante. A, B, C, D, $\&c$. ſont les coëfficients des termes ſucceſſifs. Et comme il eſt fort poſſible que quelcun d'entr'eux ſoit zéro, avec tous ceux qui le ſuivent, il ſe peut faire que la *Série* ſoit *terminée*, & alors elle donne la juſte valeur d'y en termes finis.

102. ON TROUVERA ſucceſſivement tous les termes d'une Série de cette maniére. Pour avoir le prémier, on ſuppoſera x infinie, ſi on cherche une Série deſcendante, & x infiniment petite, ſi l'on veut avoir une Série aſcendante. Cette ſuppoſition réduit la Série au ſeul premier terme Ax^b. Car ſi la Série eſt deſcendante, l'expoſant b eſt plus grand que tous les autres i, k, l, $\&c$. & x étant ſuppoſée infinie, la puiſſance x^b eſt infiniment plus grande que les autres x^i, x^k, x^l, $\&c$ [§. 78], qu'on peut ſup-

Ch. VII. §. 102. primer ſans erreur. Et ſi la Série eſt aſcendante, l'expoſant b eſt le plus petit, & x étant infiniment petite, la puiſſance x^b fait diſparoître toutes les autres x^i, x^k, x^l, *&c.* Donc la ſuppoſition d'x infinie, dans une Série décroiſſante, & celle d'x infiniment petite dans une Série croiſſante, la réduit à $y = Ax^b$. Or ces mêmes ſuppoſitions réduiſent l'équation propoſée à une ou pluſieurs équations, telles que $y = R^{1:l} x^{-k:l}$ [§. 93], qui ſont données par les déterminatrices ſupérieures ou inférieures [§. 92]. Donc $A = R^{1:l}$ & $b = -\frac{k}{l}$. De ſorte que les déterminatrices font connoître le premier terme de la Série, ou des Séries, lorſque l'équation propoſée en peut donner pluſieurs.

Les termes ſuivans ſe trouvent de la même maniére. Que u repréſente la ſomme des termes $Bx^i + Cx^k + Dx^l$ *&c.* qui ſuivent le premier, & on aura $y = Ax^b + u$. Cette valeur d'y ſubſtituée dans l'équation propoſée la transforme en une autre dont les variables ſont u & x. Qu'on ſuppoſe, dans cette transformée, x infinie pour les Séries deſcendantes, & x infiniment petite pour les Séries aſcendantes : & les déterminatrices, ſupérieures ou inférieures, donneront une ou pluſieurs équations telles que $u = R^{1:l} x^{-k:l}$ [§. 93]. Mais les mêmes ſuppoſitions d'x infinie ou infiniment petite, réduiſent la Série $u = Bx^i + Cx^k +$ *&c.* à $u = Bx^i$. Donc $B = R^{1:l}$ & $i = -\frac{k}{l}$. Ainſi les déterminatrices de cette prémiére transformée donnent le ſecond terme Bx^i de la Série.

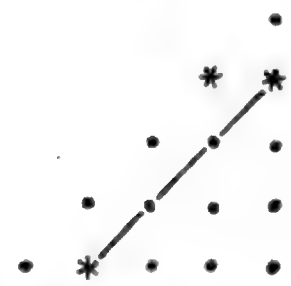
On

On transformera de nouveau l'équation, en ſuppoſant $u = Bx^{i} + t$ où t repréſente tous les termes $Cx^{k} + Dx^{l} +$ &c. qui ſuivent le ſecond de la Série. Et les déterminatrices de cette ſeconde transformée donneront le troiſiéme terme Cx^{k} de la Série. En continuant de la même maniére on aura le quatriéme terme & les ſuivans à l'infini, c'eſt-à-dire, juſqu'au dernier ſi la Série eſt terminée, ou du moins autant qu'on en voudra, autant que le demandera le but qu'on ſe propoſe, ſi le nombre des termes de la Série eſt infini, ou trop grand. CH. VII. §. 102.

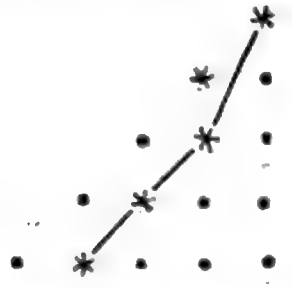
103. Mais dans le cours de ces opérations on doit ſe ſouvenir que la nature des Séries aſcendantes exige que les expoſants d'x aillent en croiſſant, & que dans les Séries deſcendantes ces expoſants doivent aller en décroiſſant. Donc, quoiqu'à la prémiére opération, à celle qui ſe fait ſur l'équation propoſée, on doive prendre en conſidération toutes les déterminatrices ſupérieures, pour avoir toutes les Séries deſcendantes, ou toutes les déterminatrices inférieures pour avoir toutes les Séries aſcendantes: dans les opérations ſuivantes, on ne doit faire aucune attention aux déterminatrices ſupérieures qui donneroient le même ou un plus grand expoſant que le précédent, ni aux déterminatrices inférieures qui donneroient le même ou un plus petit expoſant que celui qu'on a eû par l'opération précédente. S'il n'y a point d'autres déterminatrices, le cours des opérations eſt fini & la Série eſt terminée.

Exemple 1. L'éq: $ay^{3} - x^{3}y - ax^{3} = 0$ propoſée ci-deſſus [§. 98] étant placée ſur le Triang: analyt: & ce Triangle étant couché ſur la Bande ſans x, on voit qu'elle n'a qu'une ſeule déterminatrice inférieure, qui, paſſant par les

Ch. VII. §. 103.



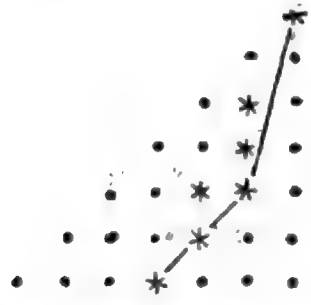
les Cafes y^3 & x^3, donne l'éq: $ay^3 - ax^3 = 0$, ou $y = x$. C'eſt là le prémier terme d'une Série aſcendante. Pour avoir le ſecond, on ſubſtituera $x + u$ à y, & l'équation ſera transformée en $ax^3 + 3auxx + 3auux + au^3 - x^4 - x^3u - ax^3 = 0$, ou $3auxx + 3auux + au^3 - x^4 - x^3u = 0$, laquelle étant placée, à ſon tour, ſur le Triang: anal: a deux déterminatrices inférieures. L'une qui paſſe



par les Cafes u^3, uux, uxx eſt à négliger, parce qu'elle donneroit $u = Rx$, & que ce ſecond expoſant d'x n'eſt pas plus grand que celui qu'on a trouvé par la prémiére opération. Mais l'autre déterminatrice, qui paſſe par les Cafes uxx & x^4 donne l'èq: $3auxx - x^4 = 0$, ou $u = \frac{xx}{3a}$. C'eſt-là le ſecond terme de la Série. On aura le troiſiéme en ſubſtituant $\frac{xx}{3a} + t$ au lieu d'u dans l'équation précédente, ce qui la transforme en $x^4 + 3atxx + \frac{x^5}{}$.

$\frac{x^3}{3a} + 2tx^2 + 3att x + \frac{x^6}{27aa} + \frac{tx^4}{3a} + ttxx + at^3 - x^4 - \frac{x^5}{3a}$ Ch. VII. §. 103.

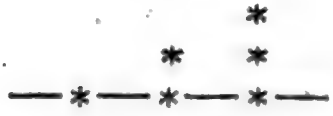
$- tx^3 = 0$, ou $3atxx + tx^3 + 3attx + \frac{x^6}{27aa} + \frac{tx^4}{3a} + ttxx + at^3 = 0$. En la mettant ſur le Tr : anal : on retrouve la déterminatrice, qui donne $t = Rx$, & qui eſt par



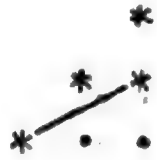
conſéquent à rejetter. Mais il y a une autre déterminatrice inférieure, qui paſſe par txx & x^6, & qui donne l'éq : $3atxx + \frac{x^6}{27aa} = 0$, ou $t = -\frac{x^4}{81a^3}$. Et c'eſt le troiſiéme terme de la Série. Car $y = x + u$, & $u = \frac{xx}{3a} + t$, & $t = -\frac{x^4}{81a^3}$ &c. Donc $y = x + \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{81a^3}$ &c. L'on voit qu'il eſt aiſé de continuer cette Série.

Exemple 2. On propoſe l'éq : $yy - 2xy + xx - 2ay + ax + aa = 0$, de laquelle on veut tirer la valeur d'y en x par une Série aſcendante. On mettra donc l'équation ſur le Tr : anal : & on cherchera les déterminatrices inférieures. Il n'y en a qu'une couchée ſur la Bande ſans x, qui donne l'éq : $yy - 2ay + aa = 0$, qui, quoi-

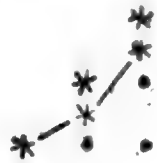
Ch. VII. §. 103.



que du ſecond dégré, n'a qu'une racine, mais double, $y - a = 0$, ou $y = a$. On ſubſtituera donc $a + u$ à y, & la transformée ſera $aa + 2au + uu - 2ax - 2ux + xx - 2aa - 2au + ax + aa = 0$, ou $uu - ax - 2ux + xx = 0$, qu'on mettra auſſi ſur le Tr: anal: où on ne lui trouvera qu'une déterminatrice inférieure, qui donne



l'éq: $uu - ax = 0$, ou $u = \pm\sqrt{ax} = \pm a^{1:2} x^{1:2}$. Ainſi on ſubſtituera $\pm a^{1:2} x^{1:2} + t$ à u dans l'éq: $uu - ax - 2ux + xx = 0$, ce qui la transforme en $ax \pm 2a^{1:2} tx^{1:2} + tt - ax \mp 2a^{1:2} x^{3:2} - 2tx + xx = 0$, ou $\pm 2a^{1:2} tx^{1:2} + tt \mp 2a^{1:2} x^{1+1:2} - 2tx + xx = 0$. Celle-ci ſera miſe, à ſon tour, ſur le Triangle, & comme deux de ſes termes $\pm 2a^{1:2} tx^{1:2}$ & $\mp 2a^{1:2} x^{1+1:2}$ n'ont point de Caſes à ſe loger, on les placera [comme on a dit au §. 89] entre deux Caſes, ſç. le premier ſur la ſeconde colomne entre les Caſes tx^0, où t, & tx^1; & le



ſecond

ſecond ſur la prémiére colomne entre la Caſe x^1 & la Caſe x^2. Alors on trouve à l'équation deux déterminatrices inférieures, dont l'une, qui paſſe par tt & $tx^{1:2}$, donneroit $t = Rx^{1:2}$, ce qui eſt le même expoſant que ci-deſſus. On la négligera donc, & l'on ne fera attention qu'à l'autre qui paſſe par les Caſes $tx^{1:2}$ & $x^{1+1:2}$, donnant l'éq: $\pm 2a^{1:2} tx^{1:2} \mp 2a^{1:2} x^{1+1:2} = 0$, ou $t = x$ qui eſt le troiſiéme terme de la Série. Pour avoir le quatriéme, on ſubſtituera $x + s$ au lieu de t dans la derniére éq: $\pm 2a^{1:2} tx^{1:2} + tt \mp 2a^{1:2} x^{1+1:2} - 2tx + xx = 0$, & la transformée ſera $\pm 2a^{1:2} x^{1+1:2} \pm 2a^{1:2} sx^{1:2} + xx + 2sx + ss \mp 2a^{1:2} x^{1+1:2} - 2xx - 2sx + xx = 0$, ou $\pm 2a^{1:2} sx^{1:2} + ss = 0$. Ces deux termes étant placés ſur le Tr: anal: n'ont qu'une déterminatrice, qui donneroit

$s = Rx^{1:2}$. Cet expoſant étant donc moindre que le précédent, ne peut être admis. Ainſi la Série eſt terminée: car on a $y = a + u = a \pm \sqrt{ax} + t = a \pm \sqrt{ax} + x$. Si pourtant on vouloit voir ce que donnera cette derniére déterminatrice, ou ſon équation $\pm 2a^{1:2} sx^{1:2} + ss = 0$, on lui trouvera deux racines; 1°. $s = 0$, qui termine la Série. 2°. $s = \mp 2a^{1:2} x^{1:2} = \mp 2\sqrt{ax}$, & celle-ci,

CH. VII. §. 103.

Ch. VII. §. 103. celle-ci, ſubſtituée dans $y = a \pm \sqrt{ax + x} + s$, donne $y = a \pm \sqrt{ax + x} \mp 2\sqrt{ax}$, ce qui eſt toûjours $y = a \pm \sqrt{ax + x}$. C'eſt donc là la vraye valeur d'y: ce qui ſe vérifie ſans peine, puiſqu'en chaſſant l'irrationalité, l'éq: $y = a \pm \sqrt{ax} + x$ ſe transforme dans l'éq: propoſée $yy - 2xy + xx - 2ay + ax + aa = 0$.

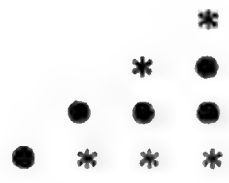
104. On remarquera ici, 1°. que ſi, dans la ſuite des équations que fourniſſent les déterminatrices ſucceſſives, il s'en trouve quelcune qui n'ait que des racines imaginaires, toute la Série, que les prémiers termes ſembloient promettre, devient par-là imaginaire. Car un ſeul terme imaginaire rend imaginaire toute la ſomme dont il fait partie; à moins que ce qu'il y a d'imaginaire dans un terme ne ſoit détruit par ce qu'il y a d'imaginaire dans un autre terme; ce qui ne peut avoir lieu ici, où x a dans chaque terme un expoſant différent.

2°. Que ſi parmi les termes d'une Série il y en a quelcun qui ſoit demi-imaginaire, la Série eſt demi-imaginaire; c'eſt-à-dire [§. 95] imaginaire en prenant x poſitive, réelle en la prenant négative; ou réciproquement.

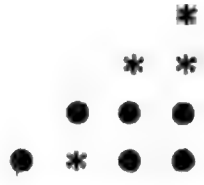
3°. Que ſi parmi les équations qui déterminent les termes ſucceſſifs d'une Série, il s'en trouve qui aient pluſieurs racines réelles; alors la Série *ſe fourche*, pour ainſi dire, & ſe multiplie en autant de Séries, qu'il y a de racines réelles, chaque fois que cela arrive.

Exemple 1. On demande la valeur d'y en x, par une Série aſcendante tirée de l'éq: $x^3 + x^2y + ayy - 2a^2y + a^3 = 0$?

Miſe ſur le Tr. anal: couché ſur la Bande ſans x, elle n'a qu'une déterminatrice inférieure, qui donne l'éq: $ayy - 2a^2y + a^3 = 0$, dont la racine unique, mais double, eſt $y = a$. On ſuppoſera donc $y = a + u$, & en ſubſti-

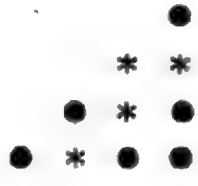


ſubſtituera cette valeur dans l'équation propoſée. La transformée $x^3 + ax^2 + ux^2 + auu = 0$, miſe ſur le Triangle, n'a auſſi qu'une déterminatrice inférieure, qui donne aux



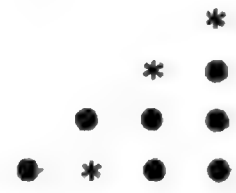
$+ ax^2 = 0$, dont les racines $u = \pm\sqrt{-xx}$, ſont abſolument imaginaires. On ne peut donc exprimer la valeur d'y en x par aucune Série aſcendante. Car la ſeule qui pourroit donner cette valeur, ſeroit $y = a + u = a \pm \sqrt{-xx}$ &c. qui eſt imaginaire.

Exemple 2. Soit propoſée l'éq: $x^2y + ayy - 2axy + axx = 0$, dont on veut tirer la valeur d'y en x par une Série aſcendante. On la placera ſur le Tr. anal: & la déterminatrice inférieure paſſant par les Caſes yy, xy, xx,

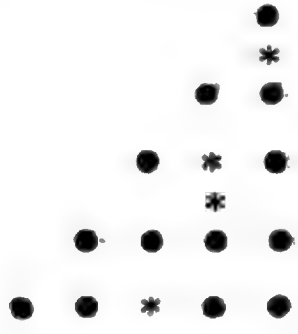


donnera l'éq: $ayy - 2axy + axx = 0$, qui n'a qu'une racine, mais double, $y = x$. On ſubſtituera donc $x + u$ à y dans l'équation propoſée, & on mettra ſur le Trian-

Ch. VII. § 104. gle la transformée $x^3 + x^2 u + a u u = 0$. Elle n'a auſſi



qu'une déterminatrice inférieure, qui donne l'éq : $a u u + x^3 = 0$, laquelle a deux racines $u = + \sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ & $- \sqrt{-\frac{x^3}{a}}$. On ſubſtituera $\pm \sqrt{-\frac{x^3}{a}} + t = \pm a^{-1:2} \times -x^{3:2} + t$ à u dans la premiére transformée, & la ſeconde ſera $\pm a^{-1:2} \times -x^{3+1:2} + txx \pm 2a^{1:2} tx - x^{3:2} + att = 0$, qu'on mettra ſur le Tr : anal : Elle a deux déterminatrices inférieures ; l'une inutile, parce que paſſant par les Caſes tt, $tx^{3:2}$, elle donneroit $t = Rx^{3:2}$,



où x a le même expoſant que dans le terme précédent : l'autre utile, qui paſſant par $tx^{3:2}$ & $x^{3+1:2}$, donnera $\pm 2a^{1:2} tx - x^{3:2} \pm a^{-1:2} \times -x^{3+1:2} = 0$, ou $t =$

$t = \frac{xx}{2a}$. Les trois prémiers termes de la Série ſont donc $x = \pm\sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{xx}{2a}}$. Où l'on voit Ch. VII, §. 104.

1°. Que la Série eſt imaginaire, ſi l'on prend x poſitive, parce qu'alors $\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ eſt une grandeur imaginaire. Mais ſi on prend x négative, la Série ſera réelle, & alors

2°. La Série ſera double, parce que le terme $\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$ a également le ſigne + & le ſigne —, l'équation $auu + x^3 = 0$, qui a donné ce terme ayant deux racines réelles $u = +\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$, & $u = -\sqrt{-\frac{x^3}{a}}$.

Il y a donc réellement deux Séries, dont les trois prémiers termes ſont $x + \sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{xx}{2a}}$ pour l'une & $x - \sqrt{-\frac{x^3}{a} - \frac{xx}{2a}}$ pour l'autre.

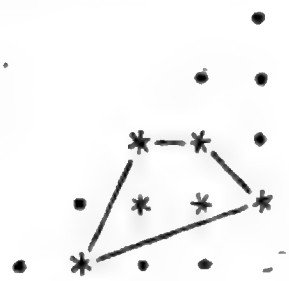
105. JOIGNONS quelques conſidérations néceſſaires pour rendre cette Méthode plus abregée & plus parfaite.

La ſubſtitution de $Ax^b + u$ à y [§. 102] dans un terme quelconque de l'équation propoſée, le transforme en autant de termes qu'il y a de colomnes depuis celle où il ſe trouve juſqu'à la prémiére incluſivement ; chaque terme ayant ſa place ſur chaque colomne, & tous ces termes étant ſitués ſur une même Droite parallele à la déterminatrice qui a donné l'éq : $y = Ax^b$.

Car la puiſſance n de $u + Ax^b$ étant, [§. 26]

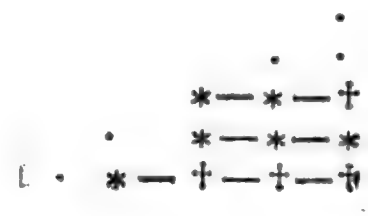
CH. VII. §. 105. $u^n + nAx^h u^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} A^2 x^{2h} u^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} A^3 x^{3h} u^{n-3}$ + &c. jusqu'à $A^n x^{nh}$, qui est le dernier terme; si on substitue cette puissance à y^n, dans un terme comme $x^m y^n$ qui est de l'ordre $m + nh$ [§. 88], & qui se trouve sur une colomne précédée de n autres, on le transformera en $x^m u^n + nAx^{m+h} u^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2} A^2 x^{m+2h} u^{n-2}$ + &c. jusqu'à $A^n x^{m+nh}$, dont tous les termes, en regardant u comme y qui étoit de l'ordre h, sont de l'ordre $m + nh$. Or tous les termes, qui sont d'un même ordre, se trouvent sur une même Droite parallèle à la déterminatrice [§. 87]. Donc tous les termes, dans lesquels a été transformé $x^m y^n$, sont sur une Droite parallèle à la déterminatrice qui a donné $y = Ax^h$. Et il est clair que le prémier terme $x^m u^n$ occupe la Case où étoit le terme transformé $x^m y^n$, sur une colomne précédée de n autres; que le second terme $x^{m+h} u^{n-1}$ est sur une colomne qui a $n-1$ colomnes avant elle; que le troisiéme $x^{m+2h} u^{n-2}$ est sur la colomne voisine; & ainsi jusqu'au dernier terme $A^n x^{m+nh}$ qui est sur la prémiére colomne, ou sur la Bande des puissances d'x.

Ainsi quand on place l'éq : $x^2y^2 + ay^3 + bxy^2 + cx^2y + ddxy + f^3x = o$ sur le Triang : analyt : couché sur la Bande sans x, on lui trouve quatre déterminatrices. Il y en a d'abord une horizontale, qui passe par les Cases x^2y^2,



x^2y^4 & x^2y. Elle donne pour y une valeur conſtante [§. 96, 3°.] qu'on peut nommer A. En ſubſtituant $A+u$ à y dans la propoſée, elle ſe transforme en $A^4x^2 + 2Aux^2 + u^2x^2 + A^3a + 3A^2au + 3Aau^2 + au^3 + A^2bx + 2Abux + bu^2x + Acx^2 + cux^2 + Addx + ddux + f^3x = 0$, où l'on voit que les termes

x^2y^2	de la pro-	x^2u^2, x^2u, x^2
y^3	poſée ont	u^3, u^2, u^1, u^0
xy^2	produit	xu^2, xu, x
x^2y	dans la	x^2u, x^2
xy	transfor-	xu, x
x	mée.	x



Ainſi chaque terme en a donné un à toutes les colomnes qui le précédent, & ces termes ſe trouvent ſur une Droite horizontale, c'eſt-à-dire, paralléle à la déterminatrice qui a donné $y = A$.

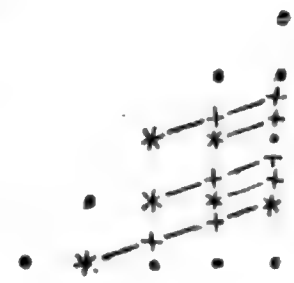
La ſeconde déterminatrice de l'équation propoſée paſſoit par les Caſes y^3 & x^2y^2, & donnoit $y = Ax^2$. La ſubſtitution de $Ax^2 + u$ à y transforme l'équation en $A^2x^6 + 2Aux^4 + u^2x^2 + A^3ax^6 + 3A^2aux^4 + 3Aau^2x^2 + au^3 + A^3bx^5 + 2Abux^3 + bu^2x + Acx^4 + cux^2 + Addx^3 + ddux + f^3x = 0$. Donc les termes

x^2y^2, y^3, xy^2, x^2y, xy, x } ont donné { x^2u^2, x^4u, x^6 ; u^3, x^2u^2, x^4u, x^6 ; xu^2, x^3u, x^5 ; x^2u, x^4 ; xu, x^3 ; x

Et en plaçant la transformée ſur le Tr: anal: on verra que tous les termes, auxquels un terme de la propoſée a été transformé, ont leurs places ſur une même Droite parallèle à la déterminatrice qui a donné l'éq: $y = Ax^2$.

La même choſe ſe vérifie pour les deux autres déterminatrices de l'équation propoſée. La troiſiéme paſſoit par les Caſes y^3 & x, & donnoit une équation de cette forme $y = Ax^{1:3}$. On ſubſtituera donc $Ax^{1:3} + u$ à y, & la transformée ſera $A^3x^{2+2:3} + 2Aux^{2+1:3} + u^2x^2 + A^3ax + 3A^2aux^{2:3} + 3Aau^2x^{1:3} + au^3 + A^2bx^{1+2:3} + 2Abux^{1+1:3} + bu^2x + Acx^{2+1:3} + cux^2 + Addx^{1+1:3} + ddux + f^3x = 0$. Ainſi les termes

x^2y^2, y^3, xy^2, x^2y, xy, x } donnent { x^2u^2, $x^{2+1:3}u$, $x^{2+2:3}$; u^3, $x^{1:3}u^2$, $x^{2:3}u$, x ; xu^2, $x^{1+1:3}u$, $x^{1+2:3}$; x^2u, $x^{2+1:3}$; xu, $x^{1+1:3}$; x

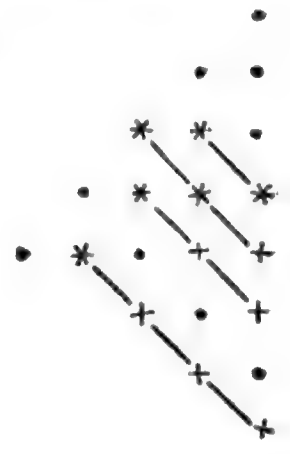


Si

Si on place cette transformée sur le Tr : anal : on voit que chaque terme de la proposée a donné un terme à toutes les colomnes qui le précédent, & que ces termes sont sur des Droites paralléles à la déterminatrice qui a donné $y = Ax^{1:3}$: mais comme l'exposant de l'Ordre de y est la fraction $\frac{1}{3}$, il a fallu, pour placer ces termes, diviser en trois parties égales les intervalles des Cases contiguës sur une même colomne [§. 89]. CH. VII. §. 105.

Enfin la quatriéme déterminatrice de l'équation proposée, passant par x^2y & x, donne $y \overset{b}{=} Ax^{-1}$. Et la substitution de $Ax^{-1} + u$ à y change la proposée en $A^3 + 2Aux + uux^2 + Aax^{-1} + 3A^2aux^{-2} + 3Aauux^{-1} + au^3 + A^2bx^{-1} + 2Abu + bu^2x + Acx + cux^2 + Add + ddux + f^3x = 0$. Donc les termes

x^2y^3, y^3, xy^2, x^2y, xy, x produisent x^2u^3, xu, x^0 ; u^3, $x^{-1}u^2$, $x^{-2}u$, x^{-3} ; xu^2, u, x^{-1} ; x^2u, x ; xu, x^0 ; x



Ici l'on observe la même Régle : mais comme l'exposant négatif [— 1] de l'ordre d'y a fait naitre des termes où x a un exposant négatif ; il a fallu, pour placer ces termes, prolonger le Triangle au-dessous de la Bande sans x [§. 89].

106. Ces

CH. VII. §. 105.

106. Ces Exemples font voir que quand pluſieurs termes de l'équation propoſée ſont ſur la déterminatrice ou ſur quelcune de ſes paralléles; en un mot, quand ils ſont d'un même ordre; ils ſe transforment en des termes, qui, diſtribuez ſur une même Droite, ſe mêlent & ſe logent quelquefois pluſieurs enſemble dans la même Caſe.

Ainſi, dans le 1. Ex. du §. préc. quand on a employé la déterminatrice horizontale, les termes x^2y^2 & cx^2y, qui étoient ſur cette déterminatrice, ont été transformés en $x^2u^2 + (2A+c)x^2u + (A^2 + Ac)x^2$, & les termes bxy^2, $ddxy$, f^3x, qui étoient ſur une Droite paralléle à cette déterminatrice, ont donné $bxu^2 + (2Ab + dd)xu + (A^2b + Add + f^3)x$, qui ſont encore ſur la même Droite.

Donc, lorſqu'on a pluſieurs termes d'un même ordre, comme $ax^my^n + bx^{m+h}y^{n-1} + cx^{m+2h}y^{n-2} + \&c.$ juſqu'à x^{m+nh}, qui ſont tous de l'ordre $m+nh$ puiſque $y\,[= Ax^h]$ eſt de l'ordre h; la ſubſtitution de $Ax^h + u$ à y les transforme en une ſuite de termes telle que $Px^mu^n + Qx^{m+h}u^{n-1} + Rx^{m+2h}u^{n-2} + \&c.$ juſqu'à Zx^{m+nh}, qui ſont auſſi tous de l'ordre $m+nh$, & où les expoſants d'x font une progreſſion arithmetique dont la différence eſt h, & les expoſants d'u une autre progr: arith: dont la différence eſt 1.

Les coëfficients P, Q, R, $\&c.$ de ces termes ſe peuvent calculer par une Régle abrégée, pareille à celle du §. 26, & fondée ſur le même principe. Le terme ax^my^n, par

par la ſubſtitution de $u + Ax^{b}$ à y, ſe transforme en $ax^{m}u^{n} + naAx^{m+b}u^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}aA^{2}x^{m+2b}u^{n-2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}aA^{3}x^{m+3b}u^{n-3}$ &c. Le terme $bx^{m+b}y^{n-1}$ ſe transforme en $bx^{m+b}u^{n-1} + \frac{n-1}{1}bAx^{m+2b}u^{n-2} + \frac{n-1.n-2}{1.2}bA^{2}x^{m+3b}u^{n-3}$, &c. Le terme $cx^{m+2b}y^{n-2}$ en $cx^{m+2b}u^{n-2} + \frac{n-2}{1}cAx^{m+3b}u^{n-3}$ &c. Et le terme $dx^{m+3b}y^{n-3}$ en $dx^{m+3b}u^{n-3}$ &c. Donc la ſomme $ax^{m}y^{n} + bx^{m+b}y^{n-1} + cx^{m+2b}y^{n-2} + dx^{m+3b}y^{n-3}$ &c. ſe transforme en $ax^{m}u^{n} + (naA + b)x^{m+b}u^{n-1} + (\frac{n.n-1}{1.2}aA^{2} + \frac{n-1}{1}bA + c)x^{m+2b}u^{n-2} + (\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}aA^{3} + \frac{n-1.n-2}{1.2}bA^{2} + \frac{n-2}{1}cA + d)x^{m+3b}u^{n-3}$, &c.

D'où l'on tire cette Régle.

On écrira en prémiére ligne tous les termes d'un même ordre, ou même toute l'équation, en diſtinguant ſeulement, pour plus de commodité, les ordres de ſes termes, & changeant, ſi l'on veut, y en u. Je dis ſi l'on veut; car on trouvera par expérience qu'il eſt plus ſimple de ne point faire ce changement, mais alors il faut ſe ſouvenir que y, qui marque avant l'opération toute la Série, & pendant l'opération ſon premier terme ſeulement, ne marque, pendant la ſeconde opération, que le ſecond

§. 106. terme, & pendant la troiſiéme opération, que le troiſiéme terme, &c. Ce double emploi d'y ne cauſe aucune équivoque. On écrira donc en prémiére ligne l'équation propoſée, les termes étant rangés ſelon leurs ordres. On multipliera chaque terme par l'expoſant d'y & par $Ax^{\frac{b}{}}$, & en diviſant ces produits par y, on aura la ſeconde Ligne. A celle-ci on multipliera chaque terme par la moitié de l'expoſant d'y & par $Ax^{\frac{b}{}}$, & diviſant tout par y, on aura la troiſiéme ligne. Chaque terme de cette ligne ſera multiplié par le tiers de l'expoſant d'y & par $Ax^{\frac{b}{}}$, & diviſé par y pour avoir la quatriéme ligne. On continuera de même juſqu'à-ce qu'on n'ait plus que des termes ſans y. La ſomme de toutes ces lignes eſt la transformée, qu'on ordonnera en ajoûtant les termes qui peuvent s'ajoûter & retranchant ceux qui ſe détruiſent mutuellement.

Ainſi, dans l'équation du §. préced. ſi on veut employer la déterminatrice horizontale qui donnoit l'éq : $x^2y^2 + cx^2y = 0$, ou $y = -c$, on aura $A = -c$, & $b = 0$. Et l'opération ſe fera ainſi :

	I. Ordre.		II. Ordre.			III. Ordre.
	x^2y^2	$+cx^2y$	$+bxy^2$	$+ddxy$	$+f^3x$	$+ay^3$
	2	1	2	1	0	3
$x-c$	$-2cx^2y$	$-ccx^2$	$-2bcxy$	$-cddx$		$-3acyy$
	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0		$\frac{1}{2}$
	$+ccxx$		$+bccx$			$+3accy$
	0		0			$\frac{1}{3}$
						$-ac^3$

La transformée eſt donc $x^2y^2 + (c-2c)x^2y + (cc-cc)x^2 + bxy^2 + (dd-2bc)xy + (f^3-cdd+bcc)x + ay^3 -$

$ay^3 - 3acyy + 3accy - ac^3 = 0$, où le ſecond terme ſe réduit à $-cx^2y$, & le troiſiéme à rien. CH. VII. §. 106.

Si dans la même équation on veut employer la déterminatrice qui paſſe par les Caſes cx^2y & f^3x, & qui donne $y = -\frac{f^3}{cx}$, l'opération ſera ainſi :

I^e. IIe. IIIe. IVe Ordres.

$$cx^2y + f^3x + x^2y^2 + ddxy + bxyy + ay^3$$

$$x - \frac{f^3}{cx}$$

1	0	2	1	2	3
$-f^3x$		$-\frac{2f^3xy}{c}$	$-\frac{f^3dd}{c}$	$-\frac{2bf^3y}{c}$	$-\frac{3af^3yy}{cx}$
0		$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$
		$+\frac{f^6}{cc}$		$+\frac{bf^6}{ccx}$	$-\frac{3af^6y}{cccxx}$
		0		0	$\frac{1}{3}$
					$+\frac{af^9}{c^3x^3}$

Ainſi la transformée eſt $cx^2y + (f^3 - f^3)x + x^2y^2 + (dd - \frac{2f^3}{c})xy - (\frac{f^3dd}{c} - \frac{f^6}{cc}) + bxyy - \frac{2bf^3y}{c} + \frac{bf^6}{ccx} + ay^3 - \frac{3af^3yy}{cx} + \frac{3af^6y}{c^2x^2} - \frac{af^9}{c^3x^3} = 0$, dont le ſecond terme diſparoit.

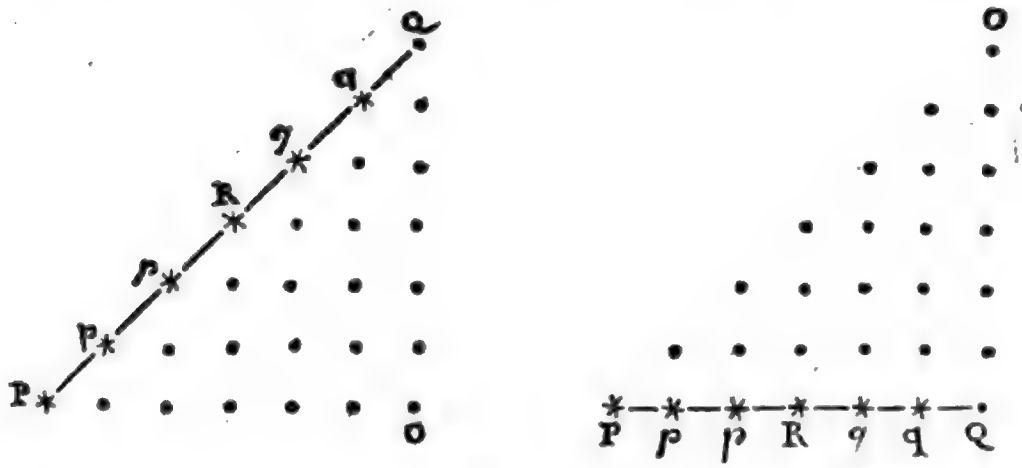
107. ON PEUT tirer de cette obſervation divers moyens d'abreger le Calcul des Séries. Il ſeroit facile d'en déduire une maniére aſſez ſimple de calculer la valeur du terme qui remplit une Caſe aſſignée après un nombre de transformations quelconque ; de maniére que connoiſſant

CH. VII. §. 107. auſſi par quelles Caſes paſſe la déterminatrice de la derniére transformée, on aura l'équation qu'elle fournit, & par conſéquent le terme correſpondant de la Série, avec beaucoup de facilité. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'épuiſer cette matiére. Voici une remarque plus néceſſaire à nôtre deſſein. Si la ſomme $ax^m y^n + bx^{m+h} y^{n-1} + cx^{m+2h} y^{n-2}$ &c. des termes d'un même ordre quelconque, eſt diviſible, une ou pluſieurs fois, par $y - Ax^h$, qui eſt la valeur d'u, la ſomme des termes auxquels ceux-ci ſe transforment [en mettant $u + Ax^h$ pour y] eſt auſſi diviſible, le même nombre de fois, par u; puiſque ces deux ſommes ne différent que par l'expreſſion. Or les termes de la transformée conſtituent [§. 106] une ſuite $Px^m u^n + Qx^{m+h} u^{n-1} + Rx^{m+2h} u^{n-2} +$ &c. qui ſe termine par les termes $+ Xx^{m+(n-2)h} u^2 + Yx^{m+(n-1)h} u + Zx^{m+nh}$. Cette ſuite ne peut être diviſible par u, à moins que le dernier terme ne manque, & que Z ne ſoit zéro. Elle ne peut être diviſible par uu, ou deux fois par u, ſi ſes deux derniers termes, Y & Z ne ſont pas zéro. Afin qu'elle ſoit diviſiblé par u^3, ou trois fois par u, il faut que X, Y & Z ſoient zéro. En général autant de fois que u, ou plûtôt $y - Ax^h$ qui eſt ſa valeur, diviſe la ſomme des termes d'un ordre quelconque, autant manque-t'il, à la transformée, de termes de cet ordre ſur les prémiéres colomnes. Car les termes Z, Y, X, &c. ſont ceux qui ont leurs places ſur la prémiére, ſeconde, troiſiéme, &c. colomnes.

Donc, puiſque $y - Ax^h = 0$ eſt une des racines de l'équation que fournit la déterminatrice, $y - Ax^h$ diviſe, au

au moins une fois, la ſomme des termes qui ſont ſur cette déterminatrice. Ainſi, il manque néceſſairement à la transformée le terme qui devroit être au point où la déterminatrice coupe la prémiére Bande verticale. Et il manquera à la transformée les deux termes dont les places ſont les points où la déterminatrice coupe la prémiére & la ſeconde colomne, ſi $y - Ax^b$ diviſe deux fois la ſomme des termes qui ſont ſur la déterminatrice, ſi $y - Ax^b = 0$ eſt une racine double de l'équation que fournit cette déterminatrice. Mais ſi $y - Ax^b = 0$ eſt une racine triple de cette équation, il manquera à la transformée les termes qui devroient être où la déterminatrice croiſe les trois prémiéres colomnes, & ainſi de ſuite. CH. VII. §. 107.

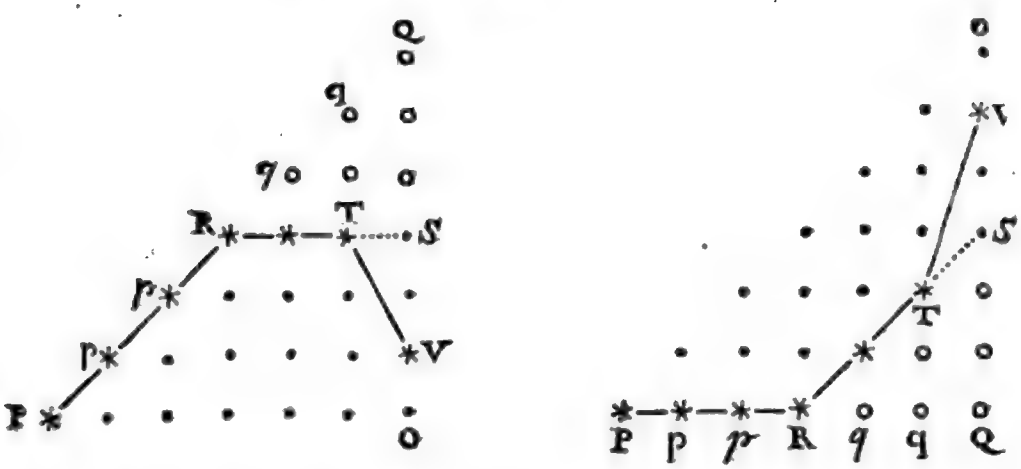
108. Si donc PQ repréſente une déterminatrice, & que $y - Ax^b = 0$ ſoit une racine ſimple de l'équation qu'elle fournit, il ne manque à la transformée, ſur cette déterminatrice, que le terme qui devroit remplir la Caſe Q ſur la prémiére colomne QO: du moins il ne lui manque pas le terme q ſur la ſeconde colomne. Pq eſt auſſi



CH. VII. §. 108. déterminatrice de la transformée ; car tous les termes de la transformée ſont au-deſſous [ou au-deſſus] de Pq, comme l'étoient tous les termes de la propoſée [§. 109] ; mais c'eſt une déterminatrice inutile, parce que Pq, étant partie de PQ, a la même inclinaiſon que PQ aux lignes & aux colomnes. Ainſi PQ ayant donné $y = Ax^{b}$, Pq donneroit $u = Bx^{b}$ [§. 85]. On ne doit plus employer Pq après avoir employé PQ [§. 103]. Mais du point q il part une autre déterminatrice, qui porte ſur la plus haute [ou la plus baſſe] Caſe pleine de la prémiére colomne qO, & qui donne une équation par laquelle on détermine le ſecond terme de la Série.

Que ſi $y - Ax^{b} = 0$ eſt une racine multiple de l'équation fournie par la déterminatrice PQ, par ex. une racine triple ; alors dans la transformée les Caſes Q, q, q, reſtent vuides, & la déterminatrice Pp ſe termine à la Caſe R ſur la quatriéme colomne [§. *pr.*]. Il eſt inutile, par la raiſon alléguée [§. 103], de conſidérer encore cette déterminatrice, mais il en part une (RS) de la Caſe R, qui peut ſe terminer en S à la prémiére colomne, & c'eſt la ſeconde déterminatrice qui donne une équation par laquelle on trouve le ſecond terme de la Série.

Il peut arriver auſſi que le terme S manque, & que la déterminatrice RS ſe termine à quelque autre colomne que la prémiére, comme en T ; & alors ce point T donne naiſſance à une autre déterminatrice TV ; & ſi celle-ci ne va pas à la prémiére colomne, mais ſe termine plûtôt, il part de ſon extrémité une autre déterminatrice, & de celle-là peut-être encore une autre &c. juſqu'à-ce qu'on vienne aboutir à la prémiére colomne. Chacune de ces déterminatrices, ayant ſon inclinaiſon particuliére aux lignes



gnes & aux colomnes, donne un expoſant particulier à la puiſſance de x dans le ſecond, [ou troiſiéme, quatriéme, &c.] terme : ce qui fait que la Série ſe fourche en autant de Séries qu'il y a de racines dans toutes les équations que fourniſſent toutes ces déterminatrices. Mais ſans trop s'embaraſſer de cela, il ſuffit de prendre la déterminatrice R T, qui part du point R extrémité de la prémiére déterminatrice négligée PR, & de faire uſage de toutes les racines de l'équation qu'elle fournit. Une de ces racines eſt $u = o$; la ſomme des termes qui ſont ſur cette déterminatrice RT étant diviſible par u, puiſque RT ne va pas juſqu'à la prémiére colomne qui eſt la Bande ſans u. Employant donc cette racine pour avoir la transformée ſuivante, il faudra à u ſubſtituer $o + t$ [§. 102], ce qui n'eſt qu'écrire t pour u. Ce changement laiſſe tous les termes de l'équation dans leurs places. Ainſi la transformée ſuivante a les mêmes déterminatrices que la précédente : & comme on a déjà employé PR & RT, on viendra à la déterminatrice TV, tout comme ſi on avoit paſſé d'abord de PR à TV, la racine $u = o$ de l'équation fournie par RT faiſant le même effet que ſi on avoit négligé RT. Ch. VII. §. 108.

Et

Ch. VII. §. 108. Et il en ſeroit de même, ſi la déterminatrice TV, n'aboutiſſoit pas à la prémiére colomne, mais étoit accompagnée de quelques autres déterminatrices.

109. On voit par-là quelle route il faut ſuivre pour calculer les *termes irréguliers* de la Série. J'apelle de ce nom ceux qui ſont donnés par des équations qui peuvent avoir pluſieurs racines, réelles ou imaginaires. Mais il eſt difficile que cette eſpèce de déſordre dure long-tems. Car auſſi-tôt qu'on ſera venu à une déterminatrice, dont l'équation n'a point de racines multiples [ou dès qu'on employe une racine ſimple, ſi cette équation en a de ſimples & de multiples] il ne manquera, à la transformée, des termes qui ont leur place ſur cette déterminatrice, par ex. RS, que le terme S qui devroit être ſur la prémiére colomne [§. 107.]. La déterminatrice de cette transformée partira donc de la Caſe T, la plus haute [ou la plus baſſe] de la ſeconde colomne, & portera ſur la Caſe V, auſſi la plus haute [ou la plus baſſe] des Caſes pleines de la prémiére colomne. Donc, dans l'équation que donne cette déterminatrice TV, la variable inconnuë, *u* par ex. ne monte qu'au premier dégré, puiſque T eſt ſur la ſeconde colomne qui eſt la bande *u*; & cette équation n'aura qu'une ſeule racine, qui ſûrement ſera réelle [§. 94]. Et dès-lors la Série dévient réguliére, parceque toutes les déterminatrices ſuivantes partant du point T, on ne tombe plus dans des équations qui ayent pluſieurs racines. Tous les termes ſuivans de la Série peuvent même ſe calculer avec plus de facilité par la Méthode qu'on va expliquer.

110. Je suppose qu'on ſoit venu à une déterminatrice, dont l'équation a quelque racine ſimple, & qu'on employe cette racine. Pour faciliter l'expreſſion, je la

Digitized by Google

la nommerai la prémiére déterminatrice, en faiſant abſtraction de toutes les précédentes, s'il y en a eu quelques-unes. J'apellerai auſſi l'équation qu'elle fournit, l'équation propoſée, quoiqu'elle puiſſe être une des transformées. CH. VII. §. 110.

Que m déſigne l'ordre des termes par leſquels paſſe cette prémiére déterminatrice, & que $y - Ax^b = 0$ ſoit une racine ſimple de l'équation qu'elle fournit. En ſubſtituant $Ax^b + u$ à y dans la ſomme des termes de l'ordre m, celui qui devroit être ſur la prémiére colomne ſeroit x^m [§. 105] : nous négligeons le coëfficient, dont il ne s'agit point ici. Mais ce terme manque, puiſque $y - Ax^b$ eſt ſuppoſée diviſer la ſomme des termes de l'ordre m. [§. 107]. Le terme $x^{m-b}u$, qui ſuit, tombe ſur la ſeconde colomne, & la Caſe qu'il remplit eſt la plus haute [ou la plus baſſe] des Caſes pleines de cette colomne. Si $m \mp n$ eſt l'expoſant des termes du ſecond ordre ; [le ſigne — eſt pour les Séries deſcendantes, le ſigne + pour les aſcendantes], le terme le plus haut [ou le plus bas] de la prémiére colomne ſera $x^{m \mp n}$. Ainſi la déterminatrice de cette transformée portant ſur les Caſes $x^{m-b}u$ & $x^{m \mp n}$ donnera $u = Bx^{m \mp n - m + b} = Bx^{b \mp n}$ pour le ſecond terme de la Série. La différence $\mp n$ des expoſants b & $b \mp n$ du prémier Ax^b & du ſecond $Bx^{b \mp n}$ terme de la Série, eſt donc la même que celle des expoſants m & $m \mp n$ du prémier & du ſecond ordre.

Dans toutes les transformées ſuivantes, la Caſe $x^{m-b}u$ reſtera pleine, u ſe changeant ſucceſſivement en t, s, r, &c.

Ch. VII. § 110. *&c.* & toutes les déterminatrices ſuivantes partiront de cette Caſe pour atteindre la plus haute [ou la plus baſſe] des Caſes pleines de la prémiére colomne. Elles portent ſucceſſivement ſur les diverſes Caſes de cette colomne, parce qu'à chaque transformation la Caſe par laquelle a paſſé la déterminatrice ſe vuide [§. 107] : mais, d'un autre côté, chaque transformation remplit quelques nouvelles Caſes de cette prémiére colomne [§. 105].

Ainſi quand on ſubſtituë, dans la prémiére transformée, $Bx^{b \mp n} + t$ à u, les termes du prémier ordre m rempliſſent les Caſes $x^{m \mp 2n}$, $x^{m \mp 3n}$, $x^{m \mp 4n}$, *&c.* & les termes du ſecond ordre $m \mp n$ rempliſſent auſſi les Caſes $x^{m \mp 2n}$, $x^{m \mp 3n}$ *&c.* en général $x^{m \mp jn}$ [j marquera un nombre entier quelconque]. Mais la même ſubſtitution dans les termes de l'ordre $m \mp p$ remplira, ſur la prémiére colomne, les Caſes $x^{m \mp p}$, $x^{m \mp p \mp n}$, $x^{m \mp p \mp 2n}$ *&c.* en général $x^{m \mp p \mp jn}$.

Si $x^{m \mp 2n}$ ſe trouve être la Caſe pleine la plus haute [ou la plus baſſe] de la prémiére colomne, la troiſiéme déterminatrice paſſera par $x^{m - b}$ t & $x^{m \mp 2n}$, & donnera $t = Cx^{b \mp 2n}$. Et ſi enſuite $x^{m \mp 3n}$ eſt la plus haute [ou la plus baſſe] des Caſes pleines de cette colomne, on aura $s = Dx^{b \mp 3n}$, & ainſi les expoſants ſucceſſifs de x dans les termes y, u, t, s, *&c.* de la Série ſeroient b, $b \mp n$, $b \mp 2n$, $b \mp 3n$ *&c.* en progreſſion arithmétique dont la différence eſt n. La Série n'auroit point d'autres termes, s'il n'y avoit dans l'équation propoſée point de termes que ceux des ordres m & $m \mp n$. Toutes les transformations à l'infini ne donneroient que des

des termes compris ſous cette expreſſion générale $x^{m \mp jn}$ [j eſt un nombre entier quelconque ou même le zéro]. Ch. VII. §. 110.

Mais s'il y a dans l'équation propoſée des termes d'un autre ordre, dont l'expoſant ſoit $m \mp p$, la Caſe $x^{m \mp p}$ ſera une fois la plus haute [ou la plus baſſe] de la prémiére colomne. Alors la déterminatrice, qui part toûjours de la Caſe $x^{m-h} u$ [ou $x^{m-h} t$, ou $x^{m-h} s$, &c.] donnera $u = Bx^{m \mp p - m + h} = Bx^{h \mp p}$ [ou $t = Cx^{h \mp p}$, ou $s = Dx^{h \mp p}$ &c]. Le terme où x a pour expoſant $h \mp p$ eſt donc un des termes de la Série.

La ſubſtitution de $Bx^{h \mp p} + t$ à u [ou de $Cx^{h \mp p} + s$ à t, &c.] dans les termes des ordres $m \mp jn$ remplira, dans la prémiére colomne, les Caſes $x^{m \mp jn \mp p}$, $x^{m \mp jn \mp 2p}$, $x^{m \mp jn \mp 3p}$ &c. Cette prémiére colomne acquerra donc des termes que repréſente l'expreſſion générale $x^{m \mp jn \mp jp}$. Et la déterminatrice portant ſucceſſivement ſur ces termes, donnera à la Série les termes compris ſous cette expreſſion $x^{h \mp jn \mp jp}$.

On ne fait ici attention qu'aux expoſants. Dans les équations particuliéres il ſe peut faire que quelques-uns de ces termes aient le zéro pour coëfficient. Il auroit été plus exact de dire qu'il n'y a dans la Série aucun terme qui ne ſoit renfermé ſous l'expreſſion générale $Hx^{h \mp jn \mp jp}$.

S'il y avoit dans l'équation propoſée un quatriéme ordre de termes, dont l'expoſant fut $m \mp q$, l'expreſſion gé-

CH. VII. §. 110. nérale des termes de la Série ſeroit $Hx^{b\mp jn\mp jp\mp jq}$; & ainſi de ſuite, s'il y a un plus grand nombre d'ordres.

111. Ainſi quand on eſt parvenu, dans le calcul d'une Série, aux *termes réguliers*, c'eſt-à-dire, quand on eſt venu à une déterminatrice dont l'équation n'a point de racines multiples, ou qu'on ne veut employer qu'une racine ſimple de l'équation que donne une déterminatrice ; on trouve aiſément la ſuite des expoſants de x dans les termes ſuivants de la Série, en prenant les expoſants m, $m\mp n$, $m\mp p$, $m\mp q$, *&c.* de tous les ordres des termes de l'équation, & les retranchant tous du plus grand m [ou ôtant de tous le plus petit m] pour avoir les différences n, p, q, *&c.* Puis on poſera b, expoſant du prémier terme, qui eſt donné par la prémiére déterminatrice, & on lui ajoûtera, ou on en retranchera, ſucceſſivement les multiples n, $2n$, $3n$, *&c.* de la prémiére différence. A tous ces termes on ajoûtera enſuite, ou en retranchera, ſucceſſivement les multiples p, $2p$, $3p$, *&c.* de la ſeconde différence ; & à tous les termes déjà écrits on ajoûtera, ou on en retranchera, les multiples q, $2q$, $3q$, *&c.* de la troiſiéme différence. On continuera de la ſorte, juſqu'à-ce qu'on ait épuiſé toutes les différences. Enfin on rangera ces expoſants ſelon leur grandeur.

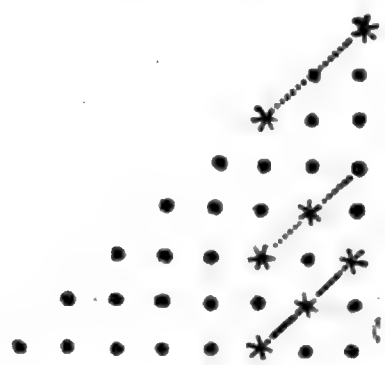
La progreſſion arithmétique qui commence par b & dont la différence eſt le plus grand commun diviſeur de n, p, q, *&c.* renferme tous ces expoſants. Mais elle contient auſſi d'autres termes, non néceſſaires, à moins que la plus petite différence n ne ſoit le commun diviſeur de toutes les autres.

112. Par cette Régle, on a la forme de la Série, c'eſt-à-dire, la ſuite des puiſſances de x qui forment ſes termes. Mais

Mais il faut de plus avoir leurs coëfficients. On les calcule aſſés aiſément en ſuppoſant à chacune des puiſſances de x qui entrent dans la Série, un coëfficient indéterminé $A, B, C, D, \&c.$ en ſubſtituant, dans l'équation, au lieu d'y cette Série indéterminée qui en repréſente la valeur, & en déterminant l'un après l'autre chaque coëfficient $A, B, C, D, \&c.$ par les équations qui ſe forment en égalant à zéro chaque terme de la transformée. En un mot, on calcule ces coëfficients par la Méthode des indéterminées, que DES CARTES, & après lui tant d'habiles Géométres, ont employé avec un ſi grand ſuccès pour la réſolution des plus beaux Problémes. GR. VII. §. 112.

Exemple 1. Soit propoſée l'éq: $6x^7 - 2x^5y^2 - a^3x^2y^2 + 4a^3x^3y + 2a^5xx - 3a^5xy + a^5yy = 0$. On demande la valeur d'y en x par une Série aſcendante?

On mettra l'équation ſur le Triangle analytique, & puiſqu'on veut une Série aſcendante, on cherchera ſes déterminatrices inférieures. Elle n'en a qu'une, qui donne l'éq: $a^5yy - 3a^5xy + 2a^5xx = 0$, ou $yy - 3xy + 2xx$



$= 0$, qui a deux racines ſimples $y = x$, & $y = 2x$, en général $y = Ax$. Donc $b = 1$. En menant des droites paralléles à la déterminatrice par tous les termes de l'équa-

CH. VII. § 112. tion, on voit qu'elle eſt compoſée de trois ordres. Le premier, qui contient les termes a^3yy, $3a^3xy$, $2a^3xx$ par leſquels paſſe la déterminatrice, a 2 pour ſon expoſant, parce que cette droite coupe la prémiére colomne au centre de la Caſe x^2. Le ſecond renferme les termes $-a^3x^2y^2$, & $+4a^3x^3y$, & ſon expoſant eſt 4, parce que la droite qui paſſe par les Caſes x^2y^2 & x^3y vient couper la prémiére colomne au centre de la Caſe x^4. Et le troiſiéme ordre, qui eſt compoſé des termes $-2x^3y^2$ & $6x^7$, a, par une raiſon pareille, 7 pour ſon expoſant. On reconnoitra également bien ces trois ordres, & leurs expoſants, en ſubſtituant dans l'équation au lieu d'y ſa valeur $Ax^b = Ax$ ce qui la change en $6x^7 - 2A^2x^7 - A^2a^3x^4 + 4Aa^3x^4 + 2a^3xx - 3Aa^3xx + A^2a^3xx = 0$, où l'on voit clairement que les deux premiers termes ſont de l'ordre 7, les deux ſuivants de l'ordre 4, & les trois derniers de l'ordre 2. Comme on veut une Série aſcendante, on ôtera le plus petit expoſant 2 des autres 4 & 7, & on aura les différences 2 & 5. On cherchera donc les nombres compris ſous l'expreſſion générale $b + jn + jp$ ou $1 + 2j + 5j$, en poſant 1 [b], lui ajoûtant les multiples de 2 [n], & ajoûtant à tous ces nombres les multiples de 5 [p]. On aura

1, 3, 5, 7, 9, 11, &c.
6, 8, 10, 12, 14, 16, &c.
11, &c.
16, &c.
21, &c.

qui, rangés ſelon leur grandeur, font, 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, &c. La forme de la Série ſera donc $y = Ax + Bx^3 + Cx^5 + Dx^6 + Ex^7 + Fx^8 + \&c.$ Qu'on ſubſtituë cette valeur d'y dans l'équation, & on aura

$6x^7 =$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{llllll}
6x^7 = & \cdot\ ;\ \cdots\cdots\cdots + 6x^7 & & & & \\
-2x^5yy = & \cdots\cdots\cdots -2A^2x^7 & * & -\ \&c & & \\
-a^3x^2y^2 = & -a^3A^2x^4 - 2a^3ABx^6 - & * & -2a^3ACx^8 - \&c & & \\
 & & & -a^3B^2x^8 - \&c. & & \\
+4a^3x^3y = & +4a^3Ax^4 + 4a^3Bx^6 & * & +4a^3Cx^8 + \&c. & & \\
+2a^5xx = & 2a^5xx & & & & \\
-3a^5xy = & -3a^5Axx - 3a^5Bx^4 - 3a^5Cx^6 - 3a^5Dx^7 - 3a^5Ex^8 + \&c. & & & & \\
+a^5yy = & +a^5A^2xx + 2a^5ABx^4 + 2a^5ACx^6 + 2a^5ADx^7 + 2a^5AEx^8 + \&c. & & & & \\
 & +a^5B^2x^6 + * + 2a^5BCx^8 + \&c. & & & &
\end{array}
$$

En égalant ſucceſſivement chaque terme à zéro, on aura ces équations

$$2a^5 - 3a^5A + a^5AA = 0, \text{ ou } AA - 3A + 2 = 0$$
$$-a^5A^2 + 4a^5A - 3a^5B + 2a^5AB = 0,$$
$$\text{ou } AA = 4A = (2aaA - 3aa)B$$
$$-2a^5AB + 4a^5B - 3a^5C + 2a^5AC + a^5B^2 = 0,$$
$$\text{ou } 2AB - 4B - aaBB = (2aaA - 3aa)C$$
$$6 - 2A^2 - 3a^5D + 2a^5AD = 0,$$
$$\text{ou } 2AA - 6 = (2aaA - 3aa)a^5D$$
$$-2a^5AC - a^5B^2 + 4a^5C - 3a^5E + 2a^5AE + 2a^5BC = 0,$$
$$\text{ou } 2AC + B^2 - 4C - 2a^2BC = (2a^2A - 3a^2)E$$
$$\&c \qquad\qquad \&c$$

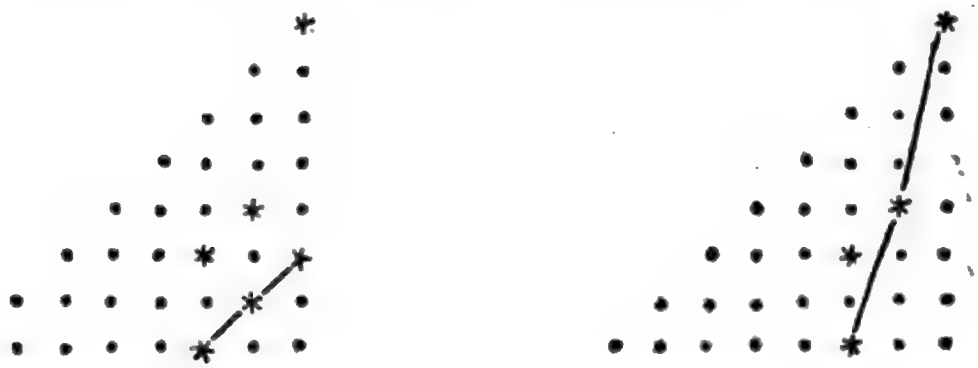
Deſquelles on tire les valeurs de $A, B, C, D, E, \&c.$

$$A = 1^{\circ} \cdots\cdots \text{ ou } A = 2$$
$$B = \frac{AA - 4A}{2aaA - 3aa} = \frac{3}{aa} \cdots\cdots B = -\frac{4}{aa}$$
$$C = \frac{2AB - 4B - a^2B^2}{2aaA - 3aa} = \frac{15}{a^4} \cdots\cdots C = -\frac{16}{a^4}$$
$$D = \frac{2AA - 6}{(2aaA - 3aa)a^5} = \frac{4}{a^5} \cdots\cdots D = +\frac{2}{a^5}$$
$$E = \frac{2AC + BB - 4C - 2a^2BC}{2aaA - 3aa} = \frac{111}{a^6} \cdots E = -\frac{112}{a^6}$$
$$\&c \qquad\qquad \&c.$$

CH. VII. §. 112. Il y a deux Séries aſcendantes $y = x + \frac{3x^3}{aa} + \frac{15x^5}{a^4} + \frac{4x^6}{a^5} + \frac{111x^7}{a^6}$ &c. & $y = 2x - \frac{4x^3}{aa} - \frac{16x^5}{a^4} + \frac{2x^6}{a^5} - \frac{112x^7}{a^6}$ &c.

Exemple 2. Soit propoſée l'éq : $x^7 - a^3x^3y + a^3x^2y^2 + a^5yy - 2a^5xy + a^5xx = 0$, d'où l'on demande de tirer la valeur d'y en x par une Série aſcendante ?

On mettra cette éq : ſur le Tr : anal : & on cherchera les déterminatrices inférieures. Il n'y en a qu'une, qui donne l'éq : $a^5yy - 2a^5xy + a^5xx = 0$, ou $yy - 2xy + xx = 0$, qui a deux racines égales, ou une ſeule racine double $y = x$. Il faut donc [§. 102, 108] ſubſtituer $x + u$ à y dans l'équation propoſée, & elle ſe réduira à $x^7 + a^3x^3u + a^3x^2u^2 + a^5uu = 0$, qu'on mettra auſſi ſur le Tr : anal : Elle y a deux déterminatrices inférieures, dont l'une donne l'éq : $a^5uu + a^3x^3u = 0$, ou $u = -\frac{x^3}{aa}$,



& l'autre donne $a^3x^3u + x^7 = 0$, ou $u = -\frac{x^4}{a^3}$. L'un & l'autre expoſant d'x ſurpaſſe le précédent : ainſi ces deux déter-

déterminatrices ſont utiles. Mais il ſuffit [§. 108] de conſidérer la prémiére, qui donne $u = -\frac{x^3}{aa} = Ax^b$, c'eſt-à-dire $b = 3$, & $A = -\frac{1}{aa}$. En ſubſtituant Ax^3, ou ſimplement x^3, dans l'éq: $x^7 + a^3x^3u + a^3x^2u^2 + a^3uu = 0$, elle ſe change en $x^7 + a^3x^6 + a^3x^8 + a^5x^6 = 0$, où l'on voit trois ordres de termes, dont les expoſants ſont 6, 7, 8, & les différences 1, 2. Comme la plus petite diviſe la plus grande, la ſuite des expoſants d'x ſera la progr: arith: 3, 4, 5, 6, &c. dont le premier terme eſt 3 [b], & la différence 1 [n]. La forme de la Série ſera donc $u = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dx^6$ &c. & cette valeur d'x ſubſtituée dans l'équation donne

CH. VII. §. 112.

$$
\begin{array}{rlllll}
-x^7 = & \ldots & + & x^7 & & \\
+a^3x^3u = & +a^3Ax^6 & +a^3Bx^7 & +a^3Cx^8 & +a^3Dx^9 & +a^3Ex^{10} + \&c. \\
+a^3x^2u^2 = & \ldots\ldots & & +a^3A^2x^8 & +2a^3ABx^9 & +2a^3ACx^{10} + \&c. \\
 & & & & & +a^3BBx^{10} + \&c. \\
+a^5uu = & +a^5A^2x^6 & +2a^5ABx^7 & +2a^5ACx^8 & +2a^5ADx^9 & +2a^5AEx^{10} + \&c. \\
 & & & +a^5BBx^8 & +2a^5BCx^9 & +2a^5BDx^{10} + \&c. \\
 & & & & & +a^5CCx^{10} + \&c.
\end{array}
$$

D'où l'on tire, en égalant chaque terme à zéro,

$a^3A + a^3AA = 0$ . . . . . c'eſt-à-dire, $A = -\frac{1}{aa}$ ou $A = 0$

$1 + a^3B + 2a^3AB = 0$ . . . . . $B = \frac{1}{aaa}$ .. $B = -\frac{1}{aaa}$

$a^3C + a^3AA + 2a^3AC + a^3BB = 0$ . . . . $C = \frac{2}{a^4}$ .. $C = -\frac{1}{a^4}$

$a^3D + 2a^3AB + 2a^3AD + 2a^3BC = 0$ . . . $D = \frac{6}{a^5}$ .. $D = -\frac{2}{a^5}$

$a^3E + 2a^3AC + a^3BB + 2a^3AE + 2a^3BD + a^3CC = 0$ .. $E = \frac{7}{a^6}$ .. $E = -\frac{4}{a^6}$

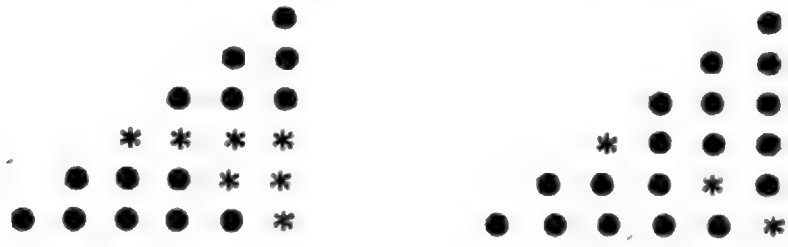
&c. &c. &c.

CH. VII. §. 112. Ainſi u s'exprime par deux Séries, à chacune deſquelles ajoûtant x, on aura ces deux valeurs d'y, $y = x - \frac{x^3}{aa} + \frac{x^4}{a^3} + \frac{2x^5}{a^4} + \frac{2x^6}{a^5} + \frac{7x^7}{a^6}$ &c. & $y = x - \frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^6}{a^5} - \frac{4x^7}{a^6}$ &c. Cette derniére eſt préciſément celle qu'auroit donné la déterminatrice dont l'équation étoit $u = -\frac{x^4}{a^3}$. Car, en ſubſtituant x^4 à u dans l'éq: $x^7 + a^3x^3u + a^3x^2u^2 + a^5uu = 0$, on la change en $x^7 + a^3x^7 + a^3x^{10} + a^5x^8 = 0$, où l'on voit trois ordres de termes dont les expoſants ſont 7, 8, 10. Les différences ſont donc 1, 3, & comme la plus petite diviſe la plus grande, la ſuite des expoſants d'x eſt 4, 5, 6, 7, &c. & la forme de la Série $y = Ax^4 + Bx^5 + Cx^6$ &c. qui, par la détermination des coëfficients ſe convertit en $-\frac{x^4}{a^3} - \frac{x^5}{a^4} - \frac{2x^6}{a^5} - \frac{4x^7}{a^6}$ &c. Ainſi cette déterminatrice ne donne que la ſeconde des deux Séries qu'avoit fourni l'autre.

Exemple 3. On demande une Série deſcendante, qui donne la valeur d'y en x tirée de cette éq: $x^2y^3 + 3ax^2y^2 + 3a^2x^2y + a^3xx - a^3xy - a^4x + a^5 = 0$.

L'ayant miſe ſur le Tr: anal: on ne lui trouve qu'une déterminatrice ſupérieure qui donne l'éq: $x^2y^2 + 3ax^2y^1 + 3a^2x^2y + a^3x^2 = 0$, ou, diviſant par x^2, $y^3 + 3ay^2 + 3a^2y + a^3 = 0$ dont la racine unique, mais triple, eſt $y = a$. On ſubſtituera donc $a + u$ à y dans l'équation propoſée, & on la transformera en $x^2u^3 - a^3xu + a^5 = 0$. Celle-ci, miſe ſur le Triangle, a deux déterminatrices ſupérieures, dont l'une donne $x^2u^3 - a^3xu = 0$, ou $u = \pm a^{1/2}x^{-1/2}$ & l'autre $-a^3xu + a^5 = 0$, ou $u = a^2x^{-1}$. Il ſuffira d'employer la prémiére [§. 108], qui donne $b =$

$b = -\frac{1}{2}$; & ſubſtituant $x^{-1:2}$ à u dans la transformée, CH. VII. §. 112.



on la changera en $x^{1:2} - a^1 x^{1:2} + a^1 x^0 = 0$, où il n'y a que deux ordres dont les expoſants ſont $\frac{1}{2}$ & 0. Il n'y a donc qu'une différence $\frac{1}{2}$; la ſuite des expoſants eſt $-\frac{1}{2}$, -1, $-\frac{3}{2}$, -2, &c. & la forme de la Série $Ax^{-1:2} + Bx^{-1} + Cx^{-3:2}$ &c. Cette Série ſubſtituée à u,

$$x^2u^3 = A^3x^{\frac{3}{2}} + 3AABx^0 + 3AACx^{-\frac{1}{2}} + 3AADx^{-1} + 3AAEx^{-\frac{3}{2}} + \&c.$$
$$+ 3ABB \quad + 6ABC \quad + 6ABD$$
$$+ 3ACC$$
$$+ B^3 \quad + 3BBC$$
$$-a^1xu = -a^1Ax^{\frac{1}{2}} - a^1Bx^0 - a^1Cx^{-\frac{1}{2}} - a^1Dx^{-1} - a^1Ex^{-\frac{3}{2}} - \&c.$$
$$+ a^3 = \quad + a^3$$

donne ces équations

$A^3 - a^3A = 0$ . . . . . c'eſt-à-dire $A = \pm a^{1:2}$ .. ou $A = 0$
$3AAB - a^3B + a^3 = 0$ . . . . . $B = -\frac{1}{2}aa$ . . . $B = aa$
$3AAC + 3ABB - a^3C = 0$ . . . . $C = \mp\frac{3}{8}a^{1:2}$ . . . $C = 0$
$3AAD + 6ABC + B^3 - a^3D = 0$ . . . $D = -\frac{1}{2}a^3$ . . . $D = a^3$
$3AAE + 6ABD + 3ACC + 3BBC - a^3E = 0$. $E = \mp\frac{105}{128}a^{1:2}$ . . . $E = 0$
&c. &c. &c.

On a donc trois Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'u en x, ſçavoir, $u = a^{1:2}x^{-1:2} - \frac{1}{2}aax^{-1} - \frac{3}{8}a^{5:2}x^{-3:2} - \frac{1}{2}a^3x^{-2} + \frac{105}{128}a^{7:2}x^{-5:2}$ &c. $u = -a^{1:2}x^{-1:2} - \frac{1}{2}aax^{-1}$

CH. VII. §. 112. $-\frac{1}{2}aax^{-1}+\frac{1}{8}a^{5:2}x^{-3:2}-\frac{1}{2}a^{4}x^{-2}-\frac{105}{128}a^{7:2}x^{-5:2}$ &c. & $u=aax^{-1}+a^{3}x^{-2}$ &c. Cette derniére eſt juſtement celle qu'auroit donné, un peu plus facilement, la ſeconde déterminatrice qui donnoit $u=a^{2}x^{-1}$. Car x^{-1} ſubſtitué à u dans l'éq : $x^{2}u^{3}-a^{3}xu+a^{5}=0$ la change en $x^{-1}-a^{3}+a^{5}=0$: ce qui manifeſte deux ordres, dont les expoſants ſont -1 & 0. Il n'y a donc qu'une différence 1, & la forme de la Série eſt $Ax^{-1}+Bx^{-2}+Cx^{-3}+Dx^{-4}$ &c. valeur qui étant ſubſtituée à u dans l'équation,

$$x^{2}u^{3}=\ldots\ldots A^{3}x^{-1}+3AABx^{-2}+3AACx^{-3}+3AADx^{-4}+\text{&c.}$$
$$+3ABB\quad+6ABC$$
$$+B^{3}$$
$$-a^{3}xu=-a^{3}A-a^{3}Bx^{-1}-a^{3}Cx^{-2}-a^{3}Dx^{-3}-a^{3}Ex^{-4}-\text{&c.}$$
$$+a^{5}\quad=\quad a^{5}\quad+$$

donne ces équations

$-a^{3}A+a^{5}=0$ . . . . . c'eſt-à-dire, $A=a^{2}$

$A^{3}-a^{3}B=0$ . . . . . $B=a^{3}$

$3AAB-a^{3}C=0$ . . . . . $C=3a^{4}$

$3AAC+3ABB-a^{3}D=0$ . . . . . $D=10a^{5}$

$3AAD+6ABC+B^{3}-a^{3}E=0$ . . . . $E=49a^{6}$

&c. &c.

Donc $u=a^{2}x^{-1}+a^{3}x^{-2}+3a^{4}x^{-3}+10a^{5}x^{-4}+49a^{6}x^{-5}$ &c. Ainſi la valeur cherchée d'y en x s'exprime par trois Séries deſcendantes, $y=a+a\sqrt{\frac{a}{x}}-\frac{aa}{2x}-\frac{3aa}{8x}\sqrt{\frac{a}{x}}-\frac{a^{3}}{2xx}+\frac{105a^{3}}{128xx}\sqrt{\frac{a}{x}}$ &c. $y=a-a\sqrt{\frac{a}{x}}-\frac{aa}{2x}+\frac{3aa}{8x}\sqrt{\frac{a}{x}}-\frac{a^{3}}{2xx}-\frac{105a^{3}}{128xx}\sqrt{\frac{a}{x}}$ &c. $y=a+\frac{aa}{x}+\frac{a^{3}}{xx}+\frac{3a^{4}}{x^{3}}+\frac{10a^{5}}{x^{4}}+\frac{49a^{6}}{x^{5}}$ &c.

113. Ajoû-

113. AJOÛTONS une Remarque, qui ſervira dans la ſuite. On a vû [§. 110] que quand la Série eſt réguliére, c'eſt-à-dire, quand on fait uſage d'une racine ſimple de l'équation que fournit la déterminatrice, la différence [n] des expoſants d'x dans le prémier & le ſecond [Ax^{b}, $Bx^{b \mp n}$] termes de la Série eſt égale à la différence des expoſants [m, $m \mp n$] du prémier & du ſecond ordre des termes de l'équation. Il n'en eſt pas de même d'une racine $y - Ax^{b} = 0$ qui ſeroit multiple. Si le dégré de ſa multiplicité eſt j, c'eſt-à-dire, ſi $y - Ax^{b}$ diviſe j fois la ſomme des termes du premier ordre m, pourvû qu'elle ne diviſe point la ſomme des termes du ſecond ordre $m \mp n$, la différence $b - i$ des expoſants du prémier & ſecond terme de la Série $Ax^{b} + Bx^{i}$, *&c.* ſera égale à $\frac{n}{j}$, qui eſt la différence n des expoſants des ordres m, & $m \mp n$ diviſée par j, de ſorte que, dans le ſecond terme, l'expoſant d'x ſera [$i =$] $b \mp \frac{n}{j}$. CH. VII. §. 113.

Car puiſque $y - Ax^{b} = 0$ eſt une racine dont le dégré de la multiplicité eſt j, quand on aura ſubſtitué $Ax^{b} + u$ à y, il manquera, à la transformée, les termes qui devroient être aux points où la déterminatrice coupe les j prémiéres colomnes [§. 107], c'eſt-à-dire, les termes x^{m}, $x^{m-b}u$, $x^{m-2b}u^{2}$, *&c.* juſqu'au terme $x^{m-jb}u^{j}$, qui ſe trouvera à l'extrémité de cette prémiére déterminatrice. C'eſt donc de ce terme que part la ſeconde, qui portera ſur le prémier terme du ſecond ordre $x^{m \mp n}$,

CH. VII. §. 113.

dont la Caſe ne ſera pas vuide, puiſque $y - Ax^b$ ne diviſe pas la ſomme des termes du ſecond ordre. Ainſi l'équation, que fournit cette ſeconde déterminatrice, eſt de cette forme $x^{m-jb}u^j = B^j x^{m\mp n}$, ou $u^j = B^j x^{m\mp n-m+jb}$, ſoit $u = Bx^{b\pm\frac{n}{j}}$. L'expoſant du ſecond terme eſt donc $b = \mp\frac{n}{j}$.

Cette Remarque ſert à diſcerner, ſans calcul, ſi une Série qui a ſon prémier terme réel, n'eſt point demi-imaginaire; dans le cas où la racine $y - Ax^b = 0$, qui donne le premier terme, diviſant plus d'une fois les termes du premier ordre m, ne diviſe point ceux du ſecond $m \mp n$; ce qui eſt un cas aſſez ordinaire. Alors ſi j, dégré de la multiplicité de cette racine, eſt un nombre pair, & n, différence des expoſants des ordres, un nombre impair; le ſecond terme $[Bx^{b\pm\frac{n}{j}}]$ de la Série eſt à demi imaginaire [§. 95]: il eſt ſûrement réel, ſi j eſt impair; mais n & j étant tous deux pairs, il ſera ou réel ou imaginaire, ſelon que les coëfficients des termes $x^{m-jb}u^j$ & $x^{m\mp n}$ auront ou différents ſignes ou même ſigne [§. 95]. Or c'eſt de ce ſecond terme qu'il dépend que la Série ſoit réelle, ou imaginaire, en entier ou à demi. Car l'équation qui donne ce terme, dans le cas dont nous parlons, n'ayant que deux termes, n'aura point de racines multiples. Ainſi dès-lors la Série eſt réguliére, & tous ſes termes dès le troiſiéme ſont réels [§. 109].

Nous renvoyons à donner des Exemples pour éclaircir & confirmer cette Remarque, lorſque nous aurons occaſion

ſion de l'appliquer. [§§. 138. *Ex. III.* 141. *Ex. II.* &c.] Il eſt tems de faire uſage de tous ces Principes pour la recherche des Branches infinies des Courbes. Nous paſſerons enſuite à l'examen des Points ſinguliers.

CHAPITRE VIII.

Des Branches infinies des Courbes.

114. UNE Branche infinie de Courbe s'éloigne infiniment ou de l'Axe des ordonnées, ou de l'Axe des abſciſſes, ou de l'un & de l'autre. Les Branches A, a s'éloignent infiniment de l'Axe des ordonnées, mais non pas de celui des abſciſſes : auſſi leurs abſciſſes infinies ont-elles des ordonnées finies ou même infiniment petites. Les Branches infinies B, b s'éloignent infiniment de l'Axe des abſciſſes, & non de celui des ordonnées, parce que les ordonnées infinies ont des abſciſſes finies ou infiniment petites. Et les Branches infinies C, c s'éloignent infiniment des deux Axes : les abſciſſes infinies ayant des ordonnées infinies, & réciproquement. Pl. IX. Fig. 68.

On trouvera donc les Branches infinies d'une Courbe, en cherchant quelles ordonnées répondent aux abſciſſes infinies, & quelles abſciſſes répondent aux ordonnées infinies : Ou en examinant ce que devient l'équation de la Courbe par la ſuppoſition d'x ou d'y infinies [§. 92] : Ou encore, en cherchant le prémier terme des Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'y en x, ou d'x en y [§. 102]. Car tout cela n'eſt qu'une même choſe.

115. Mais le prémier terme de la Série ne ſuffit pas toûjours pour s'aſſurer de la nature, & de la poſition, ou

PL. IX. ou même de l'exiſtence, des Branches infinies : il faut ſouvent aller plus loin, & calculer un certain nombre de termes de ces Séries. CH. VIII. §. 115.

Pour être plus bref & plus clair, je ſuppoſerai qu'il ne s'agit que d'une Série deſcendante qui donne la valeur d'y en x. Rien de plus aiſé que d'appliquer ce que j'en vais dire à une Série qui donneroit la valeur d'x en y.

Dans la Série deſcendante $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l +$ &c. les expoſants b, i, k, l, &c. vont en diminuant, de ſorte qu'à ſuppoſer x infinie, chaque terme eſt infiniment plus petit que celui qui le précéde : & à ſuppoſer ſeulement x extrêmement grande, chaque terme eſt beaucoup plus petit que celui qui le précéde, & beaucoup plus grand que celui qui le ſuit [§. 99].

Chacun de ces termes exprime l'ordonnée d'une Ligne, Droite ou Courbe, dont les équations, [en nommant x l'abſciſſe commune, & y, u, t, s, &c. les ordonnées] ſeront $y = Ax^b$, $u = Bx^i$, $t = Cx^k$, $s = Dx^l$, &c. l'ordonnée Y de la Courbe propoſée étant égale à $y + u + t + s$ &c.

Si cette Série $y + u + t + s$, &c. eſt imaginaire, l'abſciſſe infinie a, dans la Courbe propoſée, une ordonnée imaginaire, & la Branche infinie que devroit déſigner cette Série eſt imaginaire. Et ſi toutes les Séries deſcendantes que peut fournir l'équation d'une Courbe ſont dans le même cas, cette Courbe n'a point de Branches infinies. Or un ſeul terme imaginaire rend la Série entiére imaginaire.

Si la Série $y + u + t + s$ &c. eſt à demi-imaginaire [& pour cela il ſuffit d'un ſeul terme qui le ſoit], des deux abſciſſes infinies, la poſitive & la négative, l'une a une ordonnée réelle, l'autre une imaginaire. Et ſi l'équation

ne

CH. VIII. §. 115. ne fournit point d'autres Séries, la Courbe n'a des Branches infinies que d'un côté de l'Axe des ordonnées. PL. IX.

Mais ſi la Série $y + u + t + s$, *&c.* n'a rien d'imaginaire, les deux abſciſſes infinies, la poſitive & la négative, ont des ordonnées réelles : la Courbe jette des Branches de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Une Série réelle indique ainſi deux Branches infinies, une du côté poſitif & une du côté négatif.

Pour ſavoir donc préciſément le nombre des Branches infinies d'une Courbe, il faut compter au juſte le nombre des Séries, réelles & demi-imaginaires, qu'elle peut fournir ; & dans ce compte une Série qui ſe fourche en deux, trois, quatre, ou &c. fait deux, trois, quatre, ou &c. Séries.

Ainſi il eſt néceſſaire de calculer, au moins, tous les termes irréguliers de chaque Série, pour être ſûr que la Série ne ſe fourche plus, & n'a plus de termes imaginaires, ou en entier, ou à demi. Mais dès qu'on eſt venu aux termes réguliers, la pluralité des racines & les racines imaginaires ne ſont plus à craindre. Il n'eſt preſque pas beſoin de connoître ces termes réguliers : du moins il ſuffit d'en calculer quelques-uns des prémiers ſuivant le but qu'on ſe propoſe dans ſon Calcul.

116. La Série $y + u + t + s$ *&c.* étant réelle ; ſi elle eſt poſitive, l'ordonnée de l'abſciſſe infinie eſt poſitive : elle eſt au contraire négative, ſi la Série eſt négative. Et comme le prémier terme de cette Série eſt, lui ſeul, infiniment plus grand que tous les autres, x étant infinie, c'eſt le ſigne de ce prémier terme qui décide de quel côté de l'Axe tombe, à l'infini, la Branche que déſigne cette Série.

Si le prémier terme y, ou Ax^b, conſerve ſon même

Digitized by Google

Pl. IX. ſigne, ſoit que l'abſciſſe x ait le ſigne $+$ ou le ſigne $-$, les deux Branches de la Courbe, qui s'étendent l'une du côté des abſciſſes poſitives, l'autre du côté des négatives, ces deux Branches, dis-je, tombent d'une même part de l'Axe des abſciſſes ; elle ſe jettent dans les angles de ſuite des ordonnées de même ſigne. Ch. VIII. § 116.

Mais ſi le changement de $+x$ en $-x$ change le ſigne du terme Ax^b de $+$ en $-$ ou de $-$ en $+$, l'ordonnée de l'abſciſſe infinie poſitive a un ſigne contraire à celui de l'ordonnée de l'abſciſſe infinie négative : les deux Branches infinies ſe jettent dans les angles oppoſés des coordonnées.

La Série $y+u+t+s$ &c. étant demi-imaginaire, on jugera par le terme, ou par les termes, demi-imaginaires, de quel côté de l'Axe des ordonnées tombe la Branche qu'elle déſigne, & par le ſigne $+$ ou $-$ du prémier termes Ax^b de quel côté de l'Axe des abſciſſes elle tombe. On ſaura donc dans quel angle des coordonnées ſe jette finalement cette Branche.

Mais ſi la Série a pluſieurs termes demi-imaginaires, qui ſoient tels qu'ils donnent l'excluſion aux Branches infinies, les uns du côté des abſciſſes poſitives, & les autres du côté des abſciſſes négatives : la Courbe n'a alors aucune Branche infinie, non plus que ſi ſa Série étoit entiérement imaginaire.

117. Il paroît de-là que pour ſe faire une juſte idée d'une Branche infinie de Courbe repréſentée par la Série $Ax^b+Bx^i+Cx^k+Dx^l+$ &c. il faut connoître les Lignes que repréſentent les équations $y=Ax^b$, $u=Bx^i$, &c. Ce ſont des *Hyperboles*, quand les expoſants b, i, &c. ſont

CH. VIII. §. 117. ſont négatifs. Ce ſont des *Paraboles*, quand ces expoſants ſont poſitifs. Arrêtons-nous un moment à conſidérer ces deux ſortes de Courbes. Pl. IX.

118. On nomme *Hyperbole* la Ligne courbe du ſecond Ordre, dont la nature eſt exprimée par l'équation $y = \frac{a}{x}$, ou $xy = a$. Il eſt aiſé d'en déterminer tant de points qu'on voudra. Soit A l'origine, AB l'Axe des abſciſſes, AD celui des ordonnées. On voit d'abord que l'abſciſſe $AB = 1$ aura une ordonnée $BC = a$, parce que l'éq : $y = \frac{a}{x}$ donne $y = a$ quand $x = 1$. De même l'abſciſſe $Ab = a$ aura l'ordonnée $bc = 1$, parce que l'éq : $y = \frac{a}{x}$ donne $y = 1$ quand $x = a$. On a donc d'abord deux points C & c de l'Hyperbole. Pour en avoir autant d'autres qu'on voudra, on prendra une abſciſſe quelconque AP, & on lui donnera l'ordonnée PM quatriéme proportionelle à AP, AB, & BC; ce qui s'exécute aiſément en prenant ſur le prolongement de l'abſciſſe AP une partie PQ égale à AB [1], & menant par les points Q & C la Droite QC qui coupera l'ordonnée PM au point M. Car les triangles ſemblables QPM, QBC donnent QB ou AP [x] : BC [a] = QP [1] : PM [y]. Donc $y = \frac{a}{x}$. Où l'on peut remarquer, que chaque abſciſſe n'a qu'une ſeule ordonnée, parce que dans l'éq : $xy = a$, la variable y ne monte qu'au prémier dégré [§. 41]. Fig. 69.

Cette conſtruction s'abrége, en conſidérant que puiſque PQ = AB, auſſi QM = Cq. Ayant donc le point C de l'Hyperbole, on en trouvera tant d'autres qu'on voudra en menant par C tant de Droites qu'on voudra Fig. 70.

Pl. IX. QCq, RCr, SCs, &c. terminées aux deux Axes AB, AD des coordonnées. Et ſur chacune de ces Droites on prendra QM = Cq, Rm = Cr, Sμ = Cs, &c. ou qM = CQ, rm = CR, sμ = CS &c. & on aura les points M, m, μ, &c. de l'Hyperbole. On trouvera par ce moyen un grand nombre de ces points, par leſquels on tracera aſſez exactement une Hyperbole. Ch. VIII. § 118.

Fig. 71. 119. Plus l'abſciſſe AP augmente, plus l'ordonnée PM diminuë. Si AP eſt égal à 2 = 2AB, PM eſt $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2}$BC. Si AP vaut 3 = 3 AB, PM eſt $\frac{1}{3}a = \frac{1}{3}$BC, & ainſi de ſuite. Donc la Courbe aproche toûjours plus de l'Axe des abſciſſes, mais l'ordonnée ne devient jamais nulle ou zéro. Quand AP ſeroit un million de fois plus grande que AB, PM ſeroit un million de fois plus petite que BC, très petite par conſéquent, mais non pas nulle. La Courbe CMF s'aproche donc toûjours plus de la Droite ABP & ne l'atteint jamais : c'eſt ce que ſignifie le nom d'*Aſymptote*, qu'on donne à cette Droite.

Plus l'abſciſſe Ap diminuë, plus l'ordonnée pm augmente. Si Ap eſt égale à $\frac{1}{2}$AB, pm eſt $\frac{a}{1:2} = 2a =$ 2BC. Si Ap vaut $\frac{1}{3}$AB, pm eſt $3a = 3$BC, &c. Et lorſque Ap devient nulle, quand le point p tombe ſur l'origine A, l'ordonnée devient $\frac{a}{0}$, c'eſt-à-dire, infinie. Donc la Courbe CmE ne rencontre l'Axe des ordonnées AD qu'à l'infini. AD eſt donc une autre *Aſymptote* de l'Hyperbole. En effet, ſi l'on conſidére que l'éq : $xy = a$ donne $x = \frac{a}{y}$, auſſi bien que $y = \frac{a}{x}$, on comprendra d'abord que ce qui a été dit des y ſe peut dire également des x. L'Hyperbole a donc *deux Aſymptotes*, qui ſont ſes deux Axes.

120. Si

CH. VIII. §. 120.

120. Si l'on prend des abſciſſes négatives A p, leurs ordonnées p m ſont auſſi négatives. Car $\frac{a}{-x}$ eſt une grandeur négative. Du reſte, il en eſt des abſciſſes & des ordonnées négatives, comme des poſitives. L'éq : $xy = a$ fait voir que l'origine A eſt un Centre [§. 76]. La Courbe complette a donc deux parties égales & ſemblables E M F, e m f, dans les angles oppoſés D A B, bAd des Aſymptotes, deſquels angles ces Branches ne ſortent pas, & par conſéquent ne ſe rencontrent point l'une l'autre. Les Anciens, regardant comme deux Courbes ces portions détachées, les nommoient les *Hyperboles oppoſées*. Les Modernes les comprennent toutes deux ſous le nom d'Hyperbole, parce que ces deux parties ne ſont qu'une ſeule Courbe, exprimée par une ſeule équation irréductible $y = \frac{a}{x}$, ou $xy = a$ [§. 21]. Pl. IX. Fig. 72.

121. Il n'en eſt pas de même des *Hyperboles conjuguées*. C'eſt le nom qu'on donne aux Hyperboles E M Φ, ϵ μ φ décrites dans les angles D A b, B A d des coordonnées de ſignes contraires, telles que réunies avec les précédentes *EMF*, e m f, chaque abſciſſe A P, A p, poſitive ou négative, a deux ordonnées égales P*M*, PM, ou p*μ*, pm, l'une poſitive l'autre négative; & réciproquement que chaque ordonnée A Q, A q, ſoit poſitive ſoit négative, ait deux abſciſſes Q*M*, Q*μ*, ou qM, qm, l'une poſitive, l'autre négative. Enſorte que les deux Droites b B, D d, ſont en même tems des Diamétres & des Contre-Diamétres [§§. 70 & 73]. Comme l'équation des deux Hyperboles *EMF*, e m f eſt $y = \frac{a}{x}$, ou $xy - a = 0$, celle des deux autres EMΦ, ϵμφ eſt $y = \frac{a}{-x}$, ou $xy + a = 0$, Fig. 73.

PL. IX. $a = o$. L'équation qui repréſente les quatre parties des Hyperboles conjuguées ſera donc $x^2y^2 - a^2 = o$, produit de ces deux éq : $xy - a = o$, $xy + a = o$, [§. 20]. Cette équation donne $y^2 = \frac{a^2}{x^2}$, qui a deux racines, 1°. $y = + \frac{a}{x}$, qui repréſente les Hyperboles *EMF*, emf, 2°. $y = - \frac{a}{x}$, qui exprime les Hyperboles EMΦ, ιμφ. Mais cette éq : $xxyy - a^2 = o$ étant réductible en deux autres, les quatre parties des Hyperboles conjuguées ne peuvent pas être regardées comme une ſeule Courbe, mais comme le ſyſtême de deux Hyperboles. CH. VIII. §. 121.

122. A l'imitation de l'Hyperbole ſimple dont l'équation eſt $y = \frac{a}{x}$, & des Hyperboles conjuguées que repréſente l'éq : $y^2 = \frac{a^2}{x^2}$, & pour étendre la théorie de ces Courbes à toute la généralité poſſible, on a donné le même nom d'*Hyperbole* à toutes les Courbes que peut exprimer l'équation générale $y^l = \frac{a}{x^k}$, ou $y^l = a x^{-k}$, ſoit $y = a^{1:l} x^{-k:l} = A x^{-k:l}$ en prenant $A = a^{1:l}$. Equation qui peut être de tous les Ordres, ſelon les valeurs qu'on donnera aux expoſants indéterminés k & l, que je ſuppoſe des nombres entiers poſitifs. Si $k = 1 = l$, cette équation générale ſe réduit à $y = a x^{-1}$, ou $xy = a$, qui eſt du ſecond Ordre & repréſente l'*Hyperbole ſimple*, ou *ordinaire*. Si $k = 1$ & $l = 2$, l'éq : générale devient $y = A x^{-1:2}$, ou $y^2 = a x^{-1}$, ſoit $x y^2 = a$, qui eſt du troiſième Ordre & repréſente l'*Hyperbole cubique*. Si $k = 2$

CH. VIII. §. 122. $k = 2 = l$, l'équation eſt $y^2 = ax^{-2}$, ou $x^2y^2 = a$ du quatriéme Ordre ; mais on a vû [§. *préc.*] qu'elle peut ſe réduire à deux équations du ſecond Ordre. Cette gradation des Hyperboles peut aller à l'infini, & toutes la ſuite de ces Courbes repréſentées par l'équation générale $y^l = ax^{-k}$ ou $y = Ax^{-k:l}$ s'apelle la *Famille des Hyperboles*, l'uſage des Géométres étant d'apeller de même *famille* * les Courbes dont les équations ne différent que par les expoſants de x & de y. PL. IX.

Toutes ces Hyperboles ont leurs Axes pour *Aſymptotes*. Car dans l'éq : $y = Ax^{-k:l} = \frac{A}{x^{k:l}}$, x infinie rend y infiniment petite, & x infiniment petite rend y infinie [§. 78. 79]. D'où l'on conclud, comme pour l'Hyperbole ſimple [§. 119], que la Courbe s'aproche d'un côté infiniment de l'Axe des abſciſſes en s'éloignant infiniment de celui des ordonnées ; & que de l'autre côté elle s'aproche infiniment de l'Axe des ordonnées en s'éloignant infiniment de l'Axe des abſciſſes.

123. La *Parabole* eſt une autre Courbe du ſecond Ordre, dont l'équation la plus ſimple eſt $y = \frac{xx}{a}$, ou $y = xx$, en prenant a pour l'unité. Les ordonnées [y] ſont donc proportionelles aux quarrés [xx] des abſciſſes. D'où il ſuit que la Courbe AE va en s'éloignant à l'infini de l'Axe AD des ordonnées & de l'Axe AB des abſciſſes, mais infiniment plus de celui-ci que de celui-là ; parce que l'abſciſſe AB ou DE [x] étant ſuppoſée infinie, l'ordonnée BE [y ou xx] eſt infiniment infinie. Et puiſque l'abſciſſe [x], poſitive ou négative, a ſon quarré [xx] Fig. 7.

* Wolfii *Analyſ.* §. 383.

Digitized by Google

PL. IX. [xx] positif, l'ordonnée [y ou xx] sera toûjours positive. La Parabole jette donc, dans les deux angles des ordonnées positives, deux Branches infinies AM, Aμ, avec lesquelles elle embrasse, pour ainsi dire, l'Axe des ordonnées AD, à la direction de laquelle la Courbe aproche toûjours plus de devenir paralléle, sans y parvenir néantmoins qu'à l'infini. Car on peut concevoir la Parabole comme décrite par le concours de deux mouvemens, l'un de la Droite AD, qui toûjours paralléle à elle-même glisse le long de AB, l'autre d'un Point A qui s'avance sur cette Droite mobile AD de A vers D. Le mouvement de la Droite AD sera supposé uniforme, les espaces parcourus Am, An, Ap, Aq, Ar, &c. étant proportionels au tems que la Droite employe à passer de AD en mD, nD, pD, qD, rD, &c. Le mouvement du Point A sur la Droite AD sera supposé accéleré. D'abord infiniment petit, il augmente continuellement selon la raison des quarrés, ensorte que les espaces mM, nN, pP, qQ, rR, &c. décrits dans les tems proportionels à Am, An, Ap, Aq, Ar, &c. sont comme les quarrés de ces tems. Dans cette supposition, il est clair que la direction de la Courbe, c'est-à-dire, la direction du Point qui la décrit, participe de ses deux mouvemens; l'un par lequel il s'éloigne de AB en coulant sur la Droite AD, l'autre par lequel il s'éloigne avec la Droite AD de la prémiére position de cette Droite mobile. Et l'on voit que, de ces deux mouvemens, le second, qui est uniforme & fini, surpasse d'abord infiniment la viteſſe naissante du Point A sur la Droite AD; ce qui fait que la direction de la Parabole à son origine est comme paralléle à AB, ou plûtôt sur AB. Mais cette viteſſe du Point A sur AD allant toûjours en croissant, & s'accélérant suivant la progression des quarrés 0, 1, 4, 9, 16, &c. égale bientôt, & puis surpasse la viteſſe de la Droite mobile AD; ce qui rend la direction de CH. VIII. §. 123.

CH. VIII. §. 123. de la Parabole moyenne entre celles des Droites AB, AD : mais elle gagne toûjours de plus en plus vers la Direction AD, au paralléliſme de laquelle elle tend, & parvient à l'infini, parce qu'à l'infini le mouvement du Point A ſelon AD eſt infiniment plus vite que le mouvement de la Droite AD ſelon AB. Au reſte, ce que nous venons de dire de la Branche AM doit s'entendre également de la Branche $A\mu$, qui lui eſt pareille, & même égale & ſemblable ſi AD eſt perpendiculaire à AB. PL. IX.

124. Il y a pluſieurs maniéres de décrire la Parabole, & de trouver géométriquement autant de ſes points qu'on voudra. En voici une aſſez ſimple, & qui a l'avantage de réuſſir auſſi bien quand les coordonnées ſont entr'elles un angle oblique, que quand elles ſont perpendiculaires l'une à l'autre.

Sur l'Axe des abſciſſes AC, prenez dès l'Origine A une partie AC égale au *Paramétre* [c'eſt le nom qu'on donne à la Droite conſtante a qui régle la grandeur de la Parabole & que nous avons priſe pour l'unité], & menés CF paralléle à l'Axe des ordonnées AD. Cette préparation faite, ſi vous voulez avoir l'ordonnée d'une abſciſſe quelconque Am [ou An, Ap, &c.] portez ſur CF la longueur de cette abſciſſe Am de C en μ. La Droite $A\mu$ retranche de mZ, menée par m paralléle à AD, l'ordonnée mM, dont le ſommet M eſt un point de la Parabole. Car les triangles ſemblables AmM, ACμ donnent cette proportion Am [x] : mM [y] = AC [a] : Cμ ou Am [x]. Donc $ay = xx$ ou $y = \frac{xx}{a}$, qui eſt l'équation de la Parabole. Ayant déterminé par cette Conſtruction un grand nombre de points M, N, E, P, Q, &c. on tracera aiſément la demi-Parabole AEQ, & l'autre moitié A*M* ſe décrira de même. Fig. 75.

Pl. IX. 125. On voit par cette deſcription que la Parabole n'a point d'Aſymptote, point de Droite, dont elle s'aproche toûjours ſans l'atteindre jamais. Si on veut lui en ſuppoſer, il faudroit en imaginer deux paralléles à l'Axe AD, mais à une diſtance infinie de part & d'autre. Car il eſt vrai que les Branches AM, A*M* de la Parabole s'aprochent toûjours plus de ces Droites conçûës infiniment éloignées, que leurs directions tendent toûjours plus à devenir paralléles à celles de ces Droites, & qu'elles coïncident avec elles à l'infini, ce qui eſt le caractére des Aſymptotes [§. 119]. Mais la diſtance infinie à laquelle on eſt obligé d'imaginer ces Aſymptotes, ne permet pas de les tracer, ou de les aſſigner, ce qui fait dire que la Parabole n'a point d'Aſymptotes. Ch. VIII. §. 125.

126. La Parabole ordinaire, ou ſimple, que nous venons de definir, eſt, comme l'Hyperbole ſimple, mére d'une nombreuſe *Famille*. C'eſt celle de toutes les Courbes que repréſente l'équation générale $y = \frac{x^b}{a^{b-1}}$ ou $y = x^b$, en prenant toûjours a, qui eſt le Paramétre, pour l'unité. L'expoſant b peut être un nombre entier, ou rompu [$= \frac{k}{l}$], mais poſitif; car s'il étoit négatif, l'éq: $y = x^{-k:l}$ feroit celle de quelque Hyperbole [§. 122].

Si l'on ſe repréſente toute cette Famille des Paraboles, décrites ſur les mêmes Axes AB, AD avec un même Paramétre AC = 1, on verra qu'elles ont toutes un même point commun E. Car à l'abſciſſe [x] AC = 1, répond dans chaque Parabole une même ordonnée [y] CE = 1 puiſque l'éq: $y = x^b$ donne $y = 1$ quand $x = 1$. De plus, Fig. 76.

Digitized by Google

CH. VIII. §. 126. plus, ſi l'on compare deux Paraboles quelconques, on verra que celle qui a le plus grand expoſant b a auſſi la plus grande ordonnée, lorſque l'abſciſſe AP ſurpaſſe l'unité ou le Paramétre AC, mais qu'elle a la plus petite ordonnée, quand l'abſciſſe Ap eſt moindre que le Paramétre, ou l'unité AC. Car ſoit $y = x^b$ l'équation de la Parabole AmEM, & $y = x^H$ celle de la Parabole AμEM [H eſt ſuppoſé plus grand que b]. Donc, ſi l'on prend une abſciſſe commune [x] AP ou Ap, les ordonnées PM, PM, ou pm, pμ ſont entr'elles comme x^b, x^H. Mais, ſi x ſurpaſſe l'unité, la puiſſance ſupérieure x^H ſurpaſſe l'inférieure x^b. Donc, quand [x] AP $>$ AC [1], PM [x^H] $>$ PM [x^b]. Et ſi [Ap] x eſt moindre que l'unité [AC], x eſt une fraction, dont la puiſſance plus élevée x^H [pμ] eſt moindre que la puiſſance moins élevée x^b [pm]. PL. IX.

127. Entre ces Paraboles ſe trouve la Ligne droite AEF, qui coupe en deux également l'angle DAB des coordonnées. Elle eſt repréſentée par l'éq: $y = x$, qui réſulte de la ſuppoſition $b = 1$, ou $k = l$. Cette Droite eſt moyenne entre les Paraboles AmEM, AμEM qui ont l'expoſant $b > 1$, ou $k > l$, & les Paraboles AnEN, AνEN, dans l'équation deſquelles $b < 1$, ou $k < l$. Les prémiéres tournent leur concavité, & les derniéres leur convexité vers AD. Mais, ſi l'on y prend garde, on verra bientôt que celles-là ſont les mêmes que celles-ci, ſi ce n'eſt que les unes ont AB pour l'Axe des abſciſſes & AD pour l'Axe des ordonnées, au lieu que les autres ont AB pour l'Axe des ordonnées, & AD pour l'Axe

Pl. IX. des abſciſſes. Car l'éq : $y = x^{k:l}$, où $k > l$, eſt la même Ch. VIII. §. 127. que l'éq : $x = y^{l:k}$ où $l < k$. Prenant donc x pour y & y pour x, c'eſt-à-dire, changeant l'Axe des abſciſſes en celui des ordonnées & réciproquement, la même équation répréſente la Parabole AmE*M* & la Parabole AnE*N* qui ſont, l'une d'un côté, l'autre de l'autre de la Droite AEF.

128. Par ces Remarques on peut ſe former une idée d'une Branche de Parabole, de quelque Ordre quelle ſoit. Quoiqu'elles différent beaucoup des Hyperboles, ces deux Familles de Courbes ſont pourtant repréſentées par l'équation commune $y^l = \alpha x^k$, ou $y = \alpha^{1:l} x^{k:l}$ ſoit $y = Ax^b$ [en prenant $A = \alpha^{1:l}$, & $b = k:l$]. Cette équation déſigne des Paraboles, quand $\frac{b}{1}$ ou $\frac{k}{l}$ eſt poſitif. Elle exprime des Hyperboles, quand cet expoſant eſt négatif. Mais pour connoître le nombre & la poſition des Branches de ces Courbes, pour ſavoir dans quels angles des coordonnées elles ſe jettent, il faut faire attention & au Paramétre α, qui peut être poſitif ou négatif, & aux expoſants k, l, qui peuvent être pairs ou impairs. [§. 95].

I. Si k & l ſont tous deux impairs, x^k puiſſance impaire de x a le même ſigne que x. Donc αx^k [$= y^l$] aura le même ſigne que x, ſi α eſt poſitif ; elle aura un ſigne contraire, ſi α eſt négatif. Et y, racine impaire de y^l, ayant le même ſigne que y^l [$= \alpha x^k$], aura le
Pl. X. même ſigne que x, ſi α eſt poſitif, elle aura un ſigne
Fig. 77. contraire, ſi α eſt négatif. Dans le premier Cas, la Courbe étend ſes Branches dans les angles DAB, bAd des coordonnées de même ſigne ; & dans le ſecond Cas, elle les

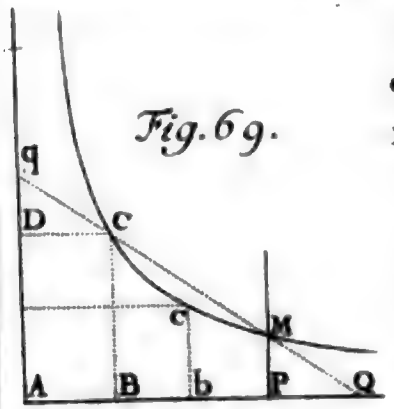


Fig. 69.

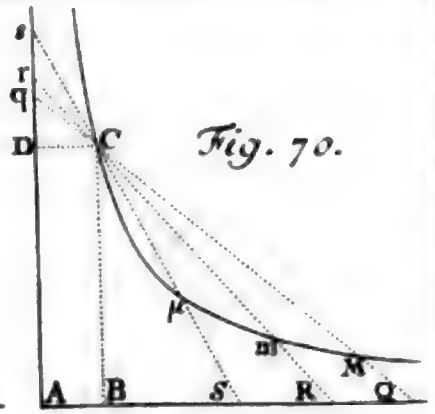


Fig. 70.

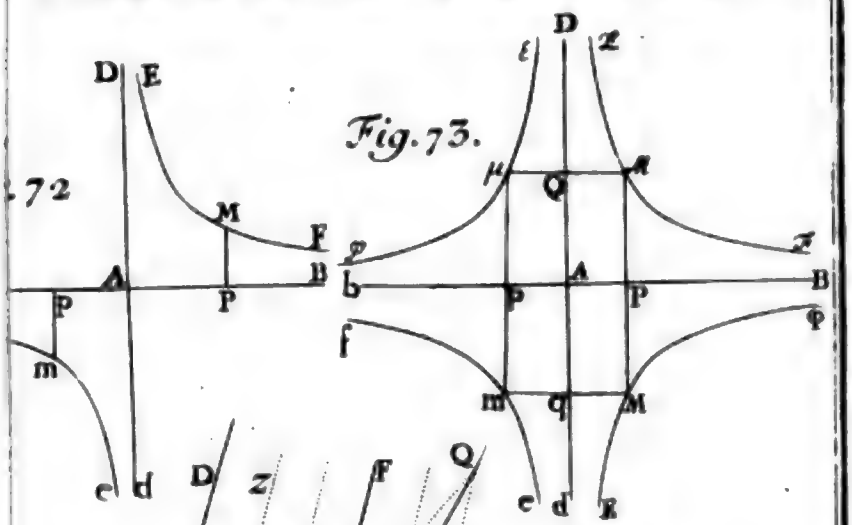


Fig. 73.

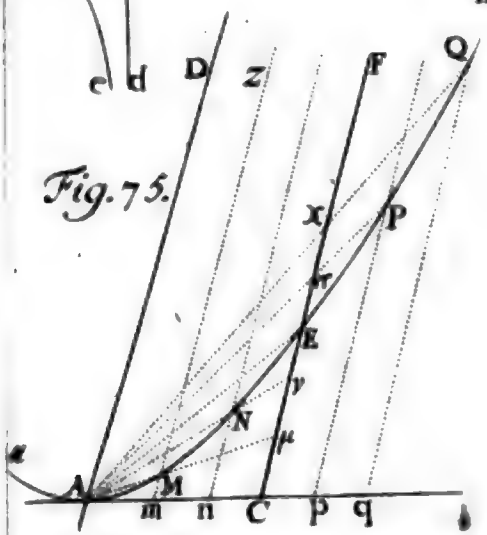


Fig. 75.

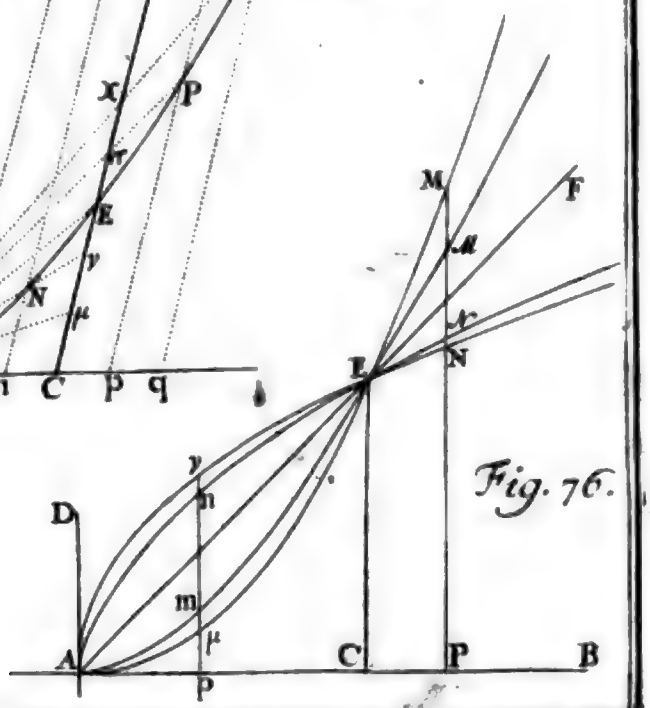


Fig. 76.

Digitized by Google

CH. VIII. §. 128. les a dans les angles DAb, BAd des coordonnées de différens ſignes. Dans l'un & l'autre Cas, les deux Branches ſont de part & d'autre des deux Axes. PL. X.

II. Si k eſt pair & l impair, x^k, puiſſance paire de x, eſt poſitive, quelque ſigne qu'on donne à x. Ainſi $\alpha x^k [= y^l]$ eſt poſitive ou négative, ſelon que α eſt poſitif ou négatif: & y, racine impaire de y^l, eſt de même ſigne que $y^l [= \alpha x^k]$, c'eſt-à-dire, poſitive ou négative, ſelon que α eſt poſitif ou négatif. Dans le prémier Cas, la Courbe étend ſes Branches dans les angles DAB, DAb des ordonnées poſitives. Dans le ſecond Cas, elle les jette dans les angles dAB, dAb des ordonnées négatives. Dans l'un & l'autre, les deux Branches ſont de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais d'une même part de l'Axe des abſciſſes. Fig. 78.

III. Si k eſt impair & l pair, x^k, puiſſance impaire de x, aura le même ſigne que x. Ainſi $\alpha x^k [= y^l]$ ſera poſitive, ſi α & x ont le même ſigne; elle ſera négative, ſi les ſignes de α & de x ſont contraires. Et y, racine impaire de $y^l [= \alpha x^k]$, ſera imaginaire, ſi y^l eſt négative; mais elle ſera réelle, & aura les deux ſignes + & —, ſi y^l eſt poſitive. Donc y eſt imaginaire, lorſque α & x ont différent ſigne; & lorſque α & x ont le même ſigne, y a deux valeurs égales, mais l'une poſitive & l'autre négative. Ainſi, α étant poſitif, la Courbe étend deux Branches dans les angles de ſuite BAD, BAd des abſciſſes poſitives: mais α étant négatif, la Courbe étend ſes Branches dans les angles DAb, bAd des abſciſſes négatives. Elle eſt donc toute d'un même côté de l'Axe des ordonnées; mais elle ſe jette de part & d'autre de l'Axe des abſciſſes. Fig. 79.

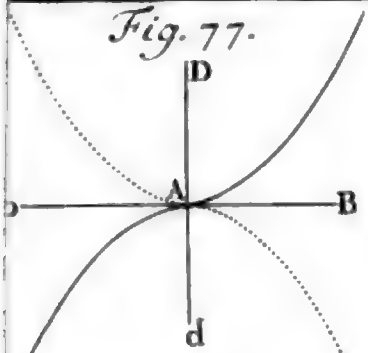
Pl. X. IV. Enfin, ſi k & l ſont tous deux pairs, la Courbe eſt imaginaire, quand α eſt négatif : mais elle a quatre Branches réelles, une dans chacun des quatre angles des coordonnées, quand α eſt poſitif. Car x^k, puiſſance paire de x, étant toûjours poſitive, $\alpha x^k [= y^l]$ eſt négative, & y, racine paire de y^l, toûjours imaginaire, lorſque α eſt négatif. Mais lorſque α eſt poſitif, $\alpha x^k [= y^l]$ eſt toûjours poſitive, & y, racine paire de y^l, a toûjours deux valeurs égales, une poſitive, une négative. Donc, α étant poſitif, chaque abſciſſe, ſoit poſitive ſoit négative, a deux ordonnées, une poſitive & une négative ; ce qui fait quatre Branches, une dans chacun des quatre angles Fig. 80. des coordonnées. Ch. VIII. §. 128.

129. Toute Branche infinie, en s'éloignant de l'Origine, prend inſenſiblement la nature d'une Branche d'Hyperbole ou d'une Branche de Parabole. Elle en différe peu à une grande diſtance ; & elle ſe confond exactement avec elle à l'infini. De-là, toutes les Branches infinies des Courbes ſe diviſent en deux Genres, les *Branches Hyperboliques*, & les *Branches Paraboliques*. Les Hyperboles, & par conſéquent les Branches hyperboliques ont une Aſymptote [§. 119], & les Paraboles & les Branches paraboliques n'en ont point [§. 125] : c'eſt-là leur caractére diſtinctif *.

130. Quand on a la Série $Ax^b + Bx^i + Cx^k + Dx^l$ &c. qui exprime l'ordonnée d'une Branche infinie, il eſt aiſé de connoître ſi cette Branche eſt hyperbolique ou parabolique.

* Newton, *Enumer. lin. tert. ordinis.* II. 5.

Fig. 77.



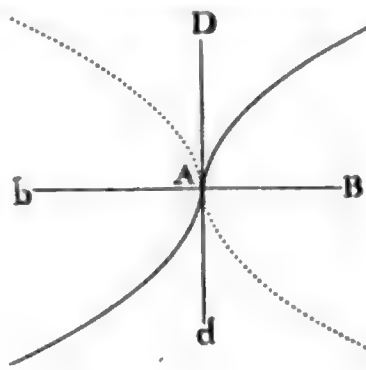
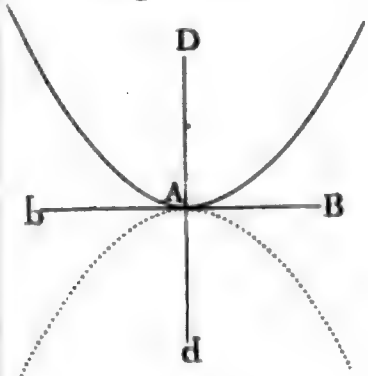


Fig. 78.



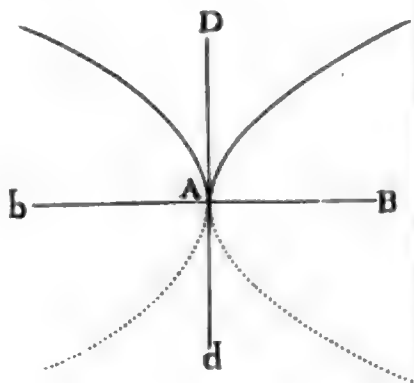
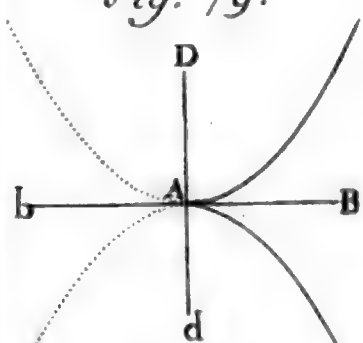


Fig. 79.



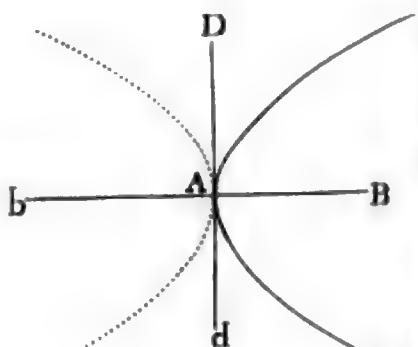
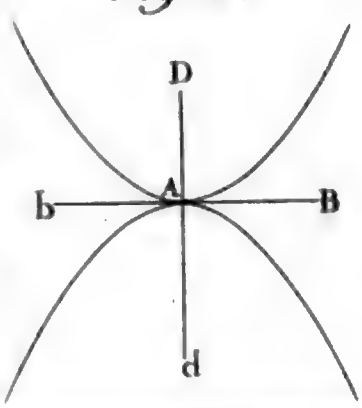
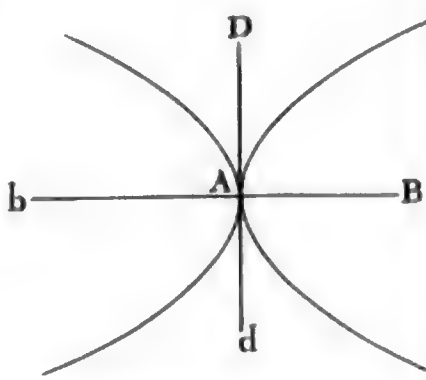


Fig. 80.





CH. VIII. §. 130. lique. Qu'on prenne tous les termes de cette Série, où l'expoſant de x eſt poſitif ou zéro, & que leur ſomme ſoit nommée v. Si la Ligne dont x & v ſont les coordonnées eſt une Droite, la Branche de Courbe eſt hyperbolique & cette Droite eſt l'Aſymptote. Au contraire, la Branche de Courbe eſt parabolique, ſi la Ligne dont x eſt l'abſciſſe & v l'ordonnée n'eſt pas une Droite. PL. X.

131. Je dis 1°. que ſi la Ligne dont x & v ſont les coordonnées eſt une Droite, la Branche infinie que répréſente la Série $v+\&c.$ eſt une Branche hyperbolique, qui a pour Aſymptote cette Droite. Car tous les termes ſuivants, où x a un expoſant négatif, ſont une ſomme d'autant plus petite que x eſt plus grande [§. 99], & ſe réduiſent à rien quand x eſt infinie. Donc l'ordonnée Y de la Courbe aproche toûjours plus de l'égalité avec l'ordonnée v de la Droite, & lui devient égale quand x devient infinie : c'eſt-à-dire, que la Courbe aproche toûjours plus de la Droite & ſe confond avec elle à l'infini. Cette Droite eſt donc Aſymptote [§. 119], & la Branche de Courbe une Branche hyperbolique [§. 129].

Afin que les termes v ſoient l'ordonnée d'une Ligne droite, il faut que x, dans ces termes, ne paſſe pas le premier dégré [§. 40]. Ces termes ſeront donc ou zéro, ou une conſtante B, ou Ax, ou $Ax+B$. S'ils ſont zéro, c'eſt-à-dire, ſi x, dans le premier terme de la Série, a un expoſant négatif; l'équation de l'Aſymptote eſt eſt $v=0$, ce qui déſigne l'Axe des abſciſſes [§. 40. III. 1]. Si les termes v ſe réduiſent à B, l'équation de l'Aſymptote $v=B$ indique une Droite qui eſt l'abſciſſe de l'ordonnée B [§. 40. II. 3]. Si les termes v ne ſont que le terme Ax, l'éq : $v=Ax$ donne pour l'Aſymptote une Droite qui paſſe par l'Origine & qui eſt tellement inclinée aux deux Axes, que le Sinus de l'angle qu'elle fait avec les

PL. X. les abſciſſes, eſt au Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ordonnées, comme A eſt à l'unité [§. 40. II. 1]. Enfin, ſi les termes v ſont $Ax+B$, l'Aſymptote repréſentée par l'éq : $v=Ax+B$, eſt une Droite qui paſſe par l'extrémité de l'ordonnée B & de l'abſciſſe $-\frac{B}{A}$, faiſant avec les abſciſſes & avec les ordonnées des angles dont les Sinus ſont entr'eux comme A à 1. [§. 40. I]. CH. VIII. §. 131.

132. Cette même Branche hyperbolique, qui a une Aſymptote droite, a auſſi une *Aſymptote courbe*, ou plûtôt elle en a une infinité. Car plus on prendra de termes de la Série, plus on aprochera de la valeur d'Y. Donc ſi on décrit une Courbe, qui ait x pour abſciſſe, & pour ordonnée v avec un ou pluſieurs des termes ſuivants de la Série, cette Courbe ſera une Aſymptote de la Courbe propoſée, qui s'en aprochera d'autant plus à l'infini, qu'on prendra un plus grand nombre de termes après v. Mais auſſi l'équation de cette Courbe Aſymptote devient d'autant plus compoſée. Ainſi, comme le prémier terme de ceux qui ſuivent v vaut lui ſeul infiniment plus que tous les autres [§. 78], la Courbe, qui a pour ordonnée les termes v avec le prémier terme qui ſuit, c'eſt-à-dire avec le prémier terme de la Série où x a un expoſant négatif, eſt proprement celle qu'on nomme l'Aſymptote courbe de la Branche infinie repréſentée par cette Série : & cette Courbe eſt une Hyperbole.

Fig. 81. Soit A l'origine ; A B, A C les deux Axes ; A P [x] une abſciſſe ; P M [Y] l'ordonnée de la Courbe propoſée M m ; P O [v] l'ordonnée de l'Aſymptote droite B C O ; P N [$v+t$] l'ordonnée de l'Aſymptote courbe N n [t eſt le prémier terme de la Série où x a un expoſant négatif ; nous le ſuppoſerons égal à $Cx^{-k:l}$] : Je dis que cette Courbe

CH. VIII. §. 132. Courbe Nn eſt une Hyperbole, dont on peut regarder CO comme l'abſciſſe, & ON [t] comme l'ordonnée. Car les paralléles AC, PO donnent AB : BC = AP : CO. La raiſon de AB à BC eſt donnée, puiſque l'angle BAC des deux Axes, & les côtés AB [$-\frac{B}{A}$] & AC [B] du triangle ABC ſont donnés. Que $\frac{B}{A} : \frac{K}{A}$, ou $B : K$, exprime la raiſon de AB à BC. Donc $B : K = AB [x] : CO [z]$. Ainſi l'abſciſſe z eſt $\frac{Kx}{B}$, ou $x = \frac{Bz}{K}$, & l'ordonnée t [$Cx^{-k:l}$] $= \frac{CB^{-k:l}}{K^{-k:l}} z^{-k:l}$. L'équation de cette Courbe Nn eſt donc $t = \frac{CB^{-k:l}}{K^{-k:l}} z^{-k:l}$, ou $t^l = \frac{C^l K^k}{B^k} z^{-k}$, qui eſt l'équation d'une Hyperbole [§. 122]. PL. XI.

La poſition des Branches de cette Hyperbole-aſymptote eſt déterminée par le coëfficient C & par l'expoſant $-\frac{k}{l}$ du terme t [$= Cx^{-k:l}$]. Si le coëfficient a, à l'infini, le même ſigne qu'v, les Branches tombent, par raport à l'Axe des abſciſſes, au-delà de l'Aſymptote-droite : mais elles tombent en-deça, c'eſt-à-dire, entre l'Axe & l'Aſymptote, ſi v & t ont à l'infini des ſignes contraires.

Quant à l'expoſant $-\frac{k}{l}$, ſi k & l ſont tous deux impairs, les deux Branches de l'Hyperbole-aſymptote

PL. XI. tombent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, & de part & d'autre de l'Axe des abſciſſes, qui eſt ici l'Aſymptote-droite. Si k eſt impair & l pair, les deux Branches tombent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais d'une même part de l'Axe des abſciſſes, qui eſt ici l'Aſymptote droite. Si k eſt pair & l impair, les deux Branches tombent d'une même part de l'Axe des ordonnées, & de part & d'autre de l'Axe des abſciſſes ou de l'Aſymptote droite. Et ſi k & l ſont tous deux pairs, l'Hyperbole-aſymptote a quatre Branches qui ſe jettent dans chacun des quatre angles que fait l'Aſymptote droite avec l'Axe des ordonnées; angles que nous apellerons, dans la ſuite, les *Angles aſymptotiques*. [§. 128]. CH. VIII. §. 132.

La poſition des Branches de l'Hyperbole-aſymptote détermine celle des Branches infinies de la Courbe dont elles ſont aſymptotes : Du moins celles de la Courbe n'auront pas d'autres poſitions que celles de l'Hyperbole. Car il peut ſe faire que les termes ſuivants de la Série ou multiplient, ou rendent imaginaires les Branches de la Courbe, dont celles de l'Hyperbole devroient être les aſymptotes.

Mais cela ne ſauroit arriver, ſi t eſt un des termes réguliers de la Série [§. 109]. Il ſera donc convenable, en conſervant le nom d'*Hyperbole-aſymptote* à celle dont l'abſciſſe x a l'ordonnée $v + t$, d'appeller *Aſymptote-courbe*, ou *curviligne*, la Ligne qui a pour ordonnée tous les termes irréguliers de la Série, en y joignant s'il le faut, autant de termes réguliers qu'il en eſt beſoin, pour en avoir au moins un, où l'expoſant de x ſoit négatif. Mais alors il ſe peut bien que cette Courbe ne ſoit plus une Hyperbole.

133. J'ai dit 2°. Que la Branche infinie, repréſentée par une Série, eſt Parabolique lorſque les termes v [ce ſont

CH. VIII. §. 133. ſont ceux où l'expoſant d'x eſt poſitif ou zéro] n'exprime pas une Droite. Ainſi dès que, dans le prémier terme Ax^b, l'expoſant b eſt un nombre poſitif différent de l'unité, la Branche de Courbe eſt parabolique : elle l'eſt auſſi lorſque $b = 1$, pourvû que l'expoſant i du ſecond terme Bx^i ſoit poſitif, quoiqu'inférieur à l'unité. PL. XI.

Car ſoit $t = Bx^i$. Que la Droite AO ſoit celle dont l'abſciſſe AP [x] a ſon ordonnée PO égale à Ax prémier terme de la Série, c'eſt-à-dire, que la Droite AO faſſe avec les abſciſſes AP & les ordonnées PO des angles OAP, AOP, dont les Sinus ſont entr'eux comme OP [Ax] & AP [x], ou comme A & 1. Soit auſſi NAn la Parabole dont l'abſciſſe x [AP] a une ordonnée t ou Bx^i [PN]. Donc prenant par tout OM égale à PN, la Courbe MAm, qui paſſe par tous les points M, eſt celle qui a pour ordonnée $Ax + Bx^i = PO + PN = PO + OM = PM$. Je dis que cette Courbe eſt une Parabole, dont on doit regarder AO comme l'Axe des abſciſſes. Car nommant z l'abſciſſe AO, elle eſt à AP [x] en raiſon donnée, puiſque les angles du triangle APO ſont tous donnés. Que cette raiſon ſoit exprimée par celle de K à 1. Donc $z = Kx$, ou $x = \frac{z}{K}$. Et l'ordonnée OM [t] étant égale à PN [Bx^i, ou $\frac{Bz^i}{K^i}$], l'équation de la Courbe MAm ſera $t = \frac{B}{K^i} z^i$, qui eſt celle d'une Parabole, i étant poſitif. [§. 126]. Fig. 81.

Le prémier terme Ax^b de la Série, qui exprime l'or-

PL. XI. donnée d'une Branche parabolique, fait juger de la dernière direction de cette Branche. Comme il ſurpaſſe infiniment tous les autres, x étant infinie ; la Courbe eſt cenſée avoir à l'infini des ordonnées égales à celles que repréſente ce terme ſeul. Quand b ſurpaſſe l'unité, la derniére direction de la Branche infinie eſt paralléle aux ordonnées, & elle eſt paralléle aux abſciſſes, quand b eſt plus petit que l'unité [§. 127]. Mais lorſque $b = 1$, la derniére direction des Branches infinies eſt oblique aux coordonnées, & les ſinus des angles qu'elle fait avec les ordonnées & avec les abſciſſes ſont entr'eux comme 1 à A [coëfficient du prémier terme Ax] ; puiſque la derniére direction d'une Parabole eſt celle de ſon Axe [§. 123]. CH. VIII. §. 133.

134. C'eſt pourquoi l'on regarde comme Aſymptote-courbe d'une Branche parabolique, la Parabole qui a pour ordonnée le prémier terme Ax^b de la Série, ou les deux prémiers termes $Ax + Bx^i$, lorſque dans le prémier, x a l'expoſant 1. Car quoique quelques termes ſuivants puiſſent encore être infinis, ſi x a dans ces termes un expoſant poſitif ; de ſorte qu'à l'infini, les ordonnées de la Courbe & de la Parabole différent d'une grandeur infinie ; cependant comme cette différence eſt infiniment moins grande que l'ordonnée parabolique [§. 78], elle s'évanouït en comparaiſon de cette ordonnée, & la Courbe & ſa Parabole-aſymptote ſont cenſées coïncider à l'infini.

On peut pourtant, ſi l'on veut [& il eſt même plus exact de le faire] regarder comme Aſymptote-curviligne d'une Branche parabolique, la Courbe qui a pour ordonnée la ſomme de tous les termes de la Série, dans leſquels x a un expoſant poſitif ou zéro. Car dans les termes ſuivants x ayant un expoſant négatif, ils deviennent très petits quand x eſt très grande, & infiniment petits quand

Digitized by Google

CH. VIII. §. 134. quand x eſt infinie. Donc alors la Courbe & ſon Aſymp. tote s'aprochent toûjours plus l'un de l'autre, & coïncident à l'infini. Mais cette Aſymptote-curviligne peut n'être plus une Parabole. On diſtinguera donc, quand il ſera néceſſaire, la *Parabole-aſymptote*, & *l'Aſymptote-courbe*, ou *curviligne*. Celle-là a pour ordonnée le prémier terme de la Série, ou les deux prémiers, quand l'expoſant d'x dans le prémier terme eſt l'unité. L'ordonnée de celle-ci eſt la ſomme de tous les termes de la Série, dans leſquels l'expoſant d'x eſt poſitif ou zéro. PL. XI.

Le terme ſuivant marque par ſon ſigne, ſemblable ou contraire au ſigne de l'ordonnée de l'Aſymptote-curviligne à l'infini, que la Courbe tombe en-deçà ou en-delà de cette Aſymptote : & l'expoſant de x dans ce terme fait connoître ſi les Branches infinies exprimées par la Série s'étendent d'une ſeule part ou de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, & ſi elles tombent d'un même ou de différents côtés de leur Aſymptote. C'eſt la même choſe que pour les Branches hyperboliques [§. 132], & ici, comme là, il eſt indiſpenſable de faire attention à tous les termes irréguliers de la Série.

135. POUR démêler ſans confuſion tout ce qui regarde les Branches infinies d'une Courbe dont l'équation eſt donnée; il faut, après l'avoir miſe ſur le Triangle analytique, égaler à zéro ſon plus haut Rang. Les racines de cette équation ne peuvent avoir que ces trois ou quatre formes $y = 0$, $x = 0$, $y = Ax$, ou, ce qui revient au même, $x = \frac{y}{A}$. Car ſi ce plus haut Rang eſt $\alpha y^v + \beta x y^{v-1} + \gamma x^2 y^{v-2} + \ldots \&c. \ldots + \chi x^{v-2} y^2 + \psi x^{v-1} y + \omega x^v$, on aura, [en l'égalant à zéro & diviſant par x^v]

Pl. XI. $\alpha\frac{y^v}{x^v}+\beta\frac{y^{v-1}}{x^{v-1}}+\gamma\frac{y^{v-2}}{x^{v-2}}+\ldots\ldots\&c.\ldots\ldots+\chi\frac{y^2}{x^2}+\downarrow\frac{y}{x}+\omega$ Ch. VIII. §. 135.

$=0$, qui a le nombre v de racines telles que $\frac{y}{x}\pm A=0$, $\frac{y}{x}\pm A'=0$, &c. ou $y\pm Ax=0$, $y\pm A'x=0$, &c.

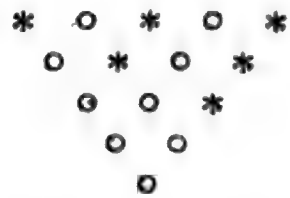
Lorſque le plus haut Rang a une ou pluſieurs Caſes vuides du côté de la Bande ſans y, lorſque ω, ou ω & $\downarrow$, ou ω, $\downarrow$ & χ, &c. ſont zéro, l'éq: $\alpha y^v+\beta x y^{v-1}$ &c. eſt diviſible, une ou pluſieurs fois, par y; elle a une ou pluſieurs racines $y=0$. De même, lorſque ce plus haut Rang a une ou pluſieurs Caſes vuides du côté de la Bande ſans x, lorſque α, ou α & β, ou α, β & γ, &c. ſont zéro, l'éq: $\alpha y^v+\beta x y^{v-1}$ &c. eſt diviſible, une ou pluſieurs fois, par x; elle a une ou pluſieurs racines $x=0$. Mais ſi les deux Caſes extrêmes du plus haut Rang, y^v, x^v ſont remplies, toutes les racines de l'équation faite en égalant ce Rang à zéro ſont de la forme $y=Ax$, ou $x=\frac{y}{A}$.

La racine $y=0$, étant l'équation de l'Axe des abſciſſes; les Branches infinies qu'elle indique auront leur derniére direction paralléle à cet Axe. La racine $x=0$ marque au contraire des Branches infinies dont la derniére direction eſt paralléle à l'Axe des ordonnées, duquel l'équation eſt $x=0$. Et les racines $y-Ax=0$ dénotent des Branches dont la derniére direction eſt paralléle à la Droite que repréſente cette éq: $y-Ax=0$, c'eſt-à-dire, à une Droite oblique aux coordonnées, & dont l'inclinaiſon eſt telle que les Sinus des angles qu'elle fait avec

Ch. VIII. §. 135. avec les abſciſſes & avec les ordonnées ſont entr'eux comme A à 1. Si ces Branches ſont paraboliques, cette Droite eſt l'Axe de leur Parabole-aſymptote ou paralléle à cet Axe [§. 133]. Si ces Branches ſont hyperboliques, cette Droite eſt leur Aſymptote, ou paralléle à l'Aſymptote [§. 131]. Pl. XI.

136. C'eſt donc en égalant à zéro le plus haut Rang de l'équation d'une Courbe, qu'on juge de la derniére direction de ſes Branches infinies. Elles peuvent avoir autant de derniéres directions que cette équation du plus haut Rang a de racines réelles : Si elle n'a que des racines imaginaires, la Courbe n'a point de derniéres directions, point de Branches infinies.

Exemple. Soit propoſée l'éq : $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 6axyy - 2ax^3 + a^2x^2 = 0$. Si on la met ſur le Tr: anal: on voit que l'éq : $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 = 0$ du plus haut



Rang n'a que des racines imaginaires. Car, en tirant la racine quarrée, on a $yy + xx = 0$, dont les racines ſont $y + x\sqrt{-1} = 0$, & $y - x\sqrt{-1} = 0$, toutes deux imaginaires. Donc la Courbe n'a point de Branches infinies. Fig. 83.

En effet, l'équation propoſée n'a point d'autres déterminatrices ſupérieures que celle qui traverſe le plus haut Rang, puiſque les deux Caſes extrémes de ce Rang y^4 & x^4 ſont pleines. Cette équation ne fournit donc point d'autres

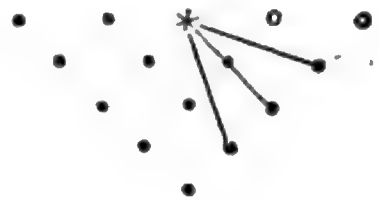
Pl. XI. tres Séries deſcendantes que les deux qui commencent par les termes $-x\sqrt{-1}$ & $+x\sqrt{-1}$, donnés par cette déterminatrice. Et dès le prémier terme ces Séries ſont imaginaires. L'équation ne donne donc aucune Série qui puiſſe repréſenter quelque Branche infinie. Ch. VIII. §. 136.

On le rendra très ſenſible par la Conſtruction de cette Courbe. En regardant ſon équation comme une équation du ſecond dégré, on trouvera $yy = 3ax - xx \pm 2\sqrt{(2a^2x^2 - ax^3)} = ax \pm 2\sqrt{(ax(2ax - xx))} + 2ax - xx$, & tirant la racine quarrée $y = \pm\sqrt{ax} \pm \sqrt{(2ax - xx)}$. Chaque abſciſſe AP[$x$] a donc quatre ordonnées [y] PM, PM, Pm, Pm, les deux prémiéres poſitives & les deux derniéres négatives. PM, Pm ſont égales à la ſomme $+\sqrt{ax} + \sqrt{(2ax - xx)}$ & $-\sqrt{ax} - \sqrt{(2ax - xx)}$, & P$M$, P$m$ ſont égales à la différence $-\sqrt{ax} + \sqrt{(2ax - xx)}$ & $+\sqrt{ax} - \sqrt{(2ax - xx)}$, des ordonnées PN, PO, ou Pn, Po de la Parabole NDAdn, dont l'équation eſt $yy = ax$, ou $y = \pm\sqrt{ax}$, & du Cercle ADOBodA dont l'équation eſt $yy = 2ax - xx$, ou $y = \pm\sqrt{(2ax - xx)}$. Or comme le Cercle ne s'étend que juſqu'au diamétre AB, & qu'au-delà ſes ordonnées ſont imaginaires, la Courbe AECACeA, ne paſſera pas non plus au-delà de l'abſciſſe AB, & n'aura, comme on le voit par ſa Conſtruction, aucune Branche infinie. Fig. 83.

137. Lors qu'égalant à zéro le plus haut Rang de l'équation de la Courbe on lui trouve des racines réelles; ces racines ſont ou $y = 0$, ou $x = 0$, ou $y = Ax$, ſoit $x = \frac{y}{A}$ [§. 135].

I. Elle a des racines $y = 0$, lors qu'il manque au prémier Rang une ou pluſieurs Caſes du côté de la Bande ſans y. Alors il part de la Caſe pleine qui eſt la plus voiſine

CH. VIII. §. 137. ſine de cette bande une déterminatrice ſupérieure, qui fournit l'équation par laquelle on a le premier terme Ax^b de la Série [car on ne peut regarder o [$= y$] comme un terme]. Selon les Caſes qui ſont pleines dans les Rangs inférieurs, cette déterminatrice aura différentes poſitions qu'on peut réduire à trois. Ou elle eſt parallèle à la Bande ſans x, ou elle tombe au-deſſous de cette parallèle, ou elle reſte au-deſſus. PL. XI.



1. Lorſque la déterminatrice eſt parallèle à la Bande ſans x, le prémier terme de la Série eſt Ax^0, ou ſimplement A [§. 96. 3°]. A l'abſciſſe x infinie il répond une ordonnée finie A, & réciproquement l'ordonnée A a une abſciſſe x infinie. Si on méne cette abſciſſe de l'ordonnée A, la Courbe s'éloignant infiniment de l'Origine s'aproche infiniment de cette abſciſſe, qui eſt ainſi ſon Aſymptote [§. 119]. Donc, une déterminatrice parallèle à la Bande ſans x indique des Abſciſſes-aſymptotes †, c'eſt-à-dire des Aſymptotes droites parallèles à l'Axe des abſciſſes, & par conſéquent des Branches hyperboliques. [§. 129].

2. Quand la déterminatrice tombe au-deſſous de la parallèle à la Bande ſans x; elle ne coupe que la Bande ſans y, ou bien elle paſſe par la Pointe. Alors l'expoſant d'x, dans le prémier terme de la Série, eſt négatif [§. 96. 1°],

† M. DE GUA, *Uſage de l'Anal.* pag. 55.

Pl. XI. ce qui marque des Branches hyperboliques, qui ont pour Asymptote l'Axe des abscisses [§. 131] *. Ch. VIII. §. 137.

3. Quand, au contraire, la déterminatrice tombe au-dessus de la parallèle à la Bande sans x; elle coupe, étant prolongée, les deux Bandes extérieures du Triangle, mais elle retranche une plus grande portion de la Bande sans x que de la Bande sans y. Alors x, dans le prémier terme de la Série, a un exposant positif plus petit que l'unité [§. 96. 2°], ce qui marque des Branches paraboliques dont la derniére direction est parallèle aux abscisses [§. 133].

II. Par un raisonnement tout pareil, les racines $x=0$ ayant lieu lorsqu'il manque au premier Rang une ou plusieurs Cases du côté de la Bande sans x, il part de la Case pleine qui est la plus voisine de cette Bande, une déterminatrice supérieure, qui est ou parallèle à la Bande sans y, ou au-dessous de cette parallèle, ou au-dessus.

1. Si elle est parallèle à la Bande sans y; elle indique des Branches hyperboliques, qui ont des Ordonnées-asymptotes, c'est-à-dire, des Asymptotes droites parallèles aux ordonnées.

2. Si elle tombe au-dessous de la parallèle à la Bande sans y, c'est-à-dire, si elle ne coupe que la Bande sans x, ou si elle passe par la Pointe; elle désigne des Branches hyperboliques, qui ont pour Asymptote l'Axe des ordonnées.

3. Et si elle tombe au-dessus de la parallèle à la Bande sans y, coupant les deux Bandes extérieures du Triangle, mais retranchant une plus grande portion de la Bande sans y que de la Bande sans x; elle indique des Branches paraboliques, dont la derniére direction est parallèle à l'Axe des ordonnées.

III. Les

* M. De Gua, *Usage de l'Analyf.* pag. 41.

Digitized by Google

Ch. VIII. §. 137. III. Les racines $y = Ax$, ou $x = \frac{y}{A}$ ne marquent Pl. XI. que la derniére direction des Branches infinies d'une Courbe, ſans décider ſi elles ſont hyperboliques, ou paraboliques. Elles ſont hyperboliques, lorſqu'x dans le ſecond terme de la Série $y = Ax + Bx^{\frac{i}{}} + \&c.$ ou lorſqu'y dans le ſecond terme de la Série $x = \frac{y}{A} + By^{\frac{i}{}} + \&c.$ a un expoſant négatif. Elles ſont paraboliques, lorſque cet expoſant du ſecond terme eſt poſitif. [§§. 132. 133].

Mais ceci demande d'être éclairci par le détail, & rendu ſenſible par les Exemples.

Nous ſuivrons la diſtinction qui vient d'être indiquée & qui nous préſente ces quatre Cas.

I. Lorſque la déterminatrice part de la Pointe, ou ne coupe qu'une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, ſans être parallèle à l'autre.

II. Lorſque la déterminatrice eſt parallèle à une des deux Bandes extérieures du Triangle.

III. Lorſque la déterminatrice coupe inégalement les deux Bandes extérieures.

IV. Lorſque la déterminatrice coupe également les deux Bandes extérieures, & que couchée ſur le plus haut Rang elle fait avec ces Bandes un triangle iſoſcèle.

138. *Cas I.* Quand une déterminatrice, ſans être parallèle aux Bandes extérieures du Triangle analytique, n'en coupe qu'une, ou paſſe par la Pointe ; elle ſe trouve ſupérieure ſi l'on conçoit le Triangle couché ſur une de ſes Bandes, & inférieure ſi on le conçoit couché ſur l'autre.

Suppoſons d'abord que cette déterminatrice laiſſe toutes les Caſes pleines entr'elle & la Bande ſans x ; elle ſera ſupérieure lorſque le Triangle eſt couché ſur la Bande ſans

Pl. XI. x, inférieure lorſqu'il eſt couché ſur la Bande ſans y. Mais, le Triangle étant couché ſur la Bande ſans x, une déterminatrice ſupérieure indique les termes qui compoſent ſeuls toute l'équation, quand on ſuppoſe x infinie: Et le Triangle étant couché ſur la Bande ſans y, une déterminatrice inférieure paſſe par les termes que la ſuppoſition d'y infiniment petite rend infiniment plus grands que les autres. Donc puiſque la déterminatrice qui laiſſe toutes les Caſes pleines entr'elle & la Bande ſans x, paſſe par les termes qui conviennent à la ſuppoſition d'x infinie & d'y infiniment petite, les termes par leſquels elle paſſe conſtituent l'équation de la Courbe, lorſque les abſciſſes ſont infinies & les ordonnées infiniment petites. Cette déterminatrice marque donc des Branches, qui s'éloignant infiniment de l'Axe des ordonnées s'aprochent infiniment de celui des abſciſſes, c'eſt-à-dire des Branches qui ont pour Aſymptote l'Axe des abſciſſes. Ch. VIII. §. 138.

Suppoſons, au contraire, que la déterminatrice laiſſe toutes les Caſes pleines entr'elle & la Bande ſans y; elle ſera ſupérieure lorſque le Triangle eſt couché ſur la Bande ſans y, & l'équation qu'elle donne répond à la ſuppoſition d'y infinie. Cette même déterminatrice eſt inférieure, quand le Triangle eſt couché ſur la Bande ſans x, & ſon équation convient à la ſuppoſition d'x infiniment petite. Les termes par leſquels elle paſſe conſtituent donc l'équation de la Courbe qui répond en même tems à la ſuppoſition d'y infinie & d'x infiniment petite. Ainſi la déterminatrice indique des Branches infinies qui s'éloignent infiniment de l'Axe des abſciſſes en s'aprochant infiniment de celui des ordonnées, lequel eſt par conſéquent leur Aſymptote.

On examinera donc de quel côté une déterminatrice qui part de la Pointe du Tr: anal: ou qui ne coupe qu'une de ſes deux Bandes extérieures, laiſſe toutes les Caſes

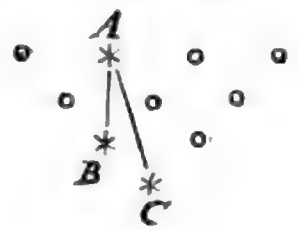
Digitized by Google

CH. VIII. §. 138. Caſes remplies par l'équation propoſée. Si c'eſt du côté de la Bande ſans x, l'Axe des abſciſſes eſt Aſymptote. Si c'eſt du côté de la Bande ſans y, c'eſt l'Axe des ordonnées qui eſt Aſymptote. PL. XI.

Le ſigne & l'expoſant du prémier terme de la Série, lequel eſt donné par cette déterminatrice, fait connoître dans quels Angles aſymptotiques s'étendent les Branches de l'Hyperbole-aſymptote dont il exprime l'ordonnée. Si l'équation de cette déterminatrice n'a point de racines multiples, ou qu'ayant des racines multiples & des racines ſimples, on ſe ſerve d'une racine ſimple pour calculer ce prémier terme; dès-lors la Série eſt réguliére, & les Branches de la Courbe ſe jettent dans les mêmes angles que ceux de l'Hyperbole qui eſt ſon Aſymptote. Mais ſi l'on employe une racine multiple, la Série n'eſt pas réguliére dès le prémier terme, & il en faut encore calculer quelques-uns, pour avoir l'Aſymptote-curviligne dont les Branches infinies ſont accompagnées de celles de la Courbe. [§. 132].

Exemple 1. On demande quelles ſont les Branches infinies de la Courbe que repréſente l'éq : $xyy - aay - b^3 = 0$.

Cette équation miſe ſur le Tr: anal: a deux déterminatrices AB & AC. Celle-ci paſſe par la Pointe: L'autre



coupe la Bande ſans x & n'eſt pas parallèle à la Bande ſans y. Ainſi elles marquent, l'une & l'autre, des Branches

Pl. XI. hyperboliques. AB, qui laiſſe la Caſe C du côté de la Bande ſans y, déſigne des Branches qui ont pour Aſymptote l'Axe des ordonnées. Et AC, qui laiſſe la Caſe B du côté de la Bande ſans x, indique des Branches dont l'Axe des abſciſſes eſt l'Aſymptote. La ſeule vûë du Triangle donne ces concluſions. Ch. VIII. §. 138.

Mais pour s'aſſurer de l'exiſtence & de la poſition de ces Branches infinies, il faut voir les équations que donnent ces déterminatrices.

AB donne $xyy - aay = 0$, ou $x = \frac{aa}{y}$. C'eſt le prémier terme de la Série deſcendante qui donne x en y, & il exprime l'ordonnée d'une Aſymptote-courbe, qui eſt une Hyperbole ſimple d'un Paramétre poſitif; dont par conſéquent les Branches s'étendent dans les angles des coordonnées de même ſigne [§. 128. I]. Et les Branches de la Courbe qui doivent accompagner celles de cette Hyperbole ſont réelles, puiſque l'éq: $xyy - aay = 0$ n'a point de racines multiples. En couchant le Triangle ſur la Bande ſans y, on voit que la déterminatrice AB porte ſur les plus hautes Caſes des deux prémiéres colomnes. Donc la Série eſt réguliére dès le prémier terme. Ainſi la Courbe, à l'exemple de ſon Hyperbole-aſymptote, jette deux Branches qui s'aprochent à l'infini de l'Axe des ordonnées, l'une dans l'angle des coordonnées poſitives, l'autre dans l'angle des coordonnées négatives.

L'autre déterminatrice AC donne l'éq: $xyy - b^3 = 0$, ou $y = \pm b^{3:2} x^{-1:2}$, qui indique une Hyperbole du troiſiéme Ordre, dont les Branches s'étendent dans les Angles des abſciſſes poſitives [§. 128. III]. Elles embraſſent donc, pour ainſi dire, l'Axe des abſciſſes qui eſt leur Aſymptote-droite, & l'accompagnent à l'infini du côté poſitif. Et comme cette équation n'a point de racines multiples; la Série eſt réguliére dès le prémier terme, & les

CH. VIII. §. 138. les Branches de la Courbe accompagnent, dans les mêmes angles, celles de l'Hyperbole-aſymptote. PL. XI.

La Courbe propoſée a donc quatre Branches infinies hyperboliques: deux deſquelles, qui ont pour Aſymptote-droite l'Axe des ordonnées, ſe jettent dans les angles oppoſés des coordonnées de même ſigne; & les deux autres, dont l'Axe des abſciſſes eſt l'Aſymptote, s'étendent dans les angles de ſuite des abſciſſes poſitives. Le cours de cette Ligne eſt à peu près tel que le repréſente la *Fig.* 84.

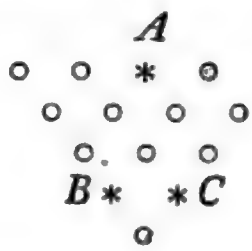
Et cela s'acorde très bien avec ce qu'on peut tirer de l'équation propoſée. Réſoluë comme une équation du ſecond dégré, elle donne $y = \frac{aa \pm \sqrt{(4b^3x + a^4)}}{2x}$ où l'on voit 1°. qu'y eſt imaginaire lorſque $4b^3x + a^4$ devient négative; ce qui n'a jamais lieu, x étant poſitive; mais bien quand x négative eſt au-deſſous de $\frac{a^4}{4b^3}$ [AB], dont l'ordonnée y eſt égale à $-aa : \frac{2a^4}{4b^3} = -\frac{2b^3}{aa}$ [BC]. 2°. Que x étant infinie, y eſt infiniment petite & a deux valeurs égales, mais l'une poſitive RS, l'autre négative Rs. Car x étant infinie, il ne reſte dans le numérateur de la fraction égale à y, que $\pm\sqrt{4b^3x}$, qui diviſé par $2x$ ſe réduit à $\pm\sqrt{\frac{b^3}{x}}$. 3°. Que x étant zéro, ou plûtôt infiniment petite, y a deux valeurs, l'une finie $-\frac{b^3}{a}$, [AD], l'autre infinie $+\frac{aa}{x}$, qui eſt poſitive [AE] quand x eſt poſitive, & négative [AF] quand x eſt négative. Car ſi on tire la racine quarrée $\sqrt{(a^4 + 4b^3x)}$, on aura une Série $aa + \frac{2b^3x}{aa}$ *&c.* qu'on ajoûtera à aa & qu'on en retranchera

PL. XI. tranchera, pour avoir, en diviſant par $2x$, les deux va- CH. VIII. §. 138.
leurs d'y, $\frac{aa}{x} + \frac{b^3}{aa}$ &c. [AE ou AF] infinie, & $-\frac{b^3}{aa}$ &c. [AD] finie.

Que ſi l'on veut, pour plus de clarté, décrire la Courbe par points, on le fera aiſément en prenant la valeur d'x, qui eſt $\frac{aa}{y} + \frac{bbb}{yy}$. Ainſi ſuppoſant $a = 2 = b$, on aura $x = \frac{4}{y} + \frac{8}{yy}$, ce qui donne les valeurs ſuivantes.

Soit $y = 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5, -6$, &c.
on aura $x = 1\frac{3}{25}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{2}{9}, 4, 12, inf., 4, 0, -\frac{4}{9}, -\frac{1}{2}, -\frac{12}{25}, -\frac{4}{9}$, &c.

Exemple 2. L'équation propoſée eſt $xxyy - a^3y - b^3x = 0$. En la mettant ſur le Tr: anal: on lui trouve deux déterminatrices, AB, AC, qui ſont alternativement ſupérieures & inférieures, quand on couche le Triangle ſur la Bande ſans y & ſur la Bande ſans x. Elles marquent donc des Branches hyperboliques, qui ont pour



Aſymptote, les unes l'Axe des ordonnées, les autres l'Axe des abſciſſes. La Série qui repréſente les prémiéres a pour ſon prémier terme $x = \pm a^{3:2} y^{-1:2}$, que donne l'éq: $xxyy - a^3y = 0$ fournie par la déterminatrice AB. Il marque deux branches qui ſe jettent le long de l'Axe des ordonnées dans les deux angles de ſuite des ordonnées poſitives. Et ces deux branches de l'Hyperbole-aſymptote ſont

CH. VIII. §. 138. ſont accompagnées de celles de la Courbe, puiſque l'éq : $xxyy - a^3y = 0$ n'a point de racines multiples. PL. XI.

Il en eſt préciſément de même des Branches qui ont pour Aſymptote l'Axe des abſciſſes. La poſition de la déterminatrice AC eſt ſymétrique à celle de la déterminatrice AB, & l'équation que donne AC eſt la même que celle que donne AB, en changeant x en y & a en b. La Courbe a donc quatre Branches hyperboliques, dont deux FC, DC ſuivent l'Axe des ordonnées dans les angles des ordonnées poſitives, & deux DB, HB accompagnent l'Axe des abſciſſes dans les angles des abſciſſes poſitives. Fig. 85.

Cette concluſion ſe confirme par la réſolution de l'équation propoſée. Elle ſe préſente alors ſous cette forme $y = \frac{a^3 \pm \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$, où y a deux valeurs. En prenant x poſitive, l'une des deux valeurs d'y eſt poſitive, ſç. $\frac{a^3 + \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$, l'autre $\frac{a^3 - \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$ eſt négative, parce que $\sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}$ ſurpaſſe $a^3 = \sqrt{a^6}$. Quand x eſt infinie, ces deux valeurs ſe réduiſent à $\pm \frac{\sqrt{4b^3x^3}}{2xx} = \pm b^{3:2}x^{-1:2}$. Elles ſont donc infiniment petites & égales, mais de différents ſignes. Quand x eſt infiniment petite, la valeur poſitive devient $[\frac{a^3 + \sqrt{a^6}}{2xx} = \frac{a^3}{xx}]$ infinie, & la valeur négative ſe réduit à $[\frac{a^3 - \sqrt{a^6}}{2xx} =]$ zéro. La valeur poſitive déſigne donc une Branche BDC, qui a pour Aſymptote les deux Axes; & la valeur négative indique une Branche BHA, qui a pour Aſymptote l'Axe des abſciſſes, & qui paſſe par l'origine A. Si l'on prend x négative, les deux valeurs d'y, qui ſont préſen-

Pl. XI. tement $\frac{a^3 \pm \sqrt{(a^6 - 4b^3x^3)}}{2xx}$, ſont toutes deux poſitives, parce que a^3 [$= \sqrt{a^6}$] ſurpaſſe $\sqrt{(a^6 - 4b^3x^3)}$. La Courbe n'a donc point de Branches dans l'angle des coordonnées négatives, mais elle en a deux AF, FC, dans l'angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives. Il eſt vrai qu'elles ne s'écartent pas beaucoup de l'Axe des ordonnées, puiſqu'elles deviennent imaginaires dès que x eſt plus négative que $\frac{aa}{b\sqrt[3]{4}}$ [AE], laquelle abſciſſe AE a ſon ſon ordonnée $EF = \frac{bb\sqrt[3]{2}}{a}$. On prouveroit de même, en réſolvant l'équation ſelon l'inconnuë x, ce qui donne $x = \frac{b^3 \pm \sqrt{(b^6 + 4a^3y^3)}}{2yy}$, que la Branche AHB ne s'éloigne de l'Axe des abſciſſes nulle part plus qu'en H, qui a pour abſciſſe $GH = \frac{aa\sqrt[3]{2}}{b}$ & pour ordonnée $AG = \frac{bb}{a\sqrt[3]{4}}$ D'où il paroit que la Courbe eſt compoſée de deux parties dont la poſition eſt celle qu'on voit dans la *Fig.* 85, & qu'elle a les quatre Branches hyperboliques qui ont été indiquées par les deux déterminatrices de ſon équation miſe ſur le Triangle analytique. Ch. VIII. § 138.

Cet Exemple peut faire naitre une difficulté apparente. Si on cherche la Série qui donne y en x, on trouvera $y = \pm b\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^3}{2xx} \pm \frac{a^6}{8b^3x^3}\sqrt{\frac{b}{x}}$ *&c.* dont les termes demi-imaginaires ſemblent indiquer que les ordonnées ſont imaginaires du côté des abſciſſes négatives. Cependant on vient de voir que la Courbe a deux Branches AF, FC de ce côté-là. Mais il faut conſidérer que la Série

CH. VIII. §. 138. Série n'eſt convergente que quand x eſt fort grande : elle eſt divergente & trompeuſe, quand x eſt aſſez petite, ce qui eſt le cas des Branches AFC, dont l'abſciſſe ne ſurpaſſe point $AE = \frac{aa}{\sqrt[3]{4}b}$. On a trouvé $y = \frac{a^3 \pm \sqrt{(a^6 + 4b^3x^3)}}{2xx}$. PL. XI.

Or la racine quarrée de $a^6 + 4b^3x^3$ ſe peut exprimer par deux Séries différentes, dont l'une ſert quand $a^6 > 4b^3x^3$, & l'autre quand $4b^3x^3 > a^6$. La prémiére, qu'on trouve en tirant la racine de $a^6 + 4b^3x^3$, eſt $a^3 + \frac{2b^3x^3}{a^3} - \frac{2b^6x^6}{a^9} + \frac{2b^9x^9}{a^{15}}$ &c. Et la ſeconde, qu'on trouve en tirant la racine de $4b^3x^3 + a^6$, eſt $2bx^2\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^6}{4bx}\sqrt{\frac{b}{x}} - \frac{a^{12}}{64b^5x^4}\sqrt{\frac{b}{x}}$ &c. Ces Séries ſubſtituées pour $\sqrt{(a^6+4b^3x^3)}$ dans la valeur d'y, donnent quatre Séries, ſç. P & Q quand $a^6 > 4b^3x^3$, ou $x < \frac{aa}{\sqrt[3]{4}b} = AE = Ae$; & R, S, quand $4b^3x^3 > a^6$, ou $x > \frac{aa}{\sqrt[3]{4}b} = AE = Ae$.

$$P \ldots . y = \frac{a^3}{xx} + \frac{b^3x}{a^3} - \frac{b^6x^4}{a^6} \text{ &c.}$$

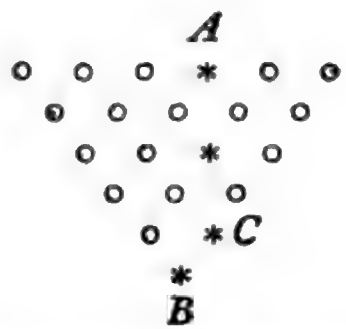
$$Q \ldots . y = -\frac{b^3x}{a^3} + \frac{b^6x^4}{a^9} + \frac{b^9x^7}{a^{15}} \text{ &c.}$$

$$R \ldots . y = +2b\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^3}{2xx} + \frac{a^6}{8b^2x^3}\sqrt{\frac{b}{x}} \text{ &c.}$$

$$S \ldots . y = -2b\sqrt{\frac{b}{x}} + \frac{a^3}{2xx} - \frac{a^6}{8b^2x^3}\sqrt{\frac{b}{x}} \text{ &c.}$$

PL. XI. La Série P exprime les ordonnées des Branches C f, C F, ſuivant qu'on prend x poſitive ou négative. La Série Q celle des Branches A φ, AF. Et les Séries R, S celles des Branches fB, φB. Les deux prémiéres n'ont rien d'imaginaire, mais leur uſage ne s'étend point au-delà des abſciſſes Ae $[\frac{aa}{b\sqrt{4}}]$, AE $[-\frac{aa}{b\sqrt{4}}]$. Les Séries R, S, qui ſervent au delà des abſciſſes AE, Ae, à l'infini, ſont réelles quand x eſt poſitive, imaginaires quand x eſt négative. Auſſi la Courbe a-t'elle deux Branches du côté poſitif, qui ont des abſciſſes infinies: elle n'en a aucune du coté négatif, qui ayent des abſciſſes plus grandes que AE $[-\frac{aa}{b\sqrt{4}}]$. CH. VIII. §. 138.

Exemple 3. Il s'agit de la Courbe repréſentée par l'éq: $x^3yy - 2aaxxy + a^4x - b^5 = 0$, qui étant miſe ſur le Triangle analytique, a deux déterminatrices. La prémiére *AB* qui eſt ſupérieure quand on couche le Triangle ſur la Bande ſans y, indique des Branches hyperboli-



ques, dont l'Aſymptote droite eſt l'Axe des ordonnées, & l'Aſymptote courbe l'Hyperbole exprimée par l'éq: $x^3yy - b^5 = 0$, ou $x = b^{\frac{5}{3}}y^{-\frac{2}{3}}$, qui étend ſes Branches dans les deux angles de ſuite des abſciſſes poſitives, c'eſt-

à-dire

CH. VIII. §. 138. à-dire du côté positif de leur Asymptote droite. Et ces Branches d'Hyperboles sont accompagnées de deux Branches réelles de la Courbe, puisque l'éq : $x^3yy - b^5 = 0$ n'a point de racines multiples. PL. XI.

L'autre déterminatrice AC, qui est supérieure quand on couche le Triangle sur la Bande sans x, & qui par conséquent désigne des Branches hyperboliques dont l'Asymptote droite est l'Axe des abscisses, donne pour l'équation de l'Hyperbole-asymptote $x^3yy - 2aaxxy + a^4x = 0$, ou, divisant par x, $xxyy - 2aaxy + a^4 = 0$, qui n'a qu'une racine, mais double, $xy - aa = 0$, ou $y = \frac{aa}{x}$. Elle exprime une Hyperbole ordinaire positive, c'est-à-dire, qui jette ses Branches dans les angles des coordonnées de même signe. Mais comme cette racine est double, la Série n'est pas encore réguliére, & il faut en chercher au moins encore un terme. On substituera donc $\frac{aa}{x} + u$ à y dans l'équation proposée, ce qui la transformera en $x^3uu - b^5 = 0$, ou $u = b^{5:2}x^{-3:2}$, qui est la même Hyperbole qu'on a trouvé pour l'Asymptote courbe des Branches infinies qui s'étendent le long de l'Axe des ordonnées. La transformée n'ayant que deux termes, la Série est terminée, & l'équation de la Courbe se réduit à $y = \frac{aa}{x} + \frac{bb}{x}\sqrt{\frac{b}{x}}$. D'où il paroit que la Courbe n'a aucune ordonnée du côté des abscisses négatives, & que du côté des positives elle a deux Branches BM, DM le long de l'Axe des ordonnées, & deux autres Bm, Dm le long de l'Axe des abscisses. Fig. 86.

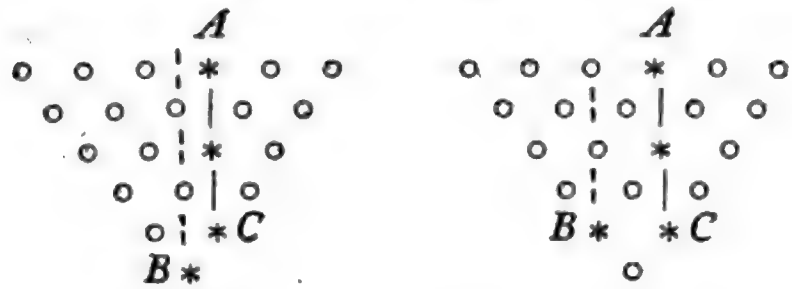
Puisque l'équation proposée se réduit à $y = \frac{aa}{x} \pm \frac{bb}{x}\sqrt{\frac{b}{x}}$, on la construira en décrivant sur les Axes AC, AD deux

Pl. XI. Hyperboles, l'une Nn, qui a pour ordonnée $\frac{aa}{x}$ [PN, pn], & l'autre Oo, qui a pour ordonnée $\pm\frac{bb}{x}\sqrt{\frac{b}{x}}$ [PO, PO, po, po]. Car ſi on donne à chaque abſciſſe AP, ou Ap, deux ordonnées PM, PM, ou pm, pm, dont l'une PM, ou pm, ſoit égale à la ſomme NO [PN+PO], ou no [pn+po] des ordonnées de ces deux Hyperboles, & l'autre PM, ou pm, à leur différence NO [PN — PO], ou no [pn — po]; les points M, m, M, m, ſeront à la Courbe propoſée MBm, MDm. Ch. VIII. §. 138.

Si au lieu de $-b^5$, on avoit eu $-b^4y$ dans l'équation propoſée, la transformée par la ſubſtitution de $aax^{-1}+u$ à y auroit été $x^3uu-b^4u=aab^4x^{-1}=0$, qui, étant miſe ſur le Triang: anal: couché ſur la Bande ſans x, a une déterminatrice ſupérieure qui fournit l'éq: $x^3uu-aab^4x^{-1}=0$, ou $u=\pm abbx^{-2}$. Comme cette équation n'a point de racines multiples, la Série eſt réguliére dès ce ſecond terme. L'équation de l'Aſymptote-courbe eſt donc $y=\frac{aa}{x}\pm\frac{abb}{xx}$: par laquelle il paroit que les deux Branches de l'Hyperbole $y=\frac{aa}{x}$ qui accompagnent l'Axe des abſciſſes, ſont ſuivies, l'une & l'autre, de deux Branches de la Courbe, qui tombent, l'une endeçà, l'autre en-delà, des Branches de l'Hyperbole. Ainſi la Courbe a huit Branches hyperboliques, dont le cours eſt à peu près tel qu'on le voit dans la *Fig.* 87.

On pouvoit prévoir cette différence des deux Courbes *Fig.* 86 & 87, preſque par la ſeule inſpection de leurs équations miſes ſur le Triang: analytique. La racine double $xy-aa=0$ de l'équation que donne la déterminatrice AC ne diviſe pas le terme unique b^5, ou b^4y, du ſecond

CH. VIII. §. 138. ſecond ordre. Donc [§. 113] la Série qui donne y par x, aura, ou n'aura pas, des termes demi-imaginaires, ſelon que la différence des expoſants du prémier & du ſecond ordre eſt non-diviſible, ou diviſible, par l'expoſant 2 de la multiplicité de la racine $xy - aa = 0$, c'eſt-à-dire ſe- PL. XI.



lon que cette différence eſt impaire ou paire. Or cette différence eſt impaire dans l'éq : $x^3y^2 - 2a^2x^2y + a^4x - b^4 = 0$, où les expoſants des deux ordres ſont 1 & 0. Elle eſt paire dans l'éq : $x^3y^2 - 2a^2x^2y + a^4x - b^4y = 0$, où ces expoſants ſont 1 & —1. Cela ſe voit auſſi par la ſeule inſpection du Triangle, en menant la déterminatrice AC & ſa parallèle qui paſſe par tous les termes [ici par le terme unique B] du ſecond ordre. Entre ces deux droites il n'y a, dans la prémiére équation qu'un intervalle ; puiſqu'il n'y a entr'elles aucune Caſe ; mais dans la ſeconde équation, il y a deux intervalles ſéparés par une ligne de Caſes vuides. Ainſi la différence des expoſants des ordres eſt, dans la prémiére équation, 1 nombre impair ; dans la ſeconde, 2 nombre pair. Donc la prémiére Série a des termes demi-imaginaires, & par conſéquent la Courbe n'étend que d'un ſeul côté des Branches infinies le long de l'Axe des abſciſſes. La ſeconde Série n'a point de ter- Fig. 86. mes demi-imaginaires, mais elle ſera entiérement imaginaire ou réelle, ſelon que les racines de l'équation de la ſeconde déterminatrice ſont imaginaires ou réelles. Comme elles

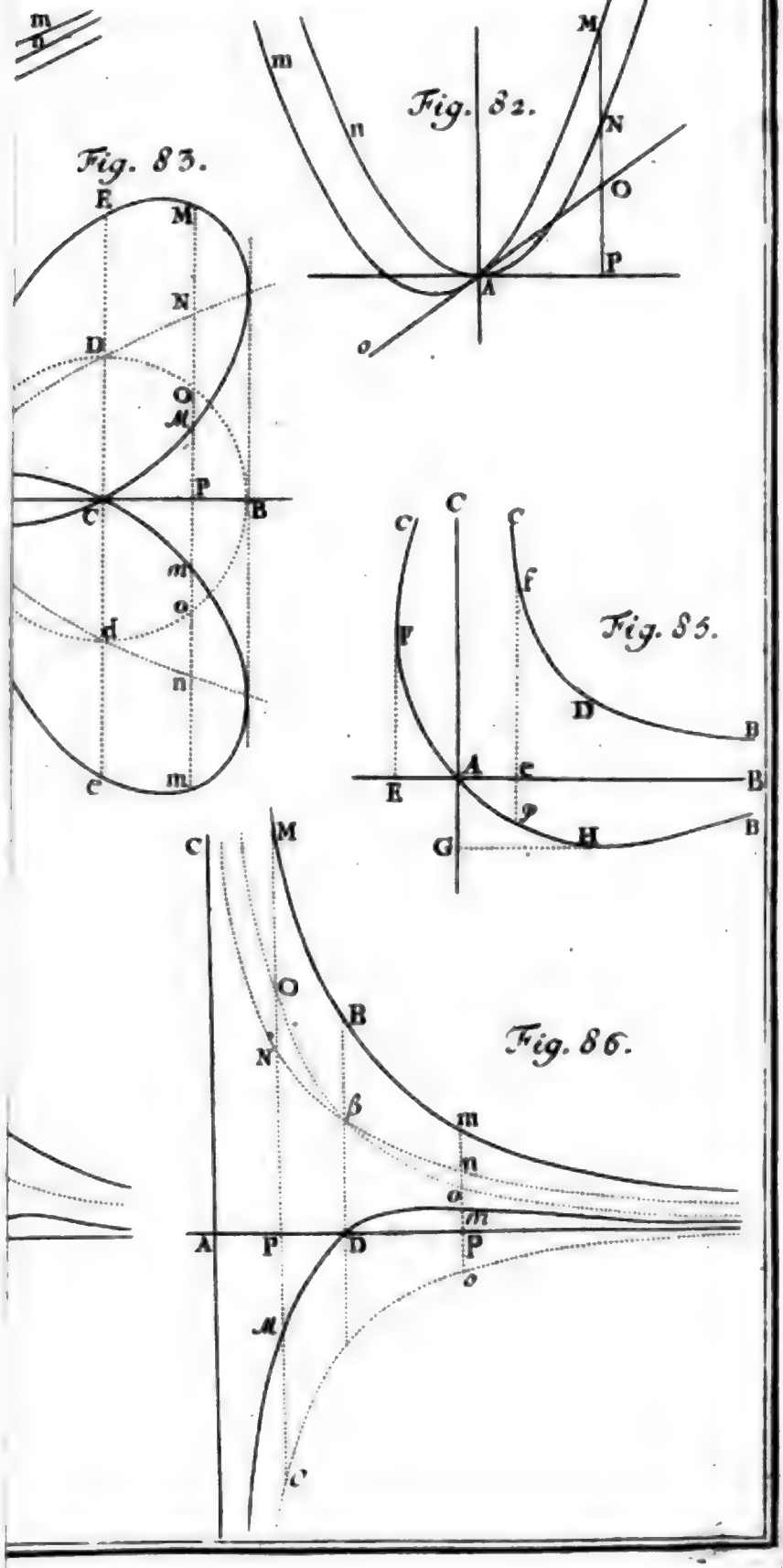
Pl. XI. Fig. 87. elles ſe trouvent ici réelles, la Courbe a quatre Branches infinies le long de l'Axe des abſciſſes, deux du côté poſitif & deux du côté négatif de l'Axe des ordonnées. Ch. VIII. §. 138.

Exemple 4. On propoſe l'éq : $xxyy - 2abxy - bbdy + aabb - bbcd = 0$, dont voici la Conſtruction. Une Pl. XII. Fig. 88. Parabole N C n, décrite avec un Paramétre $= d$, ſur les Axes C B, C E, étant donnée, avec une Droite DO parallèle à C E, & un Point fixe A : ſi l'on tire par ce Point A une droite quelconque A N, qui rencontre la Droite donnée en O, & la Parabole en n, N, & qu'on méne par le point O la droite M O m parallèle à l'Axe C B, & par les points N, n, les droites N M, n m parallèles à l'Axe C E, les points M, m, où ces droites ſe coupent ſeront à la Courbe propoſée. Car ſi l'on méne par A deux droites A Q, A B parallèles aux Axes C B, C E de la Parabole, leſquelles rencontrent l'une en D la Droite donnée D O, l'autre en B l'Axe C B, & qu'en prenant A Q, A B pour les Axes de la Courbe, on nomme A B, a; A D, b; B C, qui eſt négative dans la Figure, c; l'abſciſſe A P, x, & l'ordonnée P M, ou P m, y : les triangles ſemblables A D O, A Q N ou A q n, donneront A D [b] : D O [$= $ A P, x] : : A Q ou A q [$=$ P M ou P m, y] : Q N ou q n [$\frac{xy}{b}$].

Donc R N [$=$ Q N $-$ Q R $=$ Q N $-$ A B] $= \frac{xy}{b} - a$, ou

r n [$=$ q r $-$ q n $=$ A B $-$ q n] $= a - \frac{xy}{b}$. Et C R, ou C r [$=$ C B $+$ B R ou B r $=$ C B $+$ P M ou P m] $= c + y$. Ainſi puiſque, par la propriété de la Parabole, le rectangle du Paramétre d par l'ordonnée C R ou C r eſt égal au quarré de l'abſciſſe R N ou r n [§. 123], on aura $d \times (c + y) = \frac{xxyy}{bb} - \frac{2axy}{b} + aa$, qui ſe réduit à l'équation

propo-



Digitized by Google

Digitized by Google

Ch. VIII. §. 138. propoſée $xxyy - 2abxy + aabb = bbcd + bbdy$. Pl. XII.

On voit aiſément, par cette conſtruction, que la Courbe aura toûjours deux Branches infinies le long de l'Axe des ordonnées AD qui eſt leur Aſymptote : mais elle peut en avoir auſſi, ou n'en pas avoir, le long de l'Axe des abſciſſes AB. Ces cas ſe diſtinguent en examinant ſi cet Axe AB coupe, touche, ou ne coupe ni ne touche la Parabole.

1. S'il la coupe, & que le Point A tombe dans la Parabole, ce qui a lieu quand $BA[a] < Bb[\sqrt{cd}]$, la Courbe a quatre Branches infinies dont AB eſt l'Aſymptote, & elles ſe jettent dans les quatre angles des coordonnées. Fig. 88. num. 1.

2. Si l'Axe AB coupe la Parabole, mais que le Point A tombe hors de cette Courbe, ce qui a lieu quand $BA[a] > Bb[\sqrt{cd}]$, la Courbe a auſſi quatre Branches infinies qui accompagnent l'Axe AB; mais de ces quatre Branches, deux s'étendent dans l'angle des coordonnées poſitives & deux dans l'angle des coordonnées négatives. num. 2.

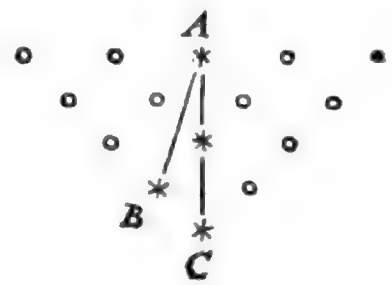
Si le Point A tomboit ſur la Parabole, alors $AB[a]$ ſeroit $= Bb[\sqrt{cd}]$, & le terme conſtant diſparoîtroit de l'équation, qui ſeroit diviſible par y, & réduite à $xxy - 2abx - bbd = 0$, ne repréſenteroit qu'une Ligne du troiſiéme ordre.

3. Si AB touche la Parabole, ce qui a lieu quand $c = 0$, la partie de la Courbe qui eſt au-deſſous de l'Axe AB diſparoit, & la Courbe n'a plus que deux Branches infinies le long de cet Axe, leſquelles ſe jettent toutes deux dans un même angle, qui eſt celui des coordonnées poſitives, à ſuppoſer d poſitive. num. 3.

4. Enfin ſi AB ne touche ni ne coupe la Parabole, ce qui eſt le cas de c négative, ou de BC poſitive, toutes les Branches infinies qui accompagnoient l'Axe AB diſ- num. 4.

PL. XII. paroiſſent, & la Courbe ne conſerve que celles qui s'éten- CH. VIII. §. 138.
dent le long de l'Axe des ordonnées AD.

Tout cela ſe diſcerne, indépendemment de la conſtruction de la Courbe, par la ſeule équation miſe ſur le Triangle analytique.



Elle a deux déterminatrices, l'une AB qui a la même poſition que AB dans l'*Exemple II*, & qui déſigne, ici comme là, [car le Calcul eſt le même], deux Branches hyperboliques qui accompagnent l'Axe des ordonnées dans les deux angles de ſuite des ordonnées poſitives.

Mais AC, qui indique des Branches dont l'Axe des abſciſſes eſt Aſymptote, donne l'éq : $xxyy - 2abxy + (aa - cd)bb = 0$, dont les racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$, préſentent quatre Cas différents; ſans compter celui où $a = \sqrt{cd}$, qui réduit l'éq : $xxyy - 2abxy - bbdy = 0$, ou $xxy - 2abx - bbd = 0$, à ne repréſenter qu'une Courbe du troiſiéme ordre.

1°. Si cd eſt plus grande que aa, les racines $xy = ab + b\sqrt{cd}$, & $xy = ab - b\sqrt{cd}$ déſignent deux Hyperboles, l'une poſitive, l'autre négative; dont la prémiére étend ſes Branches dans les angles des coordonnées de même ſigne, & la ſeconde dans les angles des coordonnées de différens ſignes. Ces Hyperboles-aſymptotes ſe répandent donc dans les quatre angles des coordonnées; num. 1. & la Courbe les accompagne le long de l'Axe des abſciſſes.

CH. VIII. §. 138. ſes dans ces quatre angles, puiſque dans ce Cas l'équation de la déterminatrice AC n'a point de racines multiples. PL. XII.

2°. Si cd étant poſitive eſt plus petite que aa, les deux racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$, déſignent deux Hyperboles poſitives, qui étendent, l'une & l'autre, leurs Branches dans les angles des coordonnées de même ſigne. Donc, puiſque l'équation de la déterminatrice n'a point dans ce Cas de racines multiples, les Branches de la Courbe ſuivent celles des Hyperboles le long de l'Axe des abſciſſes qui eſt leur Aſymptote, & ſe jettent deux dans l'angle des coordonnées poſitives, & deux dans l'angle des coordonnées négatives. num. 2.

3°. Si cd eſt négative, les deux racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$ ſont imaginaires. Ainſi les Branches infinies, que la déterminatrice AC ſembloit indiquer par ſa poſition ſont anéanties par ſon équation. La Courbe n'a donc que les deux Branches hyperboliques indiquées par la déterminatrice AB, & qui ont pour Aſymptote l'Axe AD des ordonnées. num. 4.

4°. Si $c = 0$, les deux racines $xy = ab \pm b\sqrt{cd}$ ſont égales, ou plûtôt l'éq: $xxyy - 2abxy + aabb = 0$ de la déterminatrice AC n'a qu'une racine double $xy = ab$. Il n'y a donc, pour les Branches dont l'Axe des abſciſſes eſt l'Aſymptote-droite qu'une Hyperbole poſitive, dont les Branches HI, KL ſe jettent dans les angles oppoſés des coordonnées de même ſigne. Mais, comme la racine $xy = ab$ eſt multiple; la Série, dont $\frac{ab}{x}$ eſt le prémier terme, n'eſt pas encore réguliére, & il en faut chercher le ſecond terme, au moins. On voit ſans calcul, puiſque la racine $xy - ab = 0$ eſt double, puiſqu'elle ne diviſe pas le terme unique $-bbdy$ du ſecond ordre, & puiſqu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & ſa parallèle qui paſſe par le terme du ſecond ordre; on voit, diſ- num. 3.

PL. XII. je, [§. 113], que le ſecond terme de la Série ſera demi-imaginaire, & qu'ainſi il n'y aura qu'une des deux Branches HI, ou KL, de l'Hyperbole qui ſerve d'Aſymptote à la Courbe. Mais pour ſavoir ſi c'eſt HI, ou KL, qui fait cette fonction, il faut connoître le ſecond terme de la Série. On ſubſtituera donc $abx^{-1} + u$ à y dans l'équation propoſée $xxyy - 2abxy - bbdy + aabb = 0$, & on la transformera en $xxuu - ab^3dx^{-1} - bbdu = 0$. Celle-ci miſe ſur le Tr: an: n'a qu'une déterminatrice ſupérieure, qui donne $xxuu - ab^3dx^{-1} = 0$, ou $u = \pm a^{1:2}b^{1:2}d^{1:2}x^{-1:2} = \pm b\sqrt{\frac{abd}{x^3}}$. Ce terme demi-imaginaire, mais double à cauſe du ſigne $\pm$, fait voir que la Courbe ne s'étend que du côté qu'indique le ſigne de la grandeur abd. Si ce produit eſt poſitif, il n'y a que la Branche HI de l'Hyperbole qui ſoit Aſymptote, mais elle eſt ſuivie de deux Branches mi, MI de la Courbe, dont l'une mi, déſignée par la Série $y = \frac{ab}{x} - b\sqrt{\frac{abd}{x^3}}$ &c. ſe gliſſe entre l'Hyperbole HI & l'Axe des abſciſſes; & dont l'autre MI, indiquée par la Série $y = \frac{ab}{x} + b\sqrt{\frac{abd}{x^3}}$ &c. tombe, par raport à l'Axe des abſciſſes, au-delà de l'Hyperbole HI. Ces deux Branches mi, MI ſont ſûrement réelles puiſque l'éq: $xxuu - ab^3dx^{-1} = 0$ de la ſeconde déterminatrice n'a point de racines multiples, & que par conſéquent la Série devient réguliére dès le ſecond terme. Ainſi la Courbe a quatre Branches hyperboliques; deux, qui ont pour Aſymptote l'Axe des ordonnées, l'accompagnent dans les angles des ordonnées poſitives; & deux, qui ont pour Aſymptote l'Axe des abſciſſes, ſe jettent, le long de cet Axe, dans le ſeul angle des coordonnées poſitives.

CH. VIII. §. 138.

39. CAS II.

Digitized by Google

Ch. VIII. §. 139. 139. *Cas II.* Lorſqu'une déterminatrice eſt parallèle à une des deux Bandes extérieures du Triangle analytique, elle eſt ſupérieure quand le Triangle eſt couché ſur cette Bande. Si c'eſt la Bande ſans y, la déterminatrice donne l'équation de la Courbe pour y infinie [§. 96. 4°]. Mais tous les termes de cette équation étant ſur une Bande parallèle à la Bande ſans y, ils contiennent tous une même puiſſance d'y. On peut diviſer l'équation de la déterminatrice par cette puiſſance, & on aura une équation en x & en conſtantes, qui a pour racines une ou pluſieurs valeurs finies d'x. Ainſi des abſciſſes finies ont des ordonnées infinies; & les Branches déſignées par cette déterminatrice s'éloignent infiniment de l'Axe des abſciſſes en reſtant à une diſtance finie de celui des ordonnées. Les ordonnées infinies de ces abſciſſes finies ſont des Aſymptotes de la Courbe, qui jette le long de ces Aſymptotes des Branches hyperboliques. Pl. XII.

Par le même raiſonnement, une déterminatrice parallèle à la Bande ſans x déſigne des Abſciſſes-aſymptotes, dont les ordonnées ſont les racines de l'équation que fournit cette déterminatrice.

Ces racines peuvent être imaginaires, réelles, ou nulles. Une racine imaginaire exprime une Aſymptote imaginaire, qui n'exiſte point, non plus que les Branches infinies que la déterminatrice ſembloit indiquer. Une racine réelle donne la poſition d'une Aſymptote-droite réelle, qui peut pourtant n'avoir que des Branches imaginaires à cauſe des termes ſuivants de la Série. Une racine nulle marque une Aſymptote-droite, qui, paſſant par l'Origine, eſt un des deux Axes. Elle a donc été déja indiquée par une déterminatrice, qui ſans être parallèle aux Bandes extérieures du Triangle n'en coupe qu'une ou paſſe par la Pointe [§. *préc.*].

Pl. XII. *Exemple* 1. On propoſe l'éq : $xyy - ayy - 3axy + 2a^2x = 0$. Quand on l'a placée ſur le Triang : anal : Ch. VIII. §. 139.

on voit qu'elle n'a que deux déterminatrices ſupérieures, toutes deux parallèles aux Bandes du Triangle.

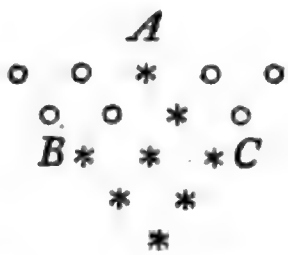
L'une AB, parallèle à la Bande ſans y, indique une Aſymptote-ordonnée. Son équation $xyy - ayy = 0$, diviſée par yy, ſe réduit à $x - a = 0$: ce qui montre que cette Aſymptote eſt l'ordonnée de l'abſciſſe $x = a$. On prendra donc une abſciſſe $AB = a$, & par ſon extrémité B on ménera l'ordonnée indéfinie BC, qui eſt l'Aſymptote indiquée par la déterminatrice AB. Fig. 89.

L'autre AC, qui eſt parallèle à la Bande ſans x, déſigne des Aſymptotes-abſciſſes. Leur poſition ſe détermine par l'éq : $xyy - 3axy + 2a^2x = 0$, que fournit cette déterminatrice. Cette équation a chacun de ſes termes diviſible par x, & cette diviſion la réduit à $yy - 3ay + 2a^2 = 0$, qui a deux racines réelles, $y - a = 0$, & $y - 2a = 0$. Elles marquent chacune une Aſymptote, qui ſont les abſciſſes DE, FG, des ordonnées $AD = a$ & $AF = 2a$.

Exemple 2. On propoſe l'éq : $xxyy - 2bx^2y - bbyy - 2aaxy + bbxx + 2b^3y + 2a^2bx + 2a^4 - b^4 = 0$. Miſe ſur le Tr : anal : elle a deux déterminatrices.

L'une AB, parallèle à la Bande ſans y, indique par ſa poſition des Ordonnées-aſymptotes, & par ſon équation $xxyy - bbyy = 0$, ou, diviſant par yy, $xx - bb = 0$, qui

CH. VIII. qui a deux racines réelles, $x = b$, $x = -b$, on voit que PL. XII.
§. 139. ces Aſymptotes ſont les ordonnées des abſciſſes $AB = b$, Fig. 90.
$AC = -b$.



L'autre déterminatrice AC, étant parallèle à la Bande ſans x, marque des Abſciſſes-aſymptotes. Son équation $xxyy - 2bxxy + bbxx = 0$, diviſée par xx, ſe réduit à $yy - 2by + bb = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine, mais double, $y - b = 0$. Elle fait connoître que l'abſciſſe DE de l'ordonnée $AD = b$, eſt une Aſymptote.

Exemple 3. Si dans cette même équation on change ſeulement en $+$ le ſigne $-$ du terme $bbyy$, l'équation que donne la déterminatrice AB, étant $xxyy + bbyy = 0$, ou $xx + bb = 0$, elle n'a que des racines imaginaires. Ainſi la Courbe perd les Ordonnées-aſymptotes BF, CG, & ne conſerve que l'Abſciſſe-aſymptote DE, donc l'ordonnée eſt $AD = b$. Fig. 91.

140. Ainſi la ſeule inſpection du Triangle analytique, & des déterminatrices parallèles à l'une ou à l'autre des Bandes extérieures, ſuffit pour établir le nombre & la poſition des Aſymptotes abſciſſes ou ordonnées. C'eſt que les ordonnées ou les abſciſſes de ces Aſymptotes ſont données par le prémier terme de la Série deſcendante qui exprime y en x, ou x en y. Mais pour avoir la poſition ou l'eſpèce des Branches hyperboliques de la Courbe autour de ces Aſymptotes, pour s'aſſurer même de leur exiſten-

Digitized by Google

Pl. XII. exiſtence, il faut chercher le ſecond terme de la Série, & , en quelques occaſions, des termes ultérieurs. Si le prémier terme de la Série eſt m ou n [m repréſentera l'abſciſſe d'une Aſymptote-ordonnée, & n l'ordonnée d'une Aſymptote-abſciſſe], on cherchera le ſecond terme de la Série en ſubſtituant $m + z$ à x, ou $n + u$ à y [§. 102] & mettant la transformée ſur le Triang: anal: Or cette transformée eſt préciſément la même qu'on auroit en tranſportant l'Origine ſur l'Aſymptote [§. 25. IV°.], tranſpoſition qui réduit ce Cas-ci au Cas précédent [§. 138], où l'Aſymptote étoit ſuppoſée paſſer par l'Origine. Ainſi cette opération ſe peut enviſager, ou comme le tranſport de l'Origine ſur l'Aſymptote, ou comme la recherche du ſecond terme de la Série. Appliquons-la aux Exemples précédents. Ch. VIII. §. 140.

Exemple 1. On a vû dans l'*Ex.* 1 du §. *préc.* que
Fig. 89. la Courbe repréſentée par l'éq: $xyy - ayy - 3axy + 2a^2x = 0$ avoit trois Aſymptotes, ſç. BC ordonnée de l'abſciſſe $AB = a$, & DE, FG abſciſſes des ordonnées $AD = a$ & $AF = 2a$. Tranſportons ſucceſſivement l'Origine ſur chacune de ces Aſymptotes.

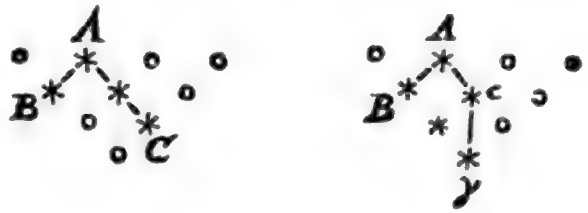
1. Pour la porter d'A en B ſur l'Aſymptote ordonnée BC, on ſubſtituera $a + z$ à x dans l'équation de la Courbe: ce qui la transformera en $zyy - 3aay - 3azy + 2a^3 + 2aaz = 0$. Cette transformée miſe ſur le Triangle analytique a deux déterminatrices Ab, AC.

En les comparant avec les déterminatrices AB, AC de

igitized by Google

CH. VIII. de l'équation propoſée, on voit que dans l'une & dans PL. XII.
§. 140. l'autre, AC a la même poſition, parce que les Abſciſſes-aſymptotes DE, FG qu'elle déſigne, ont la même ſituation par raport à l'Origine, ſoit qu'on la laiſſe en A, ſoit qu'on la porte en B. Mais la déterminatrice AB de la propoſée a tourné ſur le centre A, & a paſſé en Ab dans la transformée, où elle n'eſt plus parallèle à la Bande ſans y, parce que l'Aſymptote BC, qu'elle déſigne, eſt devenuë l'Axe des ordonnées, auquel elle étoit d'abord parallèle. Cette déterminatrice Ab donne pour l'équation de l'Hyperbole-aſymptote, qui eſt auſſi l'Aſymptote-courbe, $zyy - 3aay = 0$, ou $zy = 3aa$, à l'Hyperbole ordinaire poſitive. Donc, les Branches infinies HC, hc de la Courbe, deſquelles CBc eſt l'Aſymptote, s'étendent à l'infini dans les angles bBC, ABc des coordonnées de même ſigne.

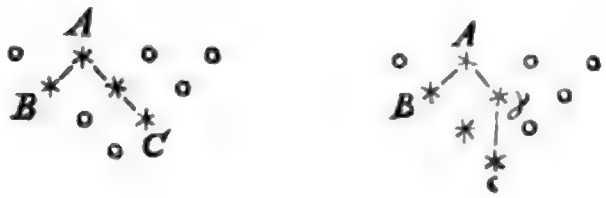
2. On portera l'origine de A en D ſur l'Aſymptote DE en ſubſtituant dans l'équation propoſée $a+u$ à y. Par-là, on la transforme en $xuu - a^3 - 2aau - auu - axu = 0$, qui placée ſur le Triangle analytique a trois



déterminatrices; AB qui eſt la même que AB de la propoſée, & Ac, $c\gamma$, qui ont ſuccédé à AC. AB eſt reſtée en place, parce que le tranſport de l'Origine de A en D n'a pas changé ſa ſituation par raport à l'Aſymptote BC qu'indique la déterminatrice AB. Mais AC eſt devenuë double Ac, $c\gamma$, parce que de deux Aſymptotes-abſciſſes

Pl. XII. qu'elle indiquoit, l'une DE paſſe maintenant par l'Origine D, & eſt l'Axe des abſciſſes, l'autre FG lui eſt parallèle. Celle-ci eſt déſignée par la déterminatrice Ac parallèle à la Bande ſans x : celle-là par la déterminatrice $c\gamma$, qui paſſe par la Pointe, & fournit l'éq : $-axu-a^3=0$, ou $xu=-aa$ à l'Hyperbole ordinaire négative. Ainſi elle marque des Branches infinies IE, ie, qui s'étendent dans les angles ADE, FDe des coordonnées de ſignes contraires. Ch. VIII. §. 140.

3. Enfin l'Origine eſt tranſportée de A en F ſur l'Abſciſſe-aſymptote FG, en ſubſtituant $2a+u$ à y dans la propoſée, ce qui donne la transformée $xuu-4a^3-4a^2u-auu+axu=0$ qu'on mettra ſur le Triangle analytique.



Elle y conſerve la déterminatrice AB qu'avoit la propoſée & qui déſigne l'Ordonnée-aſymptote BC, mais la déterminatrice AC s'eſt briſée en deux $A\gamma$, γc, dont la prémiére, parallèle à la Bande ſans x, marque l'Abſciſſe-aſymptote DE, & dont la ſeconde, paſſant par la Pointe, montre que l'Axe des abſciſſes FG eſt auſſi une Aſymptote. L'équation $-4a^3+axu=0$, ou $xu=4aa$ qu'elle donne, eſt à l'Hyperbole ordinaire poſitive. Ainſi elle indique des Branches KG, kg, qui s'étendent enfin dans les angles GFf, DFg des coordonnées de même ſigne.

En effet, la Courbe repréſentée par l'éq : $xyy-ayy-3axy-2a^2x=0$, a ſix Branches infinies, diſpoſées autour de trois Aſymptotes Cc, Ee, Gg, de la maniére qu'on

CH. VIII. §. 140. qu'on le voit *Fig.* 89, ce dont on peut aiſément s'aſſurer en conſidérant l'équation ſous cette forme $x = \frac{ayy}{yy - 3ay - 2aa}$. PL. XII.

Exemple 2. Dans l'*Ex. II* du §. *préc.* on a vû que la Courbe dont la nature s'exprimoit par l'éq : $xxyy - 2bx^3y - bb\,y - 2aaxy + bbxx + 2b^3y + 2aabx + 2a^4 - b^4 = 0$, avoit trois Aſymptotes, Ff, ordonnée de l'abſciſſe $AB = b$; Gg, ordonnée de l'abſciſſe $AC = -b$; & DE, abſciſſe de l'ordonnée $AD = b$.

1. On tranſportera ſucceſſivement l'Origine de A en B & en C, en ſubſtituant dans la propoſée d'abord $z + b$, enſuite $z - b$, au lieu de x, ce qui s'exécute ainſi par le §. 28. Fig. 90.

L'équation ordonnée par y

$$\begin{array}{l}(xx - bb)yy + (-2bx^3 - 2aax + 2b^3)y + bbxx + 2aabx + 2a^4 - b^4 \\ \quad 2 \quad 0 \quad\quad 3 \quad\quad 1 \quad 0 \quad 3 \quad\quad 1 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 2xzyy + (-4bx - 2aa)zy + (2bbx + 2aab)z \\ \quad \tfrac{1}{2} \quad\quad\quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \quad\quad\quad \tfrac{1}{2} \quad 0 \\ \hline zzyy - 2bzzy + bbzz\end{array}$$

$$x = b$$

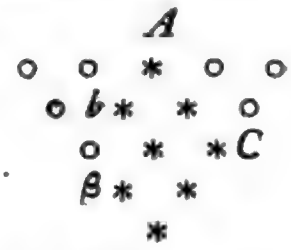
$$\begin{array}{l}* - 2aaby + 2aa(aa + bb) \\ + 2bzyy - (2aa + 4bb)zy + 2b(aa + bb)z \\ + zzyy - 2bzzy + bbzz\end{array}$$

$$x = -b$$

$$\begin{array}{l}* + 2aaby + 2aa(aa - bb) \\ - 2bzyy - (2aa - 4bb)zy + 2b(aa - bb)z \\ + zzyy - 2bzzy + bbzz\end{array}$$

Si on place ces deux transformées ſur le Triangle ana-

Pl. XII. lytique, elles y occupent l'une & l'autre les mêmes Caſes, & ont trois déterminatrices ſupérieures. Ch. VIII. §. 142.



AC, parallèle à la Bande ſans x, eſt la même que la déterminatrice *AC* de la propoſée, & déſigne, comme elle, l'Abſciſſe-aſymptote DE.

Mais *AB* de la propoſée s'eſt doublée, & eſt, dans la transformée *Ab* & *bβ*. La prémiére *Ab*, parallèle à la Bande ſans y, déſigne l'Ordonnée-aſymptote Gg, ſi l'Origine eſt tranſportée en B, ce qui eſt le cas de la prémiére transformée: elle indique l'Ordonnée-aſymptote Ff, l'Origine étant tranſportée en C, ce qui eſt le cas de la ſeconde transformée. La ſeconde déterminatrice *bβ*, qui ſans être parallèle à la Bande ſans y coupe la Bande ſans x, exprime une Aſymptote qui paſſe par l'Origine, c'eſt Ff, l'Origine étant en B; & Gg, l'Origine étant en C. Cette déterminatrice donne, pour la prémiére transformée, l'éq: $-2aaby+2bzyy=0$, & pour la ſeconde $+2aaby-2bzyy=0$, qui toutes deux ſe réduiſent à $zy=aa$, équation d'une Hyperbole ordinaire poſitive. Cela montre que les Branches de l'Hyperbole-aſymptote, & [puiſque dès le prémier terme la Série eſt réguliére] celles de la Courbe HF, hf; IG, ig, s'étendent enfin dans les angles des coordonnées de même ſigne.

2. Il faut préſentement tranſporter l'Origine au point D, où l'Axe des ordonnées coupe l'abſciſſe-aſymptote DE. On ſubſtituera donc $u+b$ à y.

L'équa-

Digitized by Google

Cr. VIII. §. 140. L'équation ordonnée par x PL. XII.

$$(yy-2by+bb)\,xx+(-2aay+2aab)x-bbyy+2b^3y+2a^4-b^4$$

2 1 0 1 0 2 1 0 0

$$+(2y-2b)uxx \quad -2aaux \quad +(-2bby+2b^3)u$$

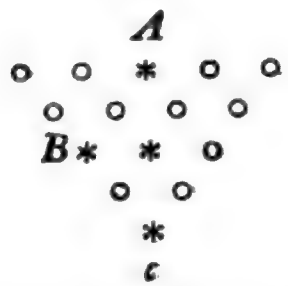
$\frac{1}{2}$ 0 0 $\frac{1}{2}$ 0

$$+uuxx \qquad * \qquad -bbuu$$

$y=b$

$$* \quad * \quad +2a^4$$
$$* \quad -2a^2ux \quad *$$
$$+u^2x^2 \quad * \quad -bbuu$$

La transformée $uuxx-bbuu-2aaux+2a^4=0$, étant miſe ſur le Tr : anal : conſerve la déterminatrice AB



qu'avoit la propoſée, & qui déſigne les Ordonnées-aſymptotes Ff, Gg, qui ont la même poſition par raport à l'Origine D, que par raport à l'Origine A. Mais la déterminatrice AC de la propoſée a changé de ſituation, & a pris dans la transformée la ſituation Ac, où paſſant par la Pointe, elle marque que l'Axe des abſciſſes DE eſt Aſymptote. Mais ſon équation $uuxx-2aaux+2a^4=0$, n'ayant que des racines imaginaires $ux=aa\pm aa\sqrt{-1}$, fait connoitre que cette prétenduë Aſymptote DE n'eſt accompagnée d'aucune Branche infinie de la Courbe.

PL. XII. On peut s'aſſurer de la vérité de ces concluſions, par la conſtruction de cette Courbe. En prenant pour ſon équation la transformée $uuxx - bbuu - 2aaux + 2a^4 = 0$, ce qui porte ſon Origine au point D, & lui donne pour Axes DA, DE; on aura $uuxx - 2aaux + a^4 = bbuu - a^4$, & tirant la racine quarrée $ux - aa = \pm\sqrt{(bbuu - a^4)}$, ou $x = \frac{aa}{u} \pm \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}$. On décrira donc ſur les Axes perpendiculaires l'un à l'autre DA, DE, l'Hyperbole VR*V*, *v*r*v*, déſignée par l'éq : $xu = aa$, ou $x = \frac{aa}{u}$, & on décrira du centre D, avec le raïon DA $= b$, le Cercle EaeA. Puis prenant une ordonnée quelconque DQ $= u$, on tirera l'abſciſſe *M*QM, qui rencontre l'Hyperbole en R, de ſorte qu'on a QR $= \frac{aa}{u}$. Qu'on méne par le point R la droite Tt, parallèle à l'Axe DA, qui rencontre en T & t la circonférence EaeA, on aura donc DS $=$ QR $= \frac{aa}{u}$, & TS $=$ St $= \sqrt{(Dt^2 - DS^2)} = \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}$. Ainſi les abſciſſes QM $[\frac{aa}{u} + \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}]$, & QM $[\frac{aa}{u} - \sqrt{(bb - \frac{a^4}{uu})}]$ ſont égales, l'une à DS + St, l'autre a DS — ST, c'eſt-à-dire, [en menant la Droite DO, qui coupe en deux également l'angle aDE, & donne toûjours SO $=$ DS] QM ſera égale à Ot $=$ DS + St, & Q*M* à — OT $=$ DS — ST. On voit par cette conſtruction, que les ordonnées FEf, Geg des abſciſſes DE $= b$, De $= -b$ ſont Aſymptotes, mais que DE, indiquée comme Aſymptote par l'équation primitive, n'a point de Branches infinies qui

CH. VIII. § 140.

CH. VIII §. 140. qui l'accompagnent : parce que la Série $y = b + \frac{aa}{x}(1 \pm \sqrt{-1})$ &c. qui désigne ces Branches, est imaginaire. PL. XII.

Exemple 3. Le 3e. Ex. du §. *préc.* étoit celui d'une Courbe désignée par l'éq : $xxyy - 2bx^2y + bbyy - 2aaxy + bbxx + 2b^3y + 2aabx + 2a^4 - b^4 = 0$, qui n'avoit qu'une seule Asymptote, sçavoir l'abscisse DE de l'ordonnée $AD = b$. Pour connoître la nature des Branches infinies qui doivent accompagner cette Asymptote, il faut à y substituer $b + u$ dans la proposée. Fig. 91.

L'équation ordonnée par x.

$$(yy - by + bb)xx + (-2a^2y + 2a^2b)x + bbyy + 2b^3y + 2a^4 - b^4$$
$$2 \quad 1 \quad 0 \qquad\qquad 1 \quad 0 \qquad\qquad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$+ (2y - 2b)uxx + (-2a^2)ux + (2bby + 2b^3)u$$
$$\tfrac{1}{2} \quad 0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad \tfrac{1}{2} \quad 0$$

$$+ uuxx \qquad * \qquad + bbuu$$

$y = b$

$$* \quad * \quad + 2b^4 + 2a^4$$
$$* \quad - 2a^2ux + 4b^3u$$
$$+ uuxx \quad * \quad + bbuu$$

Cette transformée $uuxx + bbuu - 2a^2ux + 4b^3u + 2b^4 + 2a^4 = 0$, mise sur le Triangle analytique a deux déterminatrices, mais qui ne donnent, l'une & l'autre, que des racines imaginaires. AB, qui est la même que AB

$$A$$
$$o \quad o \quad * \quad o \quad o$$
$$o \quad o \quad o \quad o$$
$$B \; * \quad * \quad o$$
$$* \quad o$$
$$*$$

Pl. XI. de la propoſée donne, comme elle, $xxuu + bbuu = 0$, ou $xx + bb = 0$, dont les racines ſont $x = \pm\sqrt{-bb}$. Et Ac, qui a ſuccedé à AC, donne $uuxx - 2a^2ux + 2b^4 + 2a^4 = 0$, dont les racines $ux = aa \pm \sqrt{(-2b^4 - a^4)}$ ſont auſſi imaginaires. Ch. VIII. §. 140.

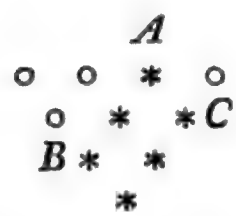
Ainſi cette Courbe n'a point d'Aſymptotes, à parler exactement. En effet, ſi on réſout ſon équation en regardant x comme l'inconnuë, on trouvera $x = \frac{aa \pm b\sqrt{(-uu - 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}}{-u}$. Ces deux valeurs d'$x$ ſont imaginaires, lors qu'on prend u poſitive : car alors, tout ce qui eſt ſous le ſigne radical eſt négatif, [nous ſuppoſons b poſitive]. Mais ſi on prend u négative, le terme $-4bu$ ſe change en $+4bu$; les valeurs d'x peuvent être réelles, & l'éq : $x = \frac{aa \pm b\sqrt{(-uu + 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}}{-u}$ ſe conſtruira de cette maniére. Ayant décrit ſur les Axes perpendiculaires DA, DE, & dans l'angle des coordonnées négatives, la demi-Hyperbole Oo, dont l'équation, en nommant AQ, $-u$, & QO, $-z$, eſt $uz = aa$; prenez $DA = -b = AC$: élevez au point A la perpendiculaire AB, & décrivez du centre C, avec un raïon $CF = \sqrt{(2bb - \frac{a^4}{bb})}$ le demi-cercle FHhf. Puis menant du point D une Droite quelconque DH, qui coupe en b la Droite AB, & en h, H la demi-circonférence, abaiſſez des points h, H les perpendiculaires hq, HQ, prolongées indéfiniment. Des points o, O, où elles rencontrent l'Hyperbole, vous prendrez ſur ces perpendiculaires les parties o m, o m, OM, O M égales à Ab, & les points m, m, M, M ſeront à la Courbe propoſée. Car, ſi on nomme DQ, u,

CH. VIII. §. 140. DQ, u, on aura $QO = -\frac{aa}{u}$, & $QH = \sqrt{fQ.QF} =$ PL. XII.
$\sqrt{(DQ - DC + Cf) \times (DC + CF - DQ)} = \sqrt{(u - 2b + \sqrt{(2bb - \frac{a^4}{bb})} \times (2b + \sqrt{(2bb - \frac{a^4}{bb})} - u)} = \sqrt{(-uu + 4bu - 2bb - \frac{a^4}{bb})}$. Donc les triangles ſemblables DQH, DAb, donnant DQ$[u]$: QH $[\sqrt{(-uu+4bu-2bb-\frac{a^4}{bb})}]$ $=$ DA $[b]$: Ab, ou OM, OM $[\frac{b\sqrt{(-uu+4bu-2bb-\frac{a^4}{bb})}}{u}]$; on aura x [$=$ QM ou QM $=$ QO $\pm$ OM $= -\frac{aa}{u} \pm \frac{b\sqrt{(-uu+4bu-2bb-\frac{a^4}{bb})}}{u}$; ce qui multipliant par u, tranſpoſant, quarrant, & tranſpoſant derechef, donne l'éq : $xxuu + 2aaxu + a^4 + bbuu - 4b^3u + 2b^4 + a^4 = 0$, dans laquelle changeant $+u$ en $-u$, parce que AQ $[u]$, que nous avons traitée comme poſitive, eſt réellement négative, on retrouve préciſément l'équation propoſée à conſtruire.

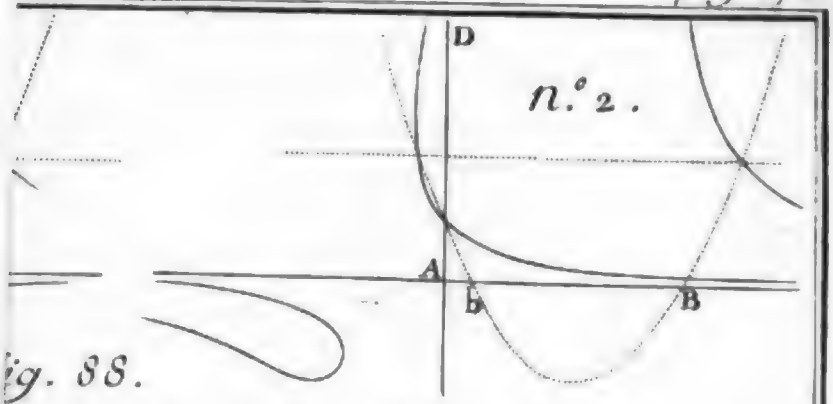
141. Il n'eſt pas inutile de remarquer que le Calcul néceſſaire pour porter l'Origine ſur l'Aſymptote droite, ou pour avoir le ſecond terme de la Série deſcendante, s'abrégera ſi l'on remarque les Caſes par leſquelles doit paſſer la déterminatrice : car il ſuffit de calculer les termes qui rempliſſent ces Caſes-là, & on peut s'éviter la peine de chercher les autres. Or ces termes ſe trouvent aiſément quand on employe la maniére indiquée au §. 28, & dont

Pl. XIII. nous avons fait uſage dans les *Ex.* 2 & 3, du §. *préc.* Ch. VIII. §. 141. Quand on ſubſtituë, par ex. $n+u$ pour y, l'équation étant ordonnée par x; la prémiére ligne donne les termes qui rempliſſent les Caſes x^v, x^{v-1} *&c.* juſqu'à x^0, c'eſt-à-dire la Bande des puiſſances d'x. La ſeconde ligne donne les termes ux^v, ux^{v-1}, *&c*, ou la Bande u. De même la troiſiéme ligne donne la Bande uu, & ainſi de ſuite. Puis donc qu'on cherche une déterminatrice ſupérieure, il ſuffira de calculer les termes qui ſont les plus hauts dans chaque Bande, ou même ſeulement dans quelques-unes. Cela ſe pratique aiſément en faiſant la ſubſtitution. A meſure qu'on calcule chaque terme dans chaque ligne, on écrit un zéro, ou une étoile pour chaque terme qui ſe trouve nul, & on ceſſe de calculer dans une ligne, auſſitôt qu'on parvient à un terme de cette ligne qui a quelque valeur. Mais cet abrégé ſe comprendra bien mieux en l'appliquant à quelque Exemple.

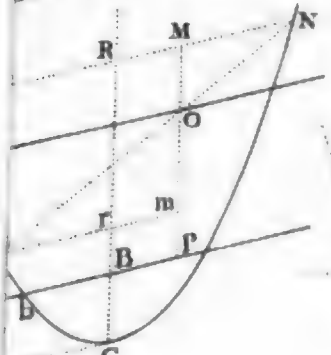
Exemple 1. Soit propoſée l'éq: $x^2y + axy - 2axx - 2aay - 2aax + a^3 = 0$, qui miſe ſur le Tr: anal: a deux déterminatrices parallèles aux Bandes extérieures du Triangle.



L'une AC parallèle à la Bande ſans x donne l'équation $x^2y - 2ax^2 = 0$ ou $y = 2a$, qui marque que l'abſciſſe de l'ordonnée $2a$ eſt Aſymptote. Pour avoir l'équation de l'Hyperbole-Aſymptote, il faut ſubſtituer $u+2a$ à y. On ordonnera donc l'équation par x, & ſubſtituant $2a$ à y dans



ig. 88.



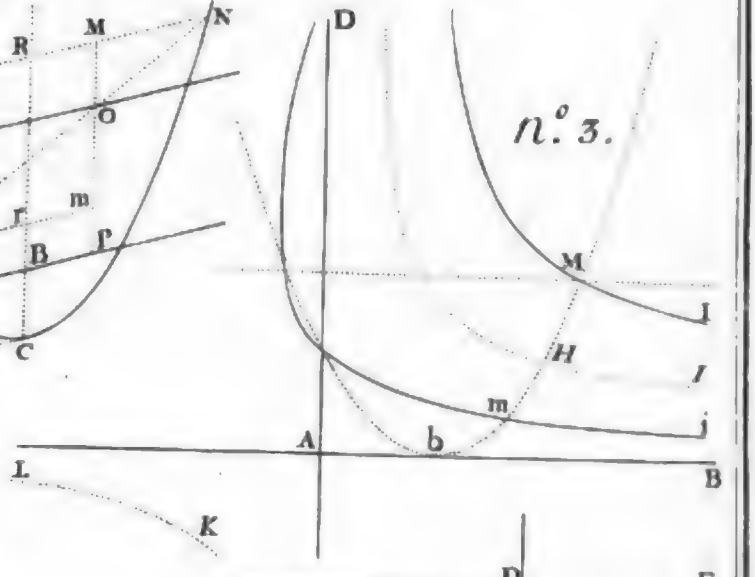
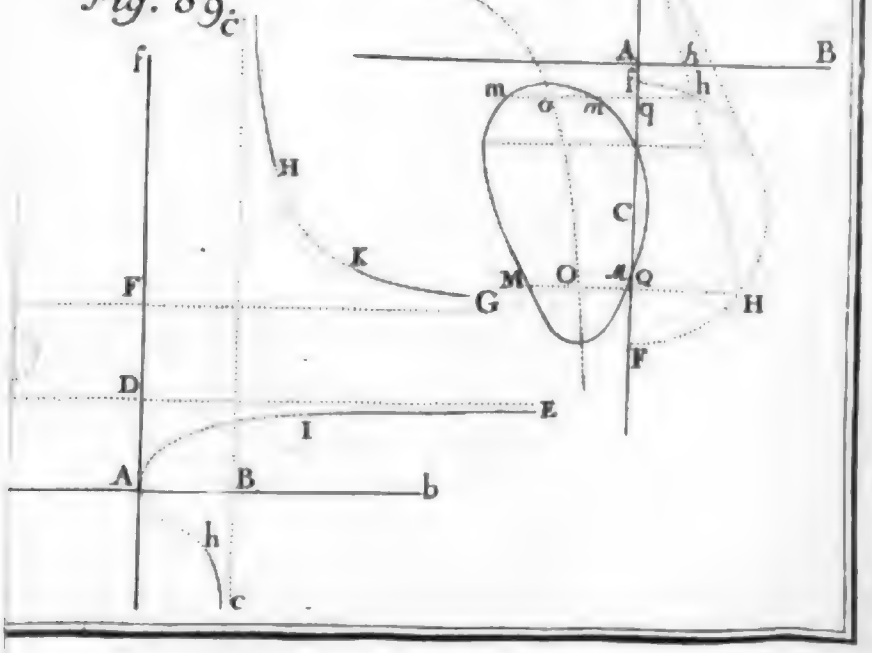


Fig. 91.

Fig. 89.



Ch VIII. §. 141. dans les termes ſucceſſifs, on verra évanouïr les deux prémiers; ce qu'on marquera à côté par des zéro. Mais le troiſiéme $-2aay+a^3$ ſe change en $-3a^3$, qu'on mettra auſſi à côté. Puis on viendra au calcul de la ſeconde ligne, & comme le premier terme $(y-2a)xx$ y produit uxx qui n'eſt pas zéro; on le mettra à côté, & le Calcul eſt achevé. Pl. XIII.

L'équation ordonnée par x $\quad y=2a$

$(y-2a)xx+(ay-2aa)x-2aay+a^3 \quad 0 \quad 0 \quad -3a^3$

$1 \quad 0$

$(1)uxx \quad +uxx$

Car la déterminatrice ſupérieure de la transformée donnera l'éq: $uxx-3a^3=0$, paſſant néceſſairement par la Caſe uxx & par la Pointe, puiſque celle-là eſt la plus haute Caſe de la ſeconde colomne, & celle-ci de la prémiére, en couchant le Triangle ſur la Bande ſans x. Le calcul a montré que les Caſes x & xx ſont vuides.

o
* o
● ● o
● ● ● *

L'autre déterminatrice AB de la propoſée eſt parallèle à la Bande ſans y, & donne l'éq: $x^2y+axy-2aay=0$, ou $x^2+ax-2aa=0$, qui a deux racines $x=a$, ou $x=-2a$. Elles déſignent les abſciſſes a & $-2a$ de deux Ordonnées-aſymptotes. Pour avoir l'équation des Hyperboles-aſymptotes, il faut ſubſtituer $z+a$, & $z-2a$ à x dans l'équation propoſée. On l'ordonnera donc par y, & elle n'a que deux termes. Le prémier s'évanouit, ſoit qu'on ſubſtituë a, ou $-2a$, à x, puiſque a & $-2a$

Pl. XIII. ſont les racines de l'équation faite en égalant ce terme à zéro. Mais l'une & l'autre ſubſtitution réduit le ſecond terme à $-3a^3$. Il eſt inutile de chercher ce que produiroit ce ſecond terme dans la ſeconde ligne, puiſqu'il a une valeur dans la prémiére. Mais on calculera ce que donne le prémier terme, & on trouvera $(2x+a)zy$, que $x=a$ réduit à $+3azy$, & que $x=-2a$ réduit à $-3azy$. On s'arrêtera donc là, puiſque la déterminatrice doit paſſer par la Pointe, & par la Caſe zy, & on a pour la prémiére transformée $+3azy-3a^3=0$, ou $zy=aa$; & pour la ſeconde $-3azy-3a^3=0$, ou $zy=-aa$. Ch. VIII. §. 141.

L'équation ordonnée par y.

$$(xx+ax-2a^2)\,y-2ax^2-2a^2x+a^3=0$$

2 1 0

$+(2x+a)zy$

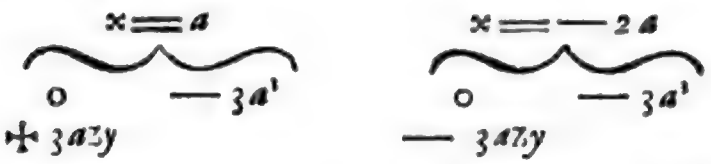


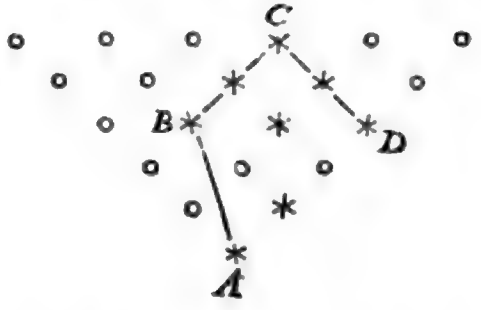
Fig. 92. Ainſi la Courbe a trois Aſymptotes; 1°. l'abſciſſe CBc de l'ordonnée $AB=2a$, qui eſt accompagnée de deux Branches infinies DC, dc dans les angles des ordonnées poſitives; elles ſont indiquées par l'éq: $xxx=3a^3$ de leur Hyperbole-aſymptote: 2°. l'ordonnée FEf de l'abſciſſe $AE=a$, ſuivie des Branches infinies GF, gf, qui ſe jettent dans les angles des coordonnées de même ſigne, comme le montre l'éq: $zy=aa$ de l'Hyperbole-aſymptote; & 3° enfin l'ordonnée IHi de l'abſciſſe $AH=-2a$, dont les Branches infinies LI, li s'étendent dans les angles des coordonnées de ſignes contraires, parce que l'éq: $zy=-aa$ de leur Aſymptote-courbe eſt à une Hyperbole

CH. VIII. §. 142. bole ordinaire négative. Et cela convient entiérement avec ce qu'on peut déduire directement de l'équation propoſée, préſentée ſous cette forme $y = \frac{2axx + 2aax - a^3}{xx + ax - 2aa}$ PL XIII.

$= 2a \frac{xx + ax - \frac{1}{2}aa}{(x-a)(x+2a)}$.

Exemple 2. On propoſe cette éq : $x^3y^2 - (a+b)x^2y^2 - 2cx^3y + abxy^2 + 2bcx^2y + c^2x^3 - a^2d^2x + a^3ff = 0$.

Placée ſur le Triang : analyt : elle a trois déterminatrices ſupérieures, dont l'une AB partant de la Pointe, &



laiſſant toutes les étoiles du côté de la Bande ſans y fait voir que l'Axe des ordonnées eſt une Aſymptote accompagnée de deux Branches hyperboliques qui ſe jettent dans les angles des abſciſſes négatives ; leur Aſymptote courbe étant l'Hyperbole qu'exprime l'éq : $+abxy^2 + a^3ff = 0$, ou $xy^2 = -\frac{aaff}{b}$.

Mais il s'agit principalement ici des deux autres déterminatrices, qui ſont parallèles aux Bandes. La prémiére BC parallèle à la Bande ſans y, donne l'éq : $yy(x^3 - (a+b)xx + abx) = 0$, qui, [ſans compter la racine $x = 0$ qui marque pour Aſymptote l'Axe des ordonnées,

PL. XII. déjà indiqué par la déterminatrice AB] a ces deux racines $x = a$, $x = b$. La ſeconde CD, parallèle à la Bande ſans x, donne l'éq : $x^3 (yy - 2cy + cc) = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine, mais double, $y = c$. Il y a donc deux Ordonnées-aſymptotes, dont les abſciſſes ſont a & b, & une Abſciſſe-aſymptote, dont l'ordonnée eſt c. Pour avoir les Aſymptotes-courbes, on doit ſubſtituer d'abord $z + a$, puis $z + b$, à x, & enfin $u + c$ à y. CH. VIII. §. 141.

Les deux prémiéres ſubſtitutions demandent qu'on ordonne l'équation par y. Sous cette forme elle a trois termes, dont le prémier s'évanouït par la ſubſtitution de a & par celle de b à x, puiſque a & b ſont les racines de l'équation qui égale ce terme à zéro. Le ſecond terme, par la ſubſtitution de a, eſt réduit à $-2aac(a-b)y$, & par la ſubſtitution de b il devient zéro. Il n'eſt donc pas néceſſaire de ſavoir ce que la ſubſtitution de a fait du troiſiéme, mais la ſubſtitution de b le change en $b^3c^2 - a^2bd^2 + a^3ff$. On marquera à côté ces grandeurs nulles ou réelles, & on paſſera à la ſeconde ligne. Par l'opération qui tire cette ſeconde ligne de la prémiére, ſon prémier terme eſt $(3xx - 2(a+b)x + ab)zyy$, que la ſubſtitution de a réduit à $a(a-b)zy^2$, & celle de b à $b(a-b)zy^2$. Il n'eſt donc pas néceſſaire de pouſſer plus loin le Calcul, car dans la prémiére transformée, la déterminatrice porte ſur les Caſes zy^2 & y, & dans la ſeconde ſur la Caſe zy^2 & ſur la Pointe.

L'équation ordonnée par y

$$(x^3 - (a+b)x^2 + abx)yy + (-2cx^2 + 2bcxx)y + c^2x^3 - a^2d^2x + a^3f^2$$

$$+ (3x^2 - 2(a+b)x + ab)zyy \quad \&c$$

$x = a$: $0 \quad -2a^2c(a-b)y + a(a-b)zyy,$

$x = b$: $0.\ 0, +b^3c^2 - a^2bd^2 + a^3f^2 + b(a-b)zy^2$

Il

CH. VIII. §. 141. Il réſulte que l'Aſymptote-courbe de l'Aſymptote-ordonnée de l'abſciſſe a, a pour ſon éq : $a(a-b)zyy - 2a^2c(a-b)y = 0$, ou $zy = 2ac$, laquelle marque que les Branches infinies s'étendent enfin dans les angles des coordonnées de mêmes ſignes. Et que l'Aſymptote-courbe de l'Aſymptote ordonnée de l'abſciſſe b, eſt l'Hyperbole repréſentée par l'équat : $b(a-b)zy^2 + b^2c^2 - a^2bd^2 + a^3ff = 0$, ou $zyy = \frac{a^2bd^2 - b^2c^2 - a^3ff}{b(a-b)}$. Ainſi, ſelon que cette fraction eſt poſitive ou négative, les Branches, qui accompagnent cette Aſymptote, ſe jettent ou dans les angles des abſciſſes poſitives, ou dans ceux des négatives. PL. XIII.

Pour faire maintenant la ſubſtitution de $u + c$ à y, on ordonnera l'équation par x, & alors elle a quatre termes. Le prémier s'évanouït, quand au lieu de y on écrit c, & le ſecond devient $-(a-b)c^2x^2$. C'eſt tout ce qu'il faut ſavoir de la prémiére ligne. Le prémier terme de la ſeconde, qui eſt $(2y - 2c)ux^3$ diſparoît auſſi par la ſubſtitution de c à y. Il faut donc venir au prémier terme de la troiſiéme. C'eſt uux^3, qui ne renferme point d'y. Il n'y a donc point de ſubſtitution à faire dans ce terme, qui, avec le ſecond de la prémiére ligne, donne l'éq : $u^2x^3 - (a-b)c^2x^2 = 0$, ou $u^2x = (a-b)cc$, qui marque que les Branches de l'Hyperbole-aſymptote &, [puiſque cette équation n'a point de racines multiples,] les Branches infinies de la Courbe ſe jettent dans les angles des abſciſſes poſitives, ſi $a > b$, ou dans ceux des abſciſſes négatives, ſi $a < b$.

L'équa-

ed by Google

Pl.XIII. L'équation ordonnée par x Ch.VIII §. 141.

$(yy-2cy+cc)x^3+(-(a+b)yy+2bcy)x^2+(abyy-aadd)x+a^3ff$

2 1 0

$+(2y-2c)ux^3$ &c.

$\frac{1}{2}$ 0

$+(1)u^2x^3$ &c.

$y=c$

$0-(a-b)c^2x^2$, &c.

0 &c.

$+u^2x^3$, &c.

Si a eſt $=b$, le terme x^2 de la prémiére ligne ſera zéro, & il faudra calculer le terme x. Par la ſubſtitution de c à y, il ſe change en $(abcc-aadd)x$, ou $aa(cc-dd)x$, puiſqu'on ſuppoſe $a=b$. Mais ſa déterminatrice qui va de la Caſe uux^3 à la Caſe x, paſſe par la Caſe ux^2. Il faut donc la calculer. Le terme qui la remplit eſt le ſecond de la ſeconde ligne, qu'on trouvera être $-2acux^2$.

L'équation ordonnée par x

$(yy-2cy+cc)x^3+(-2ayy+2acy)x^2+aa(yy-dd)x+a^3ff$

2 1 0 2 1

$+(2y-2c)ux^3+(-4ay+2ac)ux^2$ &c.

$\frac{1}{2}$ 0

$+(1)u^2x^3$ &c.

$y=c$

$0\quad 0+aa(cc-dd)x$ &c.

$0-2acux^2$ &c.

u^2x^3 &c.

L'équation de l'Aſymptote courbe eſt donc $u^2x^3-2acux^2+aa(cc-dd)x=0$, ou $u^2x^2-2acux+aacc-aadd$

CH.VIII §. 141. $-aadd=0$, qui a deux racines $ux=a(c+d)$ & $ux=a(c-d)$. Elles indiquent deux Hyperboles ordinaires, dont la prémiére étend ſes branches dans les angles des coordonnées de même ſigne, & la ſeconde de même, ſi $c>d$; mais celle-ci les étend dans les angles des coordonnées de ſignes contraires, ſi $c<d$. PL.XIII.

Si $c=d$, le coëfficient $aa(cc-dd)$ du terme x eſt zéro. La déterminatrice qui paſſe par les Caſes u^2x^3 & ux^2, donne alors ſimplement l'éq: $u^2x^3-2acux^2=0$, ou $ux=2ac$, qui n'indique que deux Branches infinies, une dans chacun des angles des coordonnées de même ſigne. Mais il part de la Caſe ux^2 une autre déterminatrice ſupérieure qui va à la Caſe de la Pointe a^3ff, & donne l'éq: $-2acux^2+a^3ff=0$, ou $ux^2=\frac{a^2ff}{2c}$, qui indique deux autres Branches infinies dans les angles des coordonnées de même ſigne.

L'équation ordonnée par x.

$$(yy-2cy+cc)x^3+(-2ayy+2acy)x^2+aa(yy-cc)x+a^3ff$$
$$2 \quad 1 \quad 0 \qquad\qquad 2 \quad 1$$

$$+(2y-2c)ux^3+(-4ay+2ac)ux^2 \quad \&c.$$
$$\frac{1}{2} \quad 0$$

$$+(1)u^2x^3 \quad \&c.$$

$y=c$

$0, \quad 0, \quad 0, \quad +a^3ff$
$0, \quad -2acux^2, \&c$
$+u^2x^3, \&c.$

Si c eſt nulle, la Caſe ux^2 ſera vuide, le coëfficient $-2ac$ étant zéro. L'équation de l'Aſymptote-courbe ſera ſimplement $u^2x^2-aadd=0$, qui ſe décompoſant

PL.XIII. en ces deux $ux - ad = 0$, & $ux + ad = 0$, indique deux Branches hyperboliques qui ſe jettent, une dans chacun des quatre angles des coordonnées. CH.VIII. §. 141.

Et ſi c'eſt d qui eſt nulle, l'équation de l'Aſymptote-courbe ſera $uuxx - 2acux + aacc = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine, mais double, $ux - ac = 0$, laquelle indique une Hyperbole qui étend ſes Branches dans les angles oppoſés des coordonnées de même ſigne. Mais cette racine double fait que la Série $y = c + \frac{ac}{x}$ &c. n'eſt pas encore réguliére, & il faut, dans la transformée en u & x, ſubſtituer $\frac{ac}{x}$ à u. Il faut donc avoir cette transformée. Ainſi on achévera le Calcul commencé ci-deſſus.

L'équation ordonnée par x

$$(yy - 2cy + cc)x^2 + (-2ayy + 2acy)x + (aayy)x + a^4ff$$
$$2 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 2 \quad 0$$
$$+ (2y - 2c)ux^{\frac{1}{2}} + (-4ay + 2ac)ux^{\frac{1}{2}} + (2aay)ux^{\frac{1}{2}}$$
$$0 \quad 0 \quad 0$$
$$+ (1)u^2x^3 - 2au^2x^2 + aau^2x$$

$y = c$

$$0 \quad 0 + aaccx + a^4ff$$
$$0 - 2acux^2 + 2aacux, \quad 0$$
$$u^2x^3 - 2au^2x^2 + aau^2x, \quad 0$$

Dans cette transformée $u^2x^3 - 2au^2x^2 + aau^2x - 2acux^2 + 2aacux + aaccx + a^4ff = 0$, qui a trois ordres de termes, il faut ſubſtituer $\frac{ac}{x} + t$ à u. On peut faire cette ſubſtitution ſucceſſivement dans les trois ordres, s'il eſt néceſ-

CH. VIII. §. 141. néceſſaire : mais il ſuffira de commencer par les deux pré- PL. XIII. miers [§. 106].

I. Ordre IIe. Ordre III. Ord.

$$ttx^3 - 2actx^2 + aacx - 2attx^2 + 2aactx + a^3ff + aacx$$

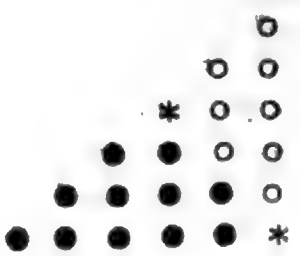
$$\frac{ac}{x}) \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$+ 2actx^2 - 2aacx - 4aactx + 2a^3cc$$

$$\frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad 0$$

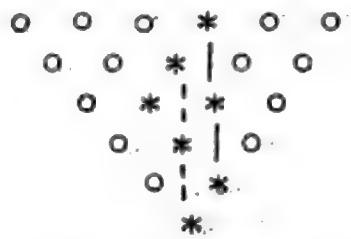
$$+ aacx - 2a^3cc$$

On a donc ttx^3 dans la Caſe de ce nom, o dans la Caſe tx^2 & dans la Caſe x, a^3ff dans la Caſe de la Pointe. Il eſt inutile de s'informer des autres, pleines ou vuides, parce que la déterminatrice paſſe par la Caſe t^2x^3, & par la Pointe.



Elle donne l'éq : $ttx^3 + a^3ff = 0$, ou $t = \pm\sqrt{-a^3ffx^{-3}} = \pm\frac{af}{x}\sqrt{-\frac{a}{x}}$, terme demi-imaginaire. La Série eſt donc $y = c + \frac{ac}{x} \pm \frac{af}{x}\sqrt{-\frac{a}{x}}$, &c. ce qui fait connoître que des deux Branches de l'Hyperbole $ux - ac = 0$, il n'y en a qu'une qui ſerve d'Aſymptote à la Courbe, mais que cette Branche eſt accompagnée de deux Branches infinies.

Pl. XIII. On pouvoit prévoir cette Concluſion par la ſeule inſpection de la transformée $u^2x^3 - 2au^2x^2 + a^2u^2x - 2acux^2 + 2aacux + aacx + a^3ff = 0$, miſe ſur le Triangle analytique. Car la racine double $ux - ac = 0$ de l'équation faite en égalant à zéro les termes $u^2x^3 - 2acux^2$ Ch. VIII. § 141.



$+ aacx$ du prémier ordre, ne diviſe pas la ſomme $-2au^2x^2 + 2aacux + a^3ff$ des termes du ſecond ordre. Donc [§. 113] puiſqu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & ſa parallèle qui paſſe par les termes du ſecond ordre, & que la racine de l'équation fournie par la déterminatrice eſt double, le terme ſuivant de la Série ſera demi-imaginaire. Donc, &c.

142. *Cas III.* Lorſque la déterminatrice ſupérieure coupe inégalement les deux Bandes extérieures du Triangle analytique, elle donne une ou pluſieurs équations de cette forme $y = Ax^b$, ou $x = Ay^b$, l'expoſant b étant un nombre différent de l'unité, [il ſeroit l'unité, ſi la déterminatrice retranchoit des portions égales des deux Bandes extérieures [§. 96. 2°.]]. Donc l'éq: $y = Ax^b$, ou $y^l = ax^k$, car c'eſt ſous cette forme que la donne la déterminatrice, repréſente une Parabole, qui eſt l'Aſymptote des Branches infinies de la Courbe, dont l'ordonnée s'exprime par la Série deſcendante qui a pour ſon premier terme Ax^b.

On

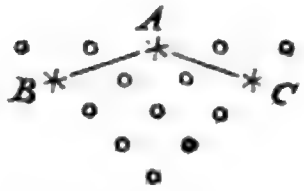
Ch. VIII. § 142. On a déja dit [§. 133] que la derniére direction de cette Parabole eſt l'Axe des ordonnées, quand $b > 1$, & celui des abſciſſes, quand $b < 1$. Or $b > 1$, quand la déterminatrice retranche une plus grande portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x; & $b < 1$, quand la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x [§. 96. 2°]. Ainſi la ſeule poſition de la déterminatrice fait connoître de quel côté tend la derniére direction de la Parabole-aſymptote. Pl. XIII.

Quand une ſeule déterminatrice fournit pluſieurs équations telles que $y = Ax^b$, elles déſignent tout autant de Paraboles-aſymptotes, qui ont la même derniére direction. Et l'on juge par l'expoſant b, & par le coëfficient A du terme Ax^b, dans quels angles s'étendent enfin les Branches de ces Paraboles [§. 128]. Les Branches de la Courbe ſe jettent dans les mêmes angles, ou du moins ne peuvent pas ſe jetter dans d'autres; car il eſt poſſible que les termes ſuivants de la Série rendent ces Branches imaginaires, ou en tout, ou en partie : ce qu'on n'a plus lieu de craindre lorſqu'on eſt parvenu aux termes réguliers.

Au reſte, comme les déterminatrices ſupérieures, qui coupent les deux Bandes extérieures du Triangle, ſont toûjours ſupérieures, ſoit qu'on le couche ſur la Bande ſans x, ou ſur la Bande ſans y; il eſt indifférent de chercher y en x, ou x en y. Mais ſi l'une de ces deux Séries donne l'expoſant b rompu, & que l'autre le donne en nombre entier, le Calcul ſera plus commode ſi l'on préfére ce dernier.

Exemple I. On propoſe l'éq : $xxyy - ay^3 - bx^3 = 0$. Miſe ſur le Tr : anal : elle a deux déterminatrices, qui coupant l'une & l'autre inégalement les Bandes extérieures

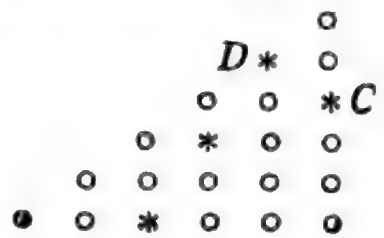
Pl.XIII. rieures indiquent des Branches paraboliques. AB, qui prolongée retranche une plus grande partie de la Bande Ch.VIII. §. 141.



ſans y que de la Bande ſans x, marque une Parabole-aſymptote dont la derniére direction eſt l'Axe des ordonnées : & l'éq: $x^2y^2 - ay^3 = 0$, ou $y = \frac{x^2}{a}$, qu'elle fournit,

Fig. 93. eſt celle d'une Parabole ordinaire CAE, dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées poſitives. La Courbe jettera auſſi des Branches dans les mêmes angles, parce que $y - \frac{x^2}{a} = 0$ n'eſt pas racine multiple de l'éq: $x^2y^2 - ay^3 = 0$ qu'a fourni la déterminatrice.

Cette Parabole-aſymptote CAE eſt auſſi l'Aſymptote curviligne des Branches qui l'accompagnent. Car ſi on cherche le ſecond terme de la Série en ſubſtituant $\frac{xx}{a} + u$ à y dans l'équation propoſée, on la transformera en $-\frac{ux^4}{a} - 2uuxx - au^3 - bx^3 = 0$, qui étant miſe ſur le Tr: anal : couché ſur la Bande ſans x n'a qu'une déterminatri-

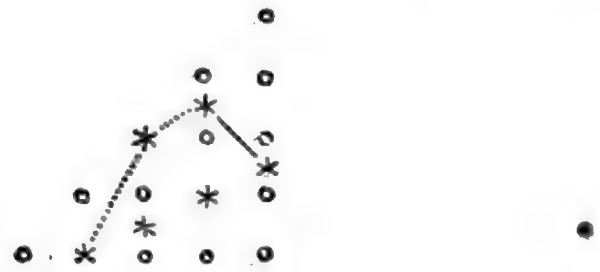


ce

Ch. VIII. §. 142. ce utile DC, qui donne l'éq : $-\frac{ux^4}{a} - bx^3 = 0$, ou $u = -abx^{-1}$. Dès le ſecond terme, la Série $y = \frac{x^2}{a} - \frac{ab}{x}$ &c. a donc un expoſant négatif. Cet expoſant eſt impair, & ce terme eſt précedé du ſigne —. Ainſi l'Aſymptote-courbe eſt la Parabole CAE, & les Branches de la Courbe tombent en-deça de cette Aſymptote du côté des abſciſſes poſitives, & en-delà du côté des négatives [§. 134]. Pl. XIII.

On tireroit préciſément les mêmes choſes par raport aux Branches dont la derniére direction eſt l'Axe des abſciſſes, en réduiſant à $x = \frac{yy}{b}$ l'éq : $xxyy - bx^3 = 0$, que fournit la déterminatrice AC, & continuant la Série $\frac{yy}{b}$ + &c. qui donne x en y. Mais, pour varier le Calcul & nous exercer dans ces réductions, cherchons une ſeconde Série qui donne y en x. Le prémier terme, déduit de l'éq : $xxyy - bx^3 = 0$, eſt $y = \pm\sqrt{bx} = \pm b^{1:2}x^{1:2}$, qui déſigne la Parabole FAG, dont les Branches embraſſent, pour ainſi dire, l'Axe des abſciſſes qui eſt leur derniére direction, & s'étendent dans les angles des abſciſſes poſitives, puiſque x négative rend $\sqrt{bx}$ imaginaire. Cette Parabole-aſymptote eſt auſſi l'Aſymptote-courbe des Branches de la Courbe, qui ont cette derniére direction. Car en ſubſtituant $\pm\sqrt{bx} + u$ à y, on transforme l'équation en $\pm 2ux\sqrt{bx} + uux = abx\sqrt{bx} \mp 3abux \mp 3auu\sqrt{bx} \mp au^3 = 0$, qui étant miſe ſur le Tr : anal : couché ſur la Bande ſans x a trois déterminatrices : mais la ſeule qui ſoit utile & qui donne un expoſant plus petit que $\frac{1}{2}$, c'eſt celle qui traverſant les Cales $ux^{2\frac{1}{2}}$,

Pl. XIII. $ux^{2\frac{1}{2}}$, & $x^{\frac{1}{2}}$, donne l'éq : $\pm 2uxx\sqrt{bx} \mp abx\sqrt{bx} = 0$, Ch. VIII. §. 142.



ou $u = +\frac{1}{2}abx^{-1}$. L'expoſant de ce ſecond terme fait voir, parce qu'il eſt négatif, que la Parabole F A G eſt l'Aſymptote-courbe ; & parce qu'il eſt impair & précedé du ſigne +, que les Branches de la Courbe tombent au-deſſus de l'Aſymptote-courbe. Car le prémier terme de la Série $\pm\sqrt{bx}$ ne permet pas de ſuppoſer x négative.

Ainſi la Courbe a quatre Branches infinies diſpoſées comme on les voit dans la *Fig.* 93, tracée par points ſuivant ce Calcul. Soit $a = 4$, & $b = 1$, ou ſoit $xxyy - 4y^3 - x^3 = 0$ l'équation propoſée, & ſubſtituant yz à x, on la transformera en $y^4zz - 4y^3 - y^3z^3 = 0$, ou, diviſant par y^3, en $yzz - 4 - z^3 = 0$, ſoit $y = \frac{4}{zz} + z$.

Donc $x\,[= yz] = \frac{4}{z} + zz$. Ainſi ſuppoſant

$z = inf.,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\frac{1}{2},\ \sqrt[3]{2},\ 1,\ \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -\sqrt[3]{4},\ -2,\ -3$, &c.

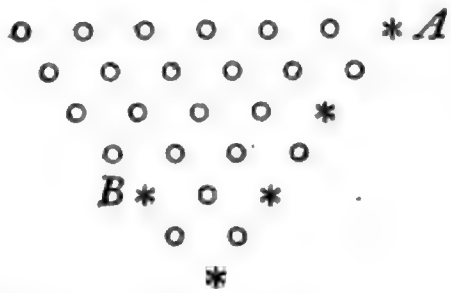
on aura $x = inf.,\ 17,\ 10\frac{1}{3},\ 6,\ 4\frac{11}{12},\ 2\sqrt[3]{4},\ 5,\ 8\frac{1}{4},\ inf. \quad -7\frac{3}{4},\ -3,\ 0,\ 2,\ 7\frac{2}{3}$, &c.

& $y = inf.,\ 4\frac{1}{4},\ 3\frac{4}{9},\ 3,\ 3\frac{3}{16},\ 2\sqrt[3]{2},\ 5,\ 16\frac{1}{2},\ inf. \quad 15\frac{1}{3},\ 3,\ 0,\ -1,\ -2\frac{2}{3}$, &c.

Où l'on voit que les valeurs poſitives de z, donnant des x & des y poſitives, déterminent les points des Branches E I H F, qui ſont dans l'angle des coordonnées poſitives :

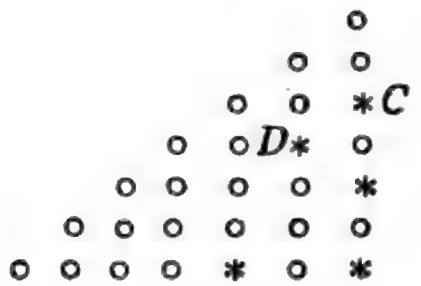
CH. VIII. §. 142. tives : qu'en particulier, celles qui ſont priſes entre l'infini & 2 donnent les points de la Branche FH dès l'infini juſqu'au point H, qui eſt le plus près de l'Axe AB des abſciſſes : que celles qui ſont priſes entre 2 & $\sqrt[3]{2}$ donnent les points de l'arc HI compris entre le point H & le point I le plus proche de l'Axe AD des ordonnées ; & que celles qui ſont priſes entre 2 & o, donnent les points de la Branche IE dès le point I à l'infini. Que les valeurs négatives de z, donnant x ou y négative, déterminent les points des Branches CA & AG, ſçavoir ceux de la Branche CA, quand les valeurs de z ſont priſes entre o & $-\sqrt[3]{4}$, parce que dans cet intervalle elles donnent x négative & y poſitive ; & ceux de la Branche AG, quand ces valeurs ſont priſes dès $-\sqrt[3]{4}$ à l'infini négatif, parce qu'alors elles donnent x poſitive & y négative. PL. XIII.

Exemple II. Soit propoſée l'éq : $x^6 - 3a^2x^4 - a^4y^2 + 3a^4x^2 - a^6 = o$. Quand on la place ſur le Tr : anal : on ne lui trouve qu'une ſeule déterminatrice ſupérieure *AB*, qui, coupant inégalement les deux Bandes extérieures, indique des Branches paraboliques dont la derniére direction eſt l'Axe des ordonnées, puiſque la portion qu'elle retranche de la Bande ſans y eſt plus grande que la portion qu'elle retranche de la Bande ſans x.



Pl.XIII. Cette déterminatrice donne l'éq : $x^6 - a^4yy = 0$, ou $y = \pm \frac{x^3}{aa}$ pour celle de la Parabole-aſymptote, qui eſt le Syſtême de deux Paraboles cubiques égales, l'une poſitive, l'autre négative, leſquelles étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées. Ch.VIII. §. 142.

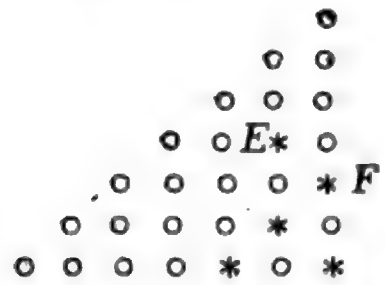
Les deux racines de l'éq : $x^6 - a^4yy = 0$ étant racines ſimples, les quatre Branches des Paraboles-aſymptotes ſeront infailliblement ſuivies d'autant de Branches de la Courbe. Mais ſi l'on veut avoir l'Aſymptote-curviligne, il faut calculer encore un terme de la Série, en ſubſtituant $\pm \frac{x^3}{aa} + u$ à y dans la propoſée, ce qui la transforme en $- 3aax^4 \mp 2aax^3u - a^4uu + 3a^4xx - a^6 = 0$. Celle-ci, étant miſe ſur le Tr : anal : couché ſur la Bande ſans x, a une déterminatrice utile CD, qui donne l'équation



$- 3aax^4 \mp 2aax^3u = 0$, ou $u = \mp \frac{1}{2}x$, où l'expoſant d'x eſt encore poſitif. Il faut joindre ce terme au prémier, & les éq : $y = + \frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x$, $y = - \frac{x^3}{aa} + \frac{1}{2}x$ ſont celles des Aſymptotes curvilignes, à moins que dans le terme ſuivant, x n'ait encore un expoſant poſitif, ou zéro. On cherchera donc ce troiſiéme terme, d'autant mieux que ſon ſigne & ſon expoſant marquent de quel côté des Aſymptotes tombent les Branches de la Courbe. Pour cet effet,

Digitized by Google

CH. VIII. effet, on ſubſtituera $\mp\frac{1}{2}x + t$ à α dans la derniére équa- PL. XIII.
§. 142. tion, & on mettra la transformée $\mp 2aatx^3 \pm 3a^4tx - a^4tt + \frac{1}{4}a^4xx - a^6 = 0$ ſur le Tr: anal: Sa déterminatrice EF donne $\mp 2aatx^3 + \frac{1}{4}a^4xx = 0$, ſoit $t = \pm\frac{1}{8}acx^{-1}$, où l'expoſant d'$x$ eſt négatif.



La Courbe a donc quatre Branches infinies, dont la poſition à l'infini eſt déterminée par celles des Aſymptotes-curvilignes, que repréſentent les éq: $v = +\frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x$, $v = -\frac{x^3}{aa} + \frac{1}{2}x$, & qui ſe conſtruiſent ainſi. Pour la prémiére on décrira ſur les Axes AB, AC une Parabole-cubique ADN, dont les abſciſſes [AP] x portent les ordonnées [PN] $\frac{x^3}{aa}$; & on ménera par l'Origine A la Droite AF tellement inclinée à l'Axe AB, que les abſciſſes AP ſoient les deux tiers des ordonnées PQ. Enſuite de chaque ordonnée PN [$\frac{x^3}{aa}$] de la Parabole on retranchera NM égale à PQ [$\frac{1}{2}x$], & la Courbe mbABM qui paſſe par tous les Points M eſt celle que déſigne l'éq: $v = \frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x$. Fig. 94.

Cette Courbe eſt elle-même une Parabole cubique, dont les abſciſſes z [AQ] ſont priſes ſur la Droite AF &

Pl. XIII. dont les ordonnées u ſont QM. Car puiſque $AP = x$, & $PQ = \frac{1}{2}x$, AQ [z], qui eſt $= \sqrt{(AP^2 + PQ^2)}$ [on ſuppoſe l'angle APQ droit; mais quel qu'il ſoit, la raiſon de AQ à AP eſt donnée, & cela revient au même,] AQ, dis-je, ſera $x\sqrt{(1+\frac{3}{4})} = \frac{1}{2}x\sqrt{13}$, & $QM\,[u] = QP + PM = PN = \frac{x^3}{aa}$. Donc $z = \frac{1}{2}x\sqrt{13}$, ou $x = \frac{2z}{\sqrt{13}}$, & $u = \frac{x^3}{aa} = \frac{8}{13\sqrt{13}} \times \frac{z^3}{aa}$. Or cette éq: $u = \frac{8}{13\sqrt{13}} \times \frac{z^3}{aa}$ eſt celle d'une Parabole cubique [§. 126]. Ch. VIII. §. 141.

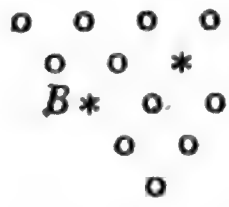
Ayant ainſi décrit la prémiére Parabole-aſymptote Fig. 95. e b A B E, on décrira de méme la ſeconde $e\,b\,A\,B\,E$ dont l'éq: $v = -\frac{x^3}{aa} + \frac{1}{2}x$, ayant des ſignes contraires à ceux de la prémiére, marque une ſituation oppoſée. Ainſi ces deux Paraboles ſe croiſent non-ſeulement à l'Origine A, mais auſſi aux points B, b, pris ſur l'Axe des abſciſſes à une diſtance $AB = Ab = a\sqrt{\frac{3}{2}}$ de l'Origine A. Car ſi l'on fait $v = 0$, l'équation de la prémiére Parabole donne $\frac{x^3}{aa} - \frac{3}{2}x = 0$, & celle de la ſeconde $-\frac{x^3}{aa} + \frac{3}{2}x = 0$; équations, qui ne ſont au fond que la même, & qui ont trois racines $x = 0$, $x = +a\sqrt{\frac{3}{2}} = AB$, $x = -a\sqrt{\frac{3}{2}} = A\,b$.

Ces deux Paraboles cubiques e b A B E, $e\,b\,A\,B\,E$ ſont les Aſymptotes curvilignes de la Courbe propoſée. Elle rencontre l'Axe des abſciſſes en deux points G, g, extrémité des abſciſſes $AG = +a$, $Ag = -a$. Car faiſant $y = 0$, l'équation propoſée ſe réduit à $x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6 = 0$, ou $(xx - aa)^3 = 0$, qui a deux racines réelles $x = a$, $x = -a$. De chacun de ces deux points G, g, partent deux Branches paraboliques GH, $G\,H$; g h, $g\,b$, qui s'aprochent toûjours plus des Paraboles

CH. VIII. §. 142. les BE, BE, be, be, que nous leur avons assignées pour Asymptotes. Car l'ordonnée PH [y] de la Courbe est égale à $\frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x + \frac{3aa}{8x}$ &c. & l'ordonnée PM [v] de la Parabole est égale à $\frac{x^3}{aa} - \frac{1}{2}x$. Donc PH surpasse PM d'une quantité [HM] $\frac{3aa}{8x}$ &c. qui diminuë à mesure que x augmente, & s'anéantit quand x est infinie. Les Branches GH, BM de la Courbe & de la Parabole vont donc toûjours en s'aprochant, & coïncident enfin. PL. XIII.

Cela s'ajuste très-bien avec ce que nous montre la résolution de l'équation proposée. Elle se réduit à $yy = \frac{x^6 - 3aax^4 + 3a^4xx - a^6}{aa} = \frac{(xx-aa)^3}{aa} = \frac{(x+a)^3 \times (x-a)^3}{aa}$, ou $y = \frac{\sqrt{((x+a)^3 \times (x-a)^3)}}{a}$. Si on prend x positive & moindre que a, la somme $x+a$ sera positive, & la différence $x-a$ négative, & il en sera de même de leurs cubes $(x+a)^3$, $(x-a)^3$. Donc leur produit sera négatif, & sa racine quarrée imaginaire. Ainsi les abscisses plus petites que a [AG] n'ont que des ordonnées imaginaires. Si on prend $x = a$, on a $y = 0$, ce qui marque que la Courbe rencontre l'Axe des abscisses au point G. Mais quand $x > a$, $x+a$ & $x-a$ sont positives, & y est réelle & augmente à mesure que x augmente. Donc, dès le point G, les ordonnées, tant positives PH, que négatives PH, vont en croissant: ce qui forme les deux Branches infinies GH, GH. Et puisque la substitution de $-x$ à $+x$ ne change rien à l'équation de la Courbe, qui ne renferme que des puissances paires de x; il y aura aussi du côté des abscisses négatives deux Branches infinies gh, gh égales & semblables à GH, GH.

PL.XIII. *Exemple III.* 1. On propoſe l'éq : $aayy - 2ax^3y - 3x^4 - bx^3 = 0$. Sur le Tr : anal : elle n'a qu'une déterminatrice ſupérieure AB, dont la poſition indique des Branches paraboliques avec une derniére direction pa- CH.VIII. §. 142.

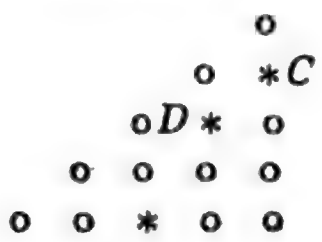


ralléle à l'Axe des ordonnées. L'équation $aayy - 2axxy - 3x^4 = 0$, qu'elle donne, a deux racines $ay - 3xx = 0$, & $ay + xx = 0$, ſoit $y = \frac{3xx}{a}$, & $y = -\frac{xx}{a}$; qui déſignent deux Paraboles ordinaires, l'une poſitive dont les Branches s'étendent dans les angles des ordonnées poſitives, l'autre négative qui jette ſes Branches dans les angles des ordonnées négatives. Ce ſont là les Paraboles-aſymptotes, & puiſque l'équation qu'a fourni la déterminatrice n'a point de racines multiples, il eſt ſûr que la Courbe jette auſſi quatre Branches paraboliques, une dans chacun des quatre angles des coordonnées.

Mais pour avoir les Aſymptotes-courbes de ces Branches, on cherchera le ſecond terme de ces deux Séries en ſubſtituant $Axx + u$ à y. Cela transforme l'équation propoſée en $aauu + (2aaA - 2a)uxx + (aaAA - 2aA - 3)x^4 - bx^3 = 0$. Le terme $(aaAA - 2aA - 3)x^4$ s'évanouït, ſoit qu'on écrive $+\frac{3}{a}$ au lieu d'A pour la prémiére transformée, ſoit qu'on écrive $-\frac{1}{a}$ pour la ſeconde. Ainſi, pour l'une & l'autre, la transformée ſera

$aauu +$

CH. VIII. §. 142. $aauu + (2aaA - 2a)uxx - bx^3 = 0$. Quand elle eſt miſe ſur le Triang: anal: couché ſur la Bande ſans x, ſa déterminatrice utile CD donne l'éq: $(2aaA - 2a)uxx - bx^3 = 0$, ou $u = \frac{bx}{2aaA - 2a}$, c'eſt-à-dire $u = + \frac{bx}{4a}$ PL. XIII.

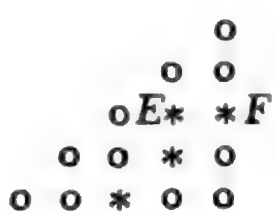


pour la prémiére Série, & $u = -\frac{bx}{4a}$ pour la ſeconde.

Comme dans ce ſecond terme l'expoſant x n'eſt pas encore négatif, il faudra chercher le troiſiéme, en ſubſtituant $Bx + t$ à u, dans la prémiére transformée $aauu + (2aaA - 2a)uxx - bx^3 = 0$, ce qui la changera en $aaBBxx + 2aaBtx + aatt + (2aaA - 2a)txx + (2aaAB - 2aB - b)x^3 = 0$. Ce dernier terme doit manquer, puiſque la Caſe x^3 à laquelle ſe terminoit la déterminatrice doit reſter vuide [§. 107], & on trouvera en effet qu'il eſt nul, ſoit qu'on ſubſtituë $+\frac{3}{a}$ à A & $+\frac{b}{4a}$ à B, ce qui eſt leur valeur dans la prémiére Série; ſoit qu'on écrive $-\frac{1}{a}$ pour A & $-\frac{b}{4a}$ pour B, ce qui apartient à la ſeconde Série. Mettant donc la ſeconde transformée $aaBBxx + 2aaBtx + aatt + (2aaA - 2a)txx = 0$ ſur le Tr: anal: ſa déterminatrice utile EF donnera $aaBBxx + (2aaA - 2a)txx = 0$, ou $t = -\frac{aaBB}{2aaA - 2a}$; c'eſt-

à-dire

PL.XIII. à-dire $t = -\frac{bb}{64a}$ pour la prémiére Série ; & $t = +\frac{bb}{64a}$ pour la ſeconde. CH.VIII. §. 142.



Ainſi les équations des Aſymptotes-courbes ſont $v = \frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$ & $v = -\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$; car le terme ſuivant ne peut avoir qu'un expoſant négatif. Il eſt pourtant bon de le calculer pour connoître la poſition des Branches de la Courbe autour de leurs Aſymptotes. Pour cet effet on ſubſtituera dans la derniére équation $C + s$ au lieu de t [C vaut $-\frac{bb}{64a}$, pour la prémiére Série, & $+\frac{bb}{64a}$ pour la ſeconde] ; ce qui la transformera en $(aaBB + 2aaAC - 2aC)xx + 2aaBCx + 2aaBsx + aaCC + 2a^2Cs + aass + (2aaA - 2a)sxx = 0$, où le prémier terme doit diſparoître, puiſque la déterminatrice aboutiſſoit à la Caſe xx. Les autres, mis ſur le Triang: analyt: ont une déterminatrice utile, qui donne l'équat: $+2aaBCx + (2aaA - 2a)sxx = 0$, ou $s = -\frac{2aaBC}{2aaA - 2a}x^{-1}$, $= [$pour la prémiére Série$] + \frac{b^3}{512ax}$ & [pour la ſeconde] $-\frac{b^3}{512ax}$.

Les

Ch. VIII. §. 142. Les éq: $v = \frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$, & $v = -\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$ Pl. XIII. des Aſymptotes-curvilignes ſe peuvent conſtruire ainſi. Pour la prémiére, qu'on décrive ſur les Axes AP, AE, Fig. 96. la Parabole QAq, dont les abſciſſes AP, Ap étant x, les ordonnées PQ, pq ſont $\frac{3xx}{a}$: & qu'on méne par l'Origine A la Droite AT, dont les ordonnées PT, pt ſont $\frac{bx}{4a}$. Ainſi joignant les ordonnées de la Droite à celles de la Parabole, c'eſt-à-dire, prenant QR, qr, toûjours égales à PT, pt, & dans la même direction, on aura la Courbe RAr, dont les ordonnées ſeront $\frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a}$. Et diminuant toutes ces ordonnées d'une grandeur conſtante $RS = rs = AE = \frac{bb}{64a}$, ou, ce qui eſt la même choſe, faiſant deſcendre la Courbe RAr en SEs, d'une hauteur $AE = \frac{bb}{64a}$, on aura la prémiére Aſymptote-courbe, dont les ordonnées ſont $\frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$.

Cette Aſymptote n'eſt qu'une Parabole ordinaire, dont l'Axe des ordonnées eſt EA, & celui des abſciſſes EV parallèle à AT; c'eſt-à-dire, que prenant EV pour une abſciſſe, que nous nommerons z, VS ſera l'ordonnée, que nous apellerons u. Car EV eſt égale a AT, qui eſt à AP en raiſon donnée, puiſque les angles du Triangle PAT ſont donnés. Soit $f : a$ la raiſon de AT [z] à AP [x]. Donc $x = \frac{az}{f}$. D'ailleurs VS [u] = TR [puiſque

PL.XIII. $TV = AE = RS] = PQ [$ puiſque $QR = PT] =$ CH.VIII. §. 142.
$\frac{3xx}{a} = \frac{3azz}{ff}$ [en mettant pour x ſa valeur $\frac{az}{f}$]. L'équation entre les coordonnées $EV[z]$ & $VS[u]$ eſt donc $u = \frac{3azz}{ff}$, qui eſt celle d'une Parabole ordinaire [§. 123].

Fig. 97. Qu'on tranſporte cette Aſymptote en SES, en prenant $AE = \frac{bb}{64a}$, $AF = \frac{1}{16}b$, menant la Droite EFV, & décrivant ſur l'Axe EV des abſciſſes & ſur l'Axe EA des ordonnées, avec un Paramétre $\frac{EF^2}{3AF}$ [$\frac{ff}{3a}$], la Parabole SES, dont l'équation, rélativement aux Axes EV, EA, ſera $u = \frac{3azz}{ff}$, mais rélativement aux Axes AF, Ae, $v = \frac{3xx}{a} + \frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}$. Qu'on tranſporte auſſi ſur les mêmes Axes, l'autre Aſymptote-courbe ses, en prenant l'ordonnée poſitive $Ae = \frac{bb}{64a}$, l'abſciſſe $AF = \frac{1}{16}b$; tirant la Droite eFv, & décrivant ſur les Axes ev, eA, avec un Paramétre $\frac{eF^2}{AF}$ [$\frac{ff}{a}$], une Parabole ses, dont l'équation rélativement aux Axes ev, eA ſera $u = -\frac{azz}{ff}$. Mais, rélativement aux Axes AF, Ae, elle ſera $v = -\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$. Car $f : a = eF : AF = ev[z] : AP[x]$. Donc $z = \frac{fx}{a}$, & cette valeur ſubſtituée dans l'éq: $u = -\frac{azz}{ff}$, la

CH. VIII. §. 142. la change en $u = -\frac{xx}{a}$. De plus, $AF[\frac{1}{16}b] : Ae[\frac{bb}{64a}]$ PL. XIII.
$= FP[x - \frac{1}{16}b] : Pv[\frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}]$. Donc $vs[-u]$
$= Ps[-v] - Pv[\frac{bx}{4a} - \frac{bb}{64a}]$. Mais $u = -\frac{xx}{a}$, ou
$-u = \frac{xx}{a}$. Donc $\frac{xx}{a} = -v - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$, ou $v =$
$-\frac{xx}{a} - \frac{bx}{4a} + \frac{bb}{64a}$.

Ainſi nous avons les Aſymptotes-courbes SES, ses, de la Courbe propoſée. Le quatriéme terme $+\frac{b^3}{512ax}$ de la prémiére, & $-\frac{b^3}{512ax}$ de la ſeconde Série fait voir que du côté des abſciſſes poſitives, les Branches de l'Aſymptote tombent entre celles de la Courbe & l'Axe des abſciſſes, & que du côté des abſciſſes négatives, ce ſont les Branches de la Courbe qui tombent entre l'Axe & les Branches de l'Aſymptote.

On voit par-là que la Courbe repréſentée par l'éq: $aayy - 2axxy - 3x^4 - bx^3 = 0$ a quatre Branches paraboliques, & on juge aſſez préciſément de leur poſition. Cela convient parfaitement avec le calcul des abſciſſes & des ordonnées de cette Courbe, qui peut ſe faire en diverſes maniéres, par ex. en ſuppoſant $y = \frac{xxz}{aa}$; ce qui transforme l'équation en $\frac{x^4zz}{aa} - \frac{2x^4z}{a} - 3x^4 - bx^3 = 0$,
ou $x = \frac{aab}{zz - 2az - 3aa} = \frac{aab}{(z - 3a) \times (z + a)}$. Où l'on voit, que prenant pour z deux valeurs différentes

PL.XIII. qui faſſent enſemble la ſomme $2a$; comme b & $2a - b$, elles donneront une même valeur d'x. La prémiére donne $bb - 2ab - 3aa$ pour le dénominateur de la fraction égale à x, & la ſeconde donne $4aa - 4ab + bb - 4aa + 2ab - 3aa = bb - 2ab - 3aa$. On pourra donc coupler deux à deux ces valeurs de z, qui donnent une même abſciſſe x, avec différentes ordonnées $\frac{bxx}{aa}$ & $\frac{(2a-b)xx}{aa}$. Il eſt encore aiſé de voir que ſi ces deux valeurs de z ſont poſitives, elles ne peuvent donner pour x une valeur qui aproche plus de zéro, que quand elles ſont égales chacune à a, ce qui donne $x = \frac{aab}{-2a.2a} = -\frac{1}{4}b$, & $y = [\frac{xxz}{aa} =] \frac{bb}{16a}$. Mais cela deviendra plus ſenſible en fixant les valeurs de a, & de b. Soient, par exemple, $a = 1$ & $b = 12$, & faiſant Ch.VIII. §. 141.

$$z = \left\{ \begin{array}{l} 1 \quad \frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ -3,\ -5, \text{ \&c.} \\ \quad 1\frac{1}{2},\ 2,\ 2\frac{1}{2},\ 3,\ 4,\ 5,\ 7, \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

on aura $x = -3, -3\frac{1}{13}, -4, -6\frac{6}{7}, \textit{inf.}\ 2\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{4}$, &c.

$$\& y = \left\{ \begin{array}{l} -9 \quad 5\frac{2}{25},\ 0, -23\frac{26}{49}, \textit{-inf.}\ -11\frac{13}{25}, -3, -\frac{45}{64}, \text{ \&c.} \\ \quad 15\frac{9}{25},\ 32,\ 117\frac{11}{49}, \textit{inf.}\ 23\frac{1}{25},\ 5,\ \frac{63}{64}, \text{ \&c.} \end{array} \right.$$

Il paroît donc que la Courbe a quatre Branches, dont deux AS, As partent de l'Origine A, & les deux autres CS, Cs du point C, qui a pour abſciſſe $AB = -\frac{1}{4}b$, & pour ordonnée $BC = \frac{bb}{16a}$. Les points de la Branche AS ſont donnés par les valeurs de z, qui ſont au-deſſus de 3; ceux de la Branche As par les valeurs de z, qui ſont

Fig. 92.

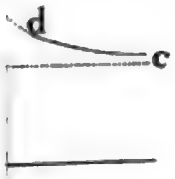
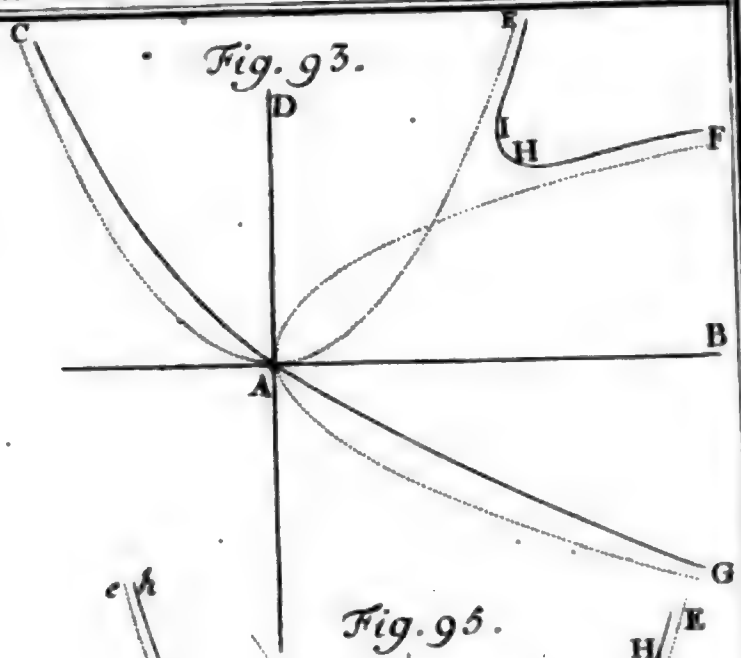


Fig. 93.



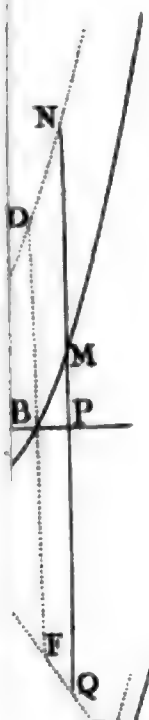
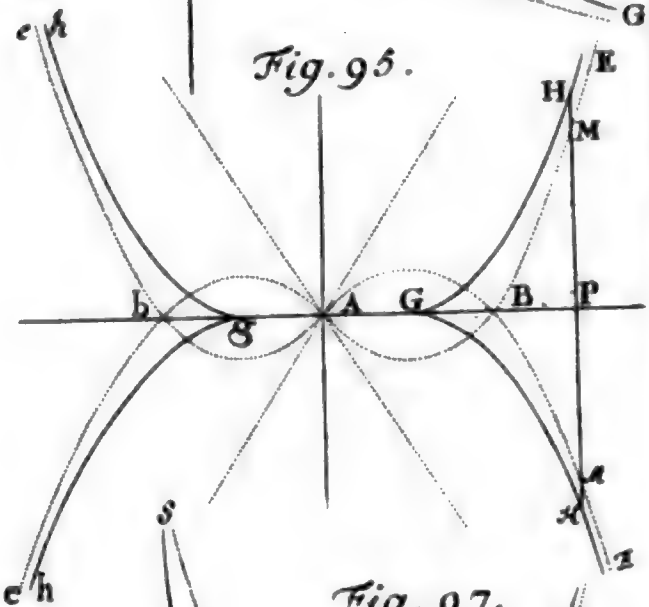


Fig. 95.



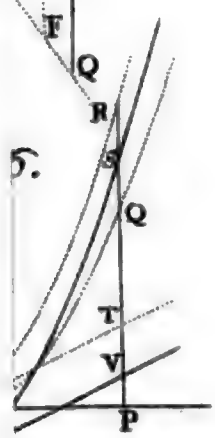
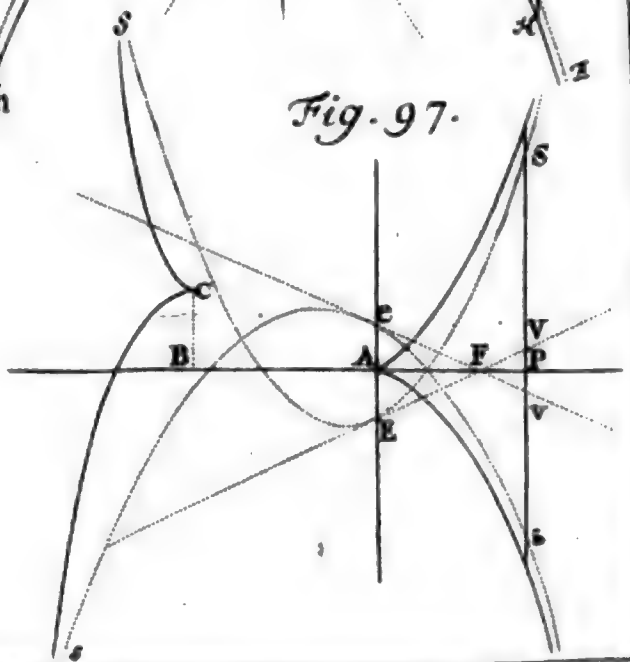


Fig. 97.



Digitized by Google

CH. VIII §. 142. ſont au-deſſous de — 1 ; ceux de la Branche C S par les valeurs de z, qui ſont entre 3 & 1, & ceux de la Branche C *s* par les valeurs de z priſes entre 1 & — 1. PL. XIII.

2. Si dans l'équation propoſée on change ſeulement le ſigne du terme $-3x^4$; alors, quoique l'équation rempliſſe les mêmes Caſes ſur le Tr : anal : , la Courbe qu'elle repréſente eſt entiérement différente. Car l'éq : $aayy - 2ax^2y + 3x^4 = 0$, que fournit l'unique déterminatrice ſupérieure, n'a que des racines imaginaires $ay - (1 \pm \sqrt{-2})xx = 0$. Donc la Courbe n'a point de Branches infinies.

En effet, ſi l'on transforme ſon équation, comme la précédente, par la ſubſtitution de $\frac{xxz}{aa}$ au lieu d'y, on aura $x = \frac{aab}{zz - 2az + 3aa} = \frac{12z}{zz - 2z + 3}$ [en prenant toûjours $a = 1$ & $b = 12$], où l'on voit qu'il n'y a aucune valeur de z, qui donne x ou y infinie. Et le calcul cy-joint fait voir que la Courbe eſt une eſpèce d'Ovale, dont les points de l'arc AED ſont déterminez par les valeurs de z priſes au-deſſus de 1, ceux de l'arc DB par les valeurs de z priſes entre 1 & 0, & ceux de l'arc BFA par les valeurs négatives de z. PL. XIV. *Fig.* 98.

$z =$	1,	$\frac{1}{2}$,	0,	— 1,	— 2,	— 3,	&c.
		$1\frac{1}{2}$,	2,	3,	4,	5,	&c.
$x =$	6,	$5\frac{1}{3}$,	4,	2,	$1\frac{1}{11}$,	$\frac{2}{3}$,	&c.
$y =$	36,	$14\frac{2}{3}$,	0,	— 4,	$-2\frac{46}{121}$,	$-1\frac{1}{3}$,	&c.
		$42\frac{1}{1}$,	32,	12,	$4\frac{91}{121}$,	$2\frac{1}{9}$,	&c.

3. Mais ſi au lieu de $+3x^4$, ou $-3x^4$, on avoit eû $+x^4$, l'équation de la déterminatrice ſeroit $aayy - 2axxy + x^4 = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine, mais double, $ay -$

PL.XIV. $ay - xx = 0$. Il n'y a donc qu'une Parabole-aſymptote SAS décrite ſur les mêmes Axes que ceux de la Courbe, avec une derniére direction parallèle aux ordonnées. Mais cette racine double fait voir [§. 113] que le terme ſuivant eſt demi-imaginaire, puiſqu'entre la déterminatrice & ſa parallèle qui paſſe par le terme bx^3 du ſecond Ordre, il n'y a qu'un intervalle. La Courbe n'aura donc que deux Branches infinies, toutes deux d'un même côté de l'Axe des ordonnées. Mais pour le voir plus clairement, qu'on ſubſtituë $\frac{xx}{a} + u$ à y dans la propoſée, & elle ſe réduira à $aauu - bx^3 = 0$, qui, ſans être miſe ſur le Tr: an: donne ces deux racines $u = +\frac{x}{a}\sqrt{bx}$, & $u = -\frac{x}{a}\sqrt{bx}$, leſquelles terminent la Série. Ainſi l'équation de la Courbe eſt $y = \frac{xx}{a} \pm \frac{x}{a}\sqrt{bx}$, dont le terme $\frac{x}{a}\sqrt{bx}$ fait voir que les ordonnées des abſciſſes négatives ſont imaginaires, & que l'Aſymptote-courbe conſiſte dans la ſeule Branche AS de la Parabole SAS, qui eſt accompagnée de deux Branches infinies de la Courbe.

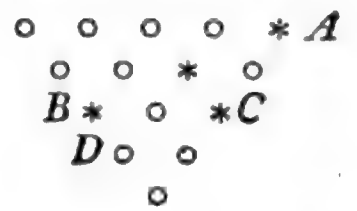
Fig. 99. CH.VIII. §. 142.

Car ſi on décrit ſur les mêmes Axes que la Parabole SAS, la Parabole TAT dont les ordonnées ſont $\pm\frac{x}{a}\sqrt{bx}$; on verra que les ordonnées PM, PM; pm, pm, de la Courbe cherchée, ſont égales à la ſomme ST, st; & à la différence ST, st des ordonnées de ces deux Paraboles. La derniére n'ayant point d'ordonnées du côté des abſciſſes négatives, la Courbe ſera auſſi ſans ordonnées de ce côté-là, & n'aura que deux Branches AmDM, AmBM qui s'aprochent toûjours plus de la Branche AS, qui eſt leur Parabole-aſymptote.

4. Si,

igitized by Google

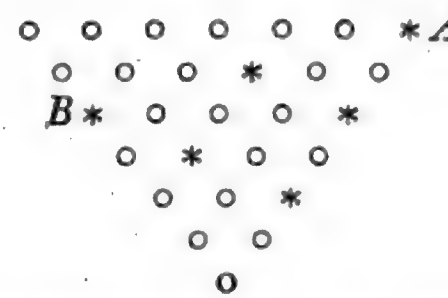
CH. VIII. §. 142. 4. Si, dans ce même cas, au lieu du terme $-bx^3$ PL. XIV. l'équation proposée avoit eû $-b^2x^2$, il y auroit eû deux intervalles entre la déterminatrice AB & sa parallèle CD,



de façon que le second terme de la Série ne sera plus demi-imaginaire, mais imaginaire ou réel [§. 113]. En substituant $\frac{xx}{a} + u$ à y dans la proposée $aayy - 2axxy + x^4 - bbxx = 0$, on la transforme en $aauu - bbxx = 0$, dont les racines sont $au \mp bx = 0$ ou $u = \pm \frac{bx}{a}$. La proposée est donc réductible en ces deux, $y = \frac{xx}{a} + \frac{bx}{a}$ & $y = \frac{xx}{a} - \frac{bx}{a}$. Aussi la Courbe est-elle composée de deux autres, qui sont de simples Paraboles, qu'on peut construire ainsi. Qu'on donne à l'abscisse A a [a] les ordonnées a B [b] & a b [$-b$]; qu'on méne les Droites AQB, Aqb, & que les prenant pour Axes d'abscisses, sur ces Axes & sur l'Axe des ordonnées AC, on décrive deux Paraboles, avec un Paramétre $\frac{AB^2}{Aa} = \frac{Ab^2}{Aa} = \frac{ff}{a}$, en nommant A B, ou A b, f. Ainsi l'équation de ces Paraboles, rélativement aux coordonnées AQ, ou Aq, [z], & Q M, ou q m, [u], est $u = \frac{azz}{ff}$. Mais relativement aux coordonnées AP [x] & PM, ou Pm, [y], leur équation Fig. 100

PL. XIV. tion ſera $y = \frac{xx}{a} \pm \frac{bx}{a}$. Car Aa [$a$] : AB, ou Ab, [$f$] = AP [$x$] : AQ, ou Aq, [$z$]. Donc $z = \frac{fx}{a}$, & $u =$ [$\frac{azz}{ff} =$] $\frac{xx}{a}$. De plus, Aa [a] : aB, ou ab [$\pm b$] = AP [x] : PQ, ou Pq, [$\pm \frac{bx}{a}$]. Ainſi PM, ou Pm, [y] = PQ + QM [$+ \frac{bx}{a} + \frac{xx}{a}$] ou — Pq + qm [$- \frac{bx}{a} + \frac{xx}{a}$]. CH. VIII. §. 142.

Exemple IV. 1. L'équation propoſée eſt $x^6 + 2bx^3y^2 + 2abx^4 + bby^4 - 2ab^2xy^2 + a^2b^2x^2 = 0$. Sur le Triang : anal : elle n'a qu'une déterminatrice ſupérieure *AB*, qui par ſa poſition fait eſpérer des Branches paraboliques, dont la derniére direction eſt l'Axe des ordonnées. L'éq : $x^6 + 2bx^3y^2 + bby^4 = 0$ que donne la déter-



minatrice *AB* ne dément point cette eſpérance : ſa racine double $x^3 + by^2 = 0$, ou ſes racines doubles $y = \pm x\sqrt{-\frac{x}{b}}$, indiquant une Parabole *ſemi-cubique* [c'eſt le nom que lui donnent les Géométres] qui étend deux Branches dans les angles des abſciſſes négatives. Mais, comme ces racines ſont doubles, il faut, avant que prononcer ſur les Branches infinies de la Courbe, chercher le ſecond terme

Ch. VIII. §. 142. terme de la Série, en ſubſtituant $\pm x\sqrt{-\frac{b}{x}}$ au lieu d'y dans l'équation propoſée. En voici le calcul, par la méthode du §. 106. Pl. XIV.

I. Ordre — IIe. Ordre — III. Ord.

$$x^6 + 2bx^3y^2 + bby^4 + 2abx^4 - 2abbxy^2 + a^2b^2x^2$$

$$0 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \quad 2 \quad 0$$

$$\pm x\sqrt{-\tfrac{x}{b}}) \;\; \mp 4bx^4y\sqrt{-\tfrac{x}{b}} \;\; \pm 4bxy^3\sqrt{-\tfrac{x}{b}} \;\; \mp 4abbxxy\sqrt{-\tfrac{x}{b}}$$

$$\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$-2x^6 \quad -6bx^3y^2 \quad +2abx^4$$

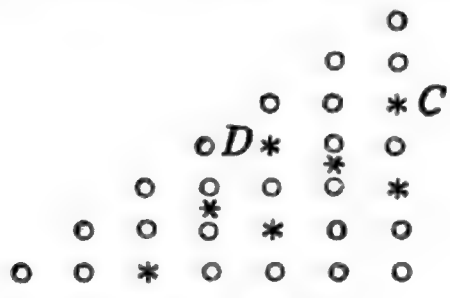
$$0 \quad \tfrac{2}{3} \quad 0$$

$$\mp 4bx^4y\sqrt{-\tfrac{x}{b}}$$

$$\tfrac{1}{4}$$

$$+x^6$$

La transformée $-4bx^3u^2 \pm 4bxu^3\sqrt{-\frac{x}{b}} + bbu^4 + 4abx^4 \mp 4ab^2x^2u\sqrt{-\frac{x}{b}} - 2abbxu^2 + a^2b^2x^2 = 0$, étant miſe ſur le Tr: anal: couché ſur la Bande ſans x, n'a qu'une déterminatrice utile CD, qui donne $-4bx^3u^2 + 4abx^4$

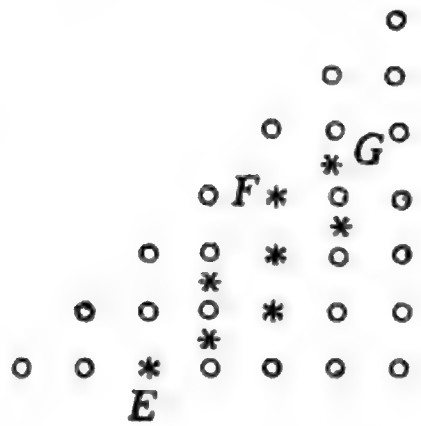


PL.XIV. $= 0$, ou $u = \pm\sqrt{ax}$. Ces deux prémiers termes de la Série $y = \pm x\sqrt{-\frac{x}{b}} \pm \sqrt{ax}$ font voir que la Courbe n'a que des Branches imaginaires. Car le prémier terme exclud toutes les Branches qui pourroient avoir des abſciſſes poſitives, & le ſecond toutes celles qui pourroient avoir des abſciſſes négatives. On s'aſſurera en effet que la Courbe eſt imaginaire, en réſolvant ſon équation. Car on trouvera $by = \pm\sqrt{(abx - x^3 \pm \sqrt{-4abx^4})}$, que la grandeur radicale $\sqrt{-4abx^4}$ rend eſſentiellement imaginaire, ſi, comme on le ſuppoſe, a & b ſont poſitives. CH. VIII. §. 141.

2. Si l'une de ces deux grandeurs, b par exemple, étoit négative, l'équation ſeroit $x^6 - 2bx^3y^2 - 2abx^4 + bby^4 - 2ab^2xy^4 + a^2b^2x^2 = 0$. Le prémier terme de la Série ſeroit $\pm x\sqrt{\frac{x}{b}}$. Et le ſecond $\pm\sqrt{ax}$ ſeroit le dernier terme. Car ſi dans la transformée $+ 4bu^2x^3 \pm 4bbu^3x\sqrt{\frac{x}{b}} + bbu^4 - 4abx^4 \mp 4abbux^2\sqrt{\frac{x}{b}} - 2abbux + aabbxx = 0$, on ſubſtituë $\pm\sqrt{ax} + t$ à u, on aura $\pm 8btx^3\sqrt{ax} + 4bttx^3 \pm 8bbtx^2\sqrt{\frac{x}{b}} + 12bbttx\sqrt{\frac{a}{b}} + 4abbtx \pm 4bbt^3\sqrt{ax} + bbt^4 \pm 4bbt^3x\sqrt{\frac{x}{b}} = 0$. Or non-ſeulement on peut prendre $t = 0$, puiſque cette équation eſt diviſible par t, & regarder la Série $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}} \pm \sqrt{ax}$ comme terminée; mais encore on le doit. Car ſi on met cette équation ſur le Tr: anal: on ne lui trouvera que deux déterminatrices ſupérieures EF, FG, qui donnent l'une $bbt^4 \pm 4bbt^3x\sqrt{\frac{x}{b}} + 4bttx^3 = 0$, ou $t = \mp 2x\sqrt{\frac{x}{b}}$, l'autre $+ 4bttx^3 \pm 8btx^3\sqrt{ax} = 0$, ou $t = \mp 2\sqrt{ax}$. Mais la

CH. VIII. §. 142.

PL. XIV.



la Série $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}} \pm \sqrt{ax}$ ne change point, encore qu'on lui ajoûte l'une ou l'autre de ces deux quantités $\mp 2x\sqrt{\frac{x}{b}}$, ou $\mp 2\sqrt{ax}$. Donc cette Série eſt complette, & elle eſt l'équation de la Courbe.

Ainſi ſa Conſtruction eſt facile. Car ſi on décrit ſur les axes AB, AE la Parabole ſemi-cubique SAs, dont les ordonnées ſont $\pm x\sqrt{\frac{x}{b}}$, & la Parabole ordinaire TAt, dont les ordonnées ſont $\pm\sqrt{ax}$, & qu'à chaque abſciſſe AP [x] on donne les ordonnées PM [$+x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax}$], PM [$-x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax}$] égales à la ſomme St, ou Ts, & les ordonnées Pm [$+x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax}$], P$m$ [$-x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax}$] égales à la différence ST, ou ts, des ordonnées de ces Paraboles, on aura la Courbe MDABmmBAdM que repréſente l'équation propoſée $x^6 - 2bx^3yy - 2abx^4 + bby^4 - 2abbxy^2 + aabbxx = 0$. Fig. 101.

Mais ſi l'on fait attention à ce que les racines, $y - x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax} = 0$ qui repréſente la Branche ADM, &

Pl. XIII. $y + x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax} = 0$ qui exprime la Branche A d M, multipliées l'une par l'autre, font l'équation rationelle $yy - \frac{x^3}{b} - 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = 0$; & qu'auſſi les deux racines, $y - x\sqrt{\frac{x}{b}} + \sqrt{ax} = 0$ qui déſigne la Branche ABm, & $y + x\sqrt{\frac{x}{b}} - \sqrt{ax} = 0$ qui marque la Branche A B m, multipliées l'une par l'autre, donnent l'équation rationelle $yy - \frac{x^3}{b} + 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = 0$: on conclurra que MA M eſt une Courbe, dont $yy - \frac{x^3}{b} - 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = 0$ eſt l'équation, & m B A B m une autre Courbe, qui a pour équation $yy - \frac{x^3}{b} + 2xx\sqrt{\frac{a}{b}} - ax = 0$, & que le produit $y^4 - \frac{2x^3yy}{b} + \frac{x^6}{bb} - \frac{2ax^4}{b} - 2axy^2 + a^2x^2 = 0$ de ces deux équations, ou l'équation propoſée $bby^4 - 2bx^3yy + x^6 - 2abx^4 - 2ab^2xyy + aabbx^2 = 0$ repréſente le Syſtême de ces deux Courbes m A M, mBABM. Ch. VIII. §. 142.

143. *Cas IV.* Enfin, lorſqu'une déterminatrice ſupérieure coupe également les deux Bandes extérieures du Triangle analytique & fait avec elles un triangle iſoſcele, elle eſt appliquée ſur le plus haut Rang de l'équation. Les racines qu'elle peut donner ſont ou $y = 0$, ou $x = 0$, ou $y = Ax$, ſoit $x = \frac{y}{A}$. On a parlé dans les §§. *précéd.* des Branches que déſignent les racines $y = 0$, $x = 0$; il s'agit préſentement de celles qu'indiquent les racines $y = Ax$. Leur derniére direction eſt oblique aux coordonnées,

igitized by Googl

CH. VIII. §. 143. données, & parallèle à la Droite repréſentée par cette éq : $y = Ax$. Et autant de racines de cette forme qu'a l'équation faite en égalant à zéro le plus haut Rang, autant y a-t-il de derniéres directions obliques; quoiqu'il ſe puiſſe très-bien faire que toutes ces Branches infinies, ou du moins quelques-unes, ſoient imaginaires. PL. XIV.

Pour s'aſſurer de l'exiſtence, de la nature, & de la poſition de ces Branches, dont l'équation du plus haut Rang a fait connoitre la derniére direction, il ſe préſente deux moyens *.

Le prémier conſiſte à transformer l'équation en ſorte que l'Axe des ordonnées conſervant ſa poſition, celui des abſciſſes ſoit parallèle à la derniére direction des Branches, qui eſt connuë. Alors l'équation eſt réduite à quelcun des trois Cas, qui ont été détaillés dans les §§. *préc.* & par les Remarques qui y ont été faites, on jugera de la nature de ces Branches infinies.

La maniére de faire cette transformation a été indiquée au §. 25. 111°. Soit AB l'Axe des abſciſſes, AD celui des ordonnées, AC, ou Ac, la Droite parallèle à la derniére direction de quelques Branches infinies, repréſentée par l'éq : $y = Ax$, de ſorte que l'Abſciſſe AB [$= 1$] ait l'ordonnée BC ou Bc [$= A$] poſitive ou négative ſelon que le marque le ſigne d'A. Soient encore AP [x] & PM [y] les coordonnées dont la rélation eſt exprimée par l'équation propoſée. On la transforme en une autre qui exprime le raport des coordonnées AQ, ou Aq [z] & QM, ou qM [u], en ſubſtituant dans la propoſée pz pour x, & $qz + u$ pour y, où pz eſt AP, qz eſt PQ, ou Pq, & u eſt QM ou qM. Ainſi les nombres 1, p, q, déſignent le raport des cotés QA, AP, PQ du triangle APQ, ou qA, AP, Pq du triangle APQ. Mais Fig. 102.

* M. DE GUA, *Uſage de l'Anal.* pag. 160.

Digitized by Google

PL. XIV. le triang: APQ, ou APq eſt ſemblable à ABC, ou ABc. Donc le raport 1, p, q des côtés QA ou qA, AP, PQ ou Pq, eſt le même que celui des côtés CA ou cA, que nous nommerons E, AB qui eſt 1, & BC ou Bc qui eſt A. Ainſi $p = \frac{1}{E}$, & $q = \frac{A}{E}$. Après la transformation, on écrira donc $\frac{1}{E}$ pour p, & $\frac{A}{E}$ pour q; ou, ce qui ſera plus ſimple, on laiſſera p pour marquer la fraction $\frac{1}{E}$, & au lieu de q on écrira Ap [$= A \times \frac{1}{E} = \frac{A}{E}$]. CH. VIII. §. 143.

La valeur de cette lettre E [$= \frac{1}{p}$] dépend de la grandeur de l'angle DAb, ou ABC, que font entr'elles les coordonnées: & comme cet angle eſt donné, auſſi bien que AB [1], & BC ou Bc [A]; AC ou Ac [E] eſt auſſi donnée. Si G repréſente le Sinus du complement de cet angle ABC, ou ABc, le Sinus total étant 1, E ſera $\sqrt{(1 \pm 2GA + AA)}$, où le ſigne + a lieu quand l'angle ABC eſt obtus, & le ſigne —, quand il eſt aigu. Car ſi on abaiſſe AI perpendiculairement ſur CBc, l'angle BAI ſera le complement de ABI ou ABC. Donc AB [1] étant le Sinus total, BI ſera le Sinus G. Mais [EUCL. II. 12 & 13] $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2CBI$, & $Ac^2 = AB^2 + Bc^2 + 2cBI$, c'eſt-à-dire $EE = 1 + AA \pm 2GA$. Quand les angles ABC, ABc ſont droits, alors $G = 0$, & $EE = 1 + AA$, ou $E = \sqrt{(1 + AA)}$.

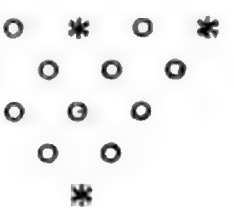
L'autre moyen de connoitre la nature & la poſition des Branches infinies d'une Courbe, dont la derniére direction eſt connuë par le prémier terme Ax, d'une Série qui donne y en x, c'eſt de chercher le ſecond terme de cette Série, en ſubſtituant $Ax + u$ à y dans l'équation propoſée. Ce moyen ne différe preſque point du précédent.

Dans

CH. VIII. §. 143. Dans l'une & dans l'autre transformée, u repréſente QM, ou qM, portion de l'ordonnée, compriſe entre la Courbe & la Droite AC, ou Ac, parallèle à la derniére direction. Mais au lieu que la transformée précédente donnoit le raport de QM, ou qM, [u] à AQ, ou Aq, [z]; celle-ci donne le raport de QM, ou qM, [u] à AP [x]. Ce n'eſt donc pas proprement l'équation d'une Courbe, puiſque QM, ou qM, n'eſt pas l'ordonnée de l'abſciſſe AP. Cependant ce terme u [QM ou qM] de la Série étant connu, il fait juger de la nature des Branches dont cette Série exprime l'ordonnée. Car ſi l'expoſant d'x dans ce ſecond terme eſt poſitif les Branches ſont paraboliques & leur derniére direction eſt parallèle à AC ou Ac [§. 133]. S'il eſt négatif, les Branches ſont hyperboliques, & leur Aſymptote droite eſt AC ou Ac [§. 131]. S'il eſt zéro, les Branches ſont encore hyperboliques; mais leur Aſymptote droite eſt parallèle à AC ou Ac [§. 131]. Et pour avoir la ſituation des Branches par raport à cette Aſymptote, il faut chercher encore un terme de la Série, dont l'expoſant ſoit négatif. PL. XIV.

Exemple I. On propoſe l'éq: $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$. Sans la mettre ſur le Tr: anal: on voit que ſon plus haut Rang égalé à zéro donne l'éq: $x^4 - x^2y^2 = 0$, qui a d'abord une racine double $x = 0$, par laquelle diviſant deux fois l'équation, on a $x^2 - y^2 = 0$, qui ſe réduit à ces deux équations ſimples $y - x = 0$, & $y + x = 0$. Celles-ci comparées avec la formule $y - Ax = 0$, donnent $A = 1$, & $A = -1$. Ainſi donnant à l'abſciſſe AB [1] les ordonnées BC $= +1$, & Bc $= -1$, les Droites AC, Ac, & l'Axe des ordonnées AD ſont les derniéres directions des Branches infinies que peut avoir la Courbe. Celles dont la derniére direction eſt AD ſe trouvent ſans autre Calcul par la déterminatrice de l'équation miſe ſur le Fig. 103.

Pl. XIV. le Tr : anal : , qui paſſant par la Pointe & par la Caſe x^2y^2 , donne l'éq : $-x^2y^2+a^4=0$. Car, puiſqu'elle ſe réſout en ces deux $xy+aa=0$, & $xy-aa=0$, Ch. VIII. §. 141.



on voit qu'elle indique pour l'Aſymptote-courbe de ces Branches deux Hyperboles ordinaires, l'une poſitive, l'autre négative ; leſquelles par conſéquent étendent leurs Branches dans les quatre angles des coordonnées. Et comme cette équation n'a point de racines multiples , on eſt aſſuré que la Courbe jette auſſi une Branche dans chacun de ces quatre angles.

Quant aux Branches dont les derniéres directions ſont AC & Ac, on en cherchera la nature , en prenant les abſciſſes ſur ces Droites AC, Ac. Il faut donc ſubſtituer pz à x & $qz+u$ à y, dans l'équation propoſée. Selon le §. 30, le calcul s'en fait ainſi,

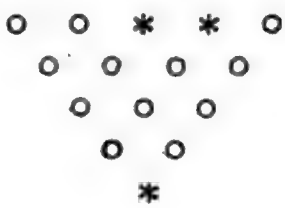
$$\begin{array}{c} (p^4-ppqq)z^4+a^4 \\ \quad 0 \qquad\quad 2 \qquad\quad 0 \\ \hline -2ppquz^3 \\ \quad \tfrac{1}{2} \\ \hline -ppuuzz \end{array}$$

Après quoi, dans la transformée $(p^4-ppqq)z^4-2ppquz^3-ppuuzz+a^4=0$, on ſubſtituera Ap, c'eſt-à-dire $\pm p$ [puiſque $A=\pm 1$] au lieu de q, & elle ſe convertit en $\mp 2p^3uz^3-ppuuzz+a^4=0$, où le terme z^4 a diſparu, ſelon la Remarque du §. 107.

Cette

CH. VIII. §. 143. Cette équation exprime la nature de la Courbe rélativement aux axes AD, AC, ſi l'on donne au prémier terme le ſigne —, & rélativement aux axes AD, Ac, ſi l'on lui donne le ſigne +, parce que pour la Droite AC, A eſt $= +1$, & $p = q$; & pour la Droite Ac, A eſt $= -1$, & $p = -q$. Si on ſuppoſe que l'angle ABC eſt droit, alors AC & Ac ſont chacune égale à $\sqrt{2} = \sqrt{(1+1)} = \sqrt{(1+AA)}$, & $p' = \frac{1}{E} = \frac{1}{\text{AC ou Ac}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$; valeur qui ſubſtituée dans l'éq : $\mp 2p^3uz^1 - p^2u^2z^2 + a^4 = 0$, la transforme en $\mp \frac{uz^3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}u^2z^2 + a^4 = 0$. PL. XIV.

Il eſt aiſé maintenant de connoitre par cette équation ce que ſont les Branches infinies qui ont leurs derniéres directions parallèles à AC, Ac. Pour juger des prémiéres, on mettra ſur le Tr : an : l'éq : $-2p^3uz^1 - p^2u^2z^2 + a^4 = 0$, & on lui trouvera trois déterminatrices. L'une



qui paſſe par la Pointe & par la Caſe $uuzz$, exprime les Branches dont on a déja parlé, qui ont pour Aſymptote l'Axe des ordonnées. L'autre qui paſſe auſſi par la Pointe & par la Caſe uz^3 exprime des Branches hyperboliques qui ont pour Aſymptote AC priſe pour Axe des abſciſſes. L'éq : $-2p^3uz^3 + a^4 = 0$, ou $u = \frac{a^4}{2p^3z^3}$, qu'elle fournit, indique deux Branches dans les angles DAC, dAK des coordonnées de même ſigne. Et comme elle n'a point de racines multiples, les Branches de la

PL. XIV. Courbe ſuivent celles de l'Aſymptote-courbe dans ces mêmes angles. CH. VIII. §. 143.

La troiſiéme déterminatrice traverſe le plus haut rang & donne l'éq : $-2p^3uz^3 - p^2u^2z^2 = 0$, qui diviſée par $p^2uz^2 = 0$ [dont les racines $u = 0$, & $z = 0$ marquent les Branches infinies qui ont leurs derniéres directions parallèles à l'Axe des abſciſſes AC, & à celui des ordonnées AD] ſe réduit à $u = -2pz$. Elle exprime donc des Branches infinies dont la derniére direction ſe détermine en donnant à l'abſciſſe 1 une ordonnée $-2p$; ou, ce qui eſt la même choſe, en donnant à l'abſciſſe $\frac{1}{p}$ [$= E =$ AC] une ordonnée -2 [$=$ Cc], & menant la Droite Ac. Ces Branches ſont donc juſtement celles qu'indiquoit la ſeconde racine $y + x = 0$, du prémier rang de la propoſée, & qu'il s'agit maintenant d'examiner.

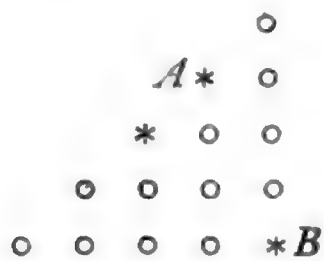
L'équation de la Courbe relative aux Axes AD, Ac, étoit $+2p^3uz^3 - p^2u^2z^2 + a^4 = 0$. Si on la met ſur le Tr : anal : elle y occupera les mêmes Caſes que la précédente, & y aura les mêmes déterminatrices. Celle qui traverſe le plus haut rang déſigne les Branches dont la derniére direction eſt parallèle à AC. Celle qui paſſe par la Pointe & par la Caſe u^2z^2, indique les Branches dont l'Aſymptote eſt l'axe AD des ordonnées. Et celle qui paſſe auſſi par la Pointe & par la Caſe uz^3, marque des Branches hyperboliques, dont l'Aſymptote droite eſt l'Axe des abſciſſes Ac. Pour l'Aſymptote-courbe elle donne l'éq : $2p^3uz^3 + a^4 = 0$, ou $u = -\frac{a^4}{2p^3z^3}$, qui déſigne deux Branches infinies qui ſe jettent dans les angles dAc, DAk des coordonnées de ſignes contraires.

La Courbe repréſentée par l'éq : $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$, a donc huit Branches hyperboliques, dont quatre ont pour Aſymptote l'axe DAd des ordonnées, & les quatre autres les

CH. VIII. §. 143. les Droites AC, Ac qui coupent en deux également les quatre angles des coordonnées. PL. XIV.

On trouvera la même choſe par la Méthode des Séries. Des deux déterminatrices qu'a l'équation propoſée ſur le Triang : analyt : celle qui paſſe par la Pointe & par la Caſe x^4y^2 eſt ſupérieure quand le Triangle eſt couché ſur la Bande ſans y. Elle eſt donc propre à une Série qui donne x en y, & pour le prémier terme de cette Série, elle fournit l'éq : $-x^2y^2+a^4=0$, ou $x=\pm\frac{aa}{y}$. Il eſt inutile d'aller plus loin ; & l'on voit dans ce ſeul prémier terme quatre Branches qui accompagnent l'Axe des ordonnées, en ſe jettant dans les quatre angles des coordonnées. Les racines de l'éq : $-x^2y^2+a^4=0$ étant ſimples, les termes ſuivants n'auront point de racines imaginaires, qui détruiſent l'indication de ce prémier terme.

L'autre déterminatrice donnoit $x^4-x^2y^2=0$, ou $y=\pm x$, qui repréſente les deux Droites AC, Ac. En ſubſtituant $\pm x+u$ à y, l'équation ſe transforme en $-x^2u^2\mp 2x^3u+a^4=0$, qu'on placera ſur le Triang : analyt : couché ſur la Bande ſans x ; & l'on trouvera une déterminatrice utile, AB, qui donnera l'éq : $\mp 2ux^3+a^4=0$, ou $u=\pm\frac{a^4}{2x^3}$. Et dès lors la Série eſt réguliére. Ses



deux prémiers termes $\pm x\pm\frac{a^4}{2x^3}$ dénotent des Branches

Pl. XIV. hyperboliques qui tombent au-delà de leurs Aſymptotes droites AC, Ac. Ch. VII. §. 141.

Cela eſt conforme à ce qu'on a trouvé par l'autre Méthode, & à ce qu'on peut lire dans l'équation de la Courbe. D'abord, comme elle ne renferme que des puiſſances paires de x & de y, l'origine A eſt un Centre général [§. 75], & il ſuffit d'examiner la portion de la Courbe renfermée dans l'angle DAB des coordonnées poſitives. On réduira l'éq : $x^4 - x^2y^2 + a^4 = 0$, à cette forme $yy = xx + \frac{a^4}{xx}$, ou $y = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$, expreſſion qui fait voir que chaque abſciſſe x a ſon ordonnée y. Si on prend x infinie, xx ſera infinie : Si on prend x infiniment petite, $\frac{a^4}{xx}$ ſera infinie. Donc, & à l'abſciſſe infinie, & à l'abſciſſe infiniment petite, répond une ordonnée infinie. Puiſque x infiniment petite donne y infinie, l'axe des ordonnées AD eſt une Aſymptote de la Courbe. Et puiſque $\sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$ différe d'autant moins de x [$= \sqrt{xx}$] que $\frac{a^2}{xx}$ eſt plus petite, ou que x eſt plus grande, PM [$= y = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$] différe d'autant moins de PQ [$=$ AP $= x$] que x eſt plus grande, c'eſt-à-dire, que la Branche de Courbe aproche d'autant plus de la Droite AC qu'elle s'éloigne plus de l'Origine. Cette Branche eſt donc hyperbolïque, & AC eſt ſon Aſymptote droite. Et il en eſt de même dans les trois autres angles des coordonnées.

On verra très diſtinctement le cours de cette Courbe, en la décrivant par points au moyen de l'Hyperbole ordi-
Fig. 104. naire Ll/ décrite entre les Aſymptotes AB, AD. Car ſi de chaque point L, l, / de cette Hyperbole, on abaiſſe ſur

GR. VIII. §. 143. sur AB, les perpendiculaires LK, lk, *lk*, & qu'on les prolonge en l, i, *i*, de sorte que les Droites KI, ki, *ki* soient égales aux distances AL, Al, A*l* des points L, l, *l*, à l'origine A; les points l, i, *i* seront à la Courbe dont l'équation est $x^4 - xxyy + a^4 = 0$. L'abscisse AK étant x, l'ordonnée KL de l'Hyperbole est $\frac{aa}{x}$, & celle de la Courbe KI, ou AL, est $\sqrt{(AK^2+KL^2)} = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$. Donc $y = \sqrt{(xx + \frac{a^4}{xx})}$, ou $x^4 - xxyy + a^4 = 0$. Dans cette Construction, il est aisé de voir que la très-petite abscisse A*k*, ayant dans l'Hyperbole une très-grande ordonnée *kl*, l'ordonnée *ki* [= A*l*] de la Courbe est encore un peu plus grande, puisqu'elle est l'hypothenuse du triangle rectangle A*kl*, dont *kl* est un côté. Ainsi AD est l'Asymptote & de l'Hyperbole & de la Courbe. Et la très-grande abscisse AK, ayant dans l'Hyperbole une très-petite ordonnée KL, aura dans la Courbe une ordonnée KI [= AL hypothénuse du triangle rectangle AKL] un peu plus grande que AK, ou KE, qui est égale à AK, puisque AE coupe en deux également l'angle DAB. Donc AE est une autre Asymptote de la Courbe l*i*. La Courbe complette a donc quatre portions, qui font huit Branches infinies autour de trois Asymptotes droites. PL. XIV.

Exemple II. L'équation d'une Courbe étant $4y^4 - 6xy^2 + 2x^3 + 2ay^2 + 4ax^2 - b^3 = 0$, celle de son plus haut Rang est $4y^4 - 6xy^2 + 2x^3 = 0$, qui se résout en ces deux-ci $yy - 2xy + xx = 0$, & $4y + 2x = 0$. La prémiére est une racine double $y - x = 0$, & la seconde une racine simple $y + \frac{1}{2}x = 0$. Les derniéres directions que désignent ces racines se tracent en donnant

PL. XIV. Fig. 105. à l'abſciſſe AB = 1, les ordonnées BD = 1, & BC = $-\frac{1}{2}$, & menant les Droites AD, AC. CH. VIII. § 143.

Pour connoitre la nature de ces Branches, on ſubſtituera pz à x & $qz + u$ à y. La transformée eſt

$$\begin{array}{l} (4q^3 - 6pq^2 + 2p^3)z^3 + (2aq^2 + 4ap^2)z^2 - b^3 \\ \quad 3 \qquad 2 \qquad 0 \qquad\quad 2 \qquad 0 \qquad\quad 0 \\ \hline + (12q^2 - 12pq)uz^2 + (4aq)uz \\ \quad \frac{2}{2} \qquad\quad \frac{1}{2} \qquad\quad\; \frac{1}{2} \\ \hline + (12q - 6p)u^2z \qquad + (2a)uu \\ \quad \frac{1}{3} \qquad\quad 0 \qquad\quad\; 0 \\ \hline + (4)u^3 \end{array}$$

où il faut ſubſtituer $+q$ pour p, pour avoir l'équation de la Courbe relativement aux Axes AE, AD, puiſque $q = Ap$, & que $y - x = 0$ comparé avec $y - Ax = 0$ donne $A = +1$. Cette ſubſtitution réduit la transformée à $6pu^2z + 4u^3 + 6ap^2z^2 + 4apuz + 2auu - b^3 = 0$, qu'on mettra ſur le Tr: an: où ſa déterminatrice utile AB

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ * & * & o & o & \\ & * & * & * & B \\ & & o & o & \\ & & * & & \end{array}$$

donne $6pu^2z + 6ap^2z^2 = 0$, ou $u = \pm\sqrt{-apz}$, qui eſt l'équation d'une Parabole HAh dont la derniére direction, parallèle à l'Axe des z, c'eſt-à-dire, à la droite AD, tend du côté négatif Ad. Et comme cette équation n'a point de racines multiples, il n'y a pas lieu de douter que les Branches de cette Parabole ne ſoient accompagnées des Branches de la Courbe.

Mais

ed by Google

CH. VIII. §. 143. Mais la Méthode des Séries rend cette Conclusion peut-être encore plus sensible. En voici tout le Calcul par la Méthode abregée du §. 106. PL. XIV.

$4y^3-6xy^2+2x^3=0$

$y=x$

I II III Ord.

$4y^3-6xy^2+2x^3+2ay^2+4ax^2-b^3$

3 2 0 2 0 0

$x)+12xyy-12x^2y+4axy$

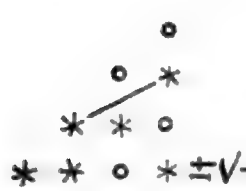
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$+12xxy-6x^3+2axx$

$\frac{1}{3}$ 0 0

$+4x^3$

Prémiére Transform. $4y^3+6xyy+2ayy+4axy+6axx-b^3=0$



$6xy^2+6ax^2=0$

$y=\pm\sqrt{-ax}$

I II III IV Ord.

$6xy^2+6ax^2+4y^3+4axy+2ay^2+b^3$

2 0 3 1 2 0

$\pm\sqrt{-ax})\pm12xy\sqrt{-ax}\pm12yy\sqrt{-ax}\pm4ax\sqrt{-ax}\pm4ay\sqrt{-ax}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ 0 $\frac{1}{2}$

$-6axx$ $-12axy$ $-2aax$

0 $\frac{1}{3}$ 0

$\mp4ax\sqrt{-ax}$

Seconde Transf. $6xy^2\pm12xy\sqrt{-ax}+4y^3\pm12yy\sqrt{-ax}-8axy+2ay^2\pm4ay\sqrt{-ax}-2aax+b^3=0$, qui étant mise sur le Triang: anal: donne l'éq: $\pm12xy\sqrt{-ax}-2a^2x=0$, ou $y=\pm\frac{aa}{6\sqrt{-ax}}$. Ainsi les trois prémiers.

Pl. XIV.

miers termes de la Série ſont $x = \pm\sqrt{-ax}$ Ch. VIII. §. 143. $\pm \frac{aa}{6\sqrt{-ax}}$ &c. Les deux prémiers repréſentent les ordonnées de la Parabole HAh, & le troiſiéme fait voir que les Branches de la Courbe embraſſent celles de la Parabole, qui eſt leur Aſymptote-courbe.

Pour connoître les Branches dont la derniére direction eſt AC, on ſubſtituera dans la transformée $(4q^3 - 6pq^2 + 2p^3)z^3 + (12q^2 - 12pq)uzz + (12q - 6p)uuz + 4u^3 + (2aq^2 + 4ap^2)zz + 4aquz + 2auu - b^3 = 0$, calculée ci-deſſus, $-\frac{1}{2}p$ au lieu de q, puiſque $q = Ap$, & que $A = -\frac{1}{2}$, comme il paroît en comparant l'éq: $y - \frac{1}{2}x = 0$ avec l'éq: $y - Ax = 0$. Par là cette transformée eſt réduite à $9ppuzz - 12puuz + 4u^3 + 4\frac{1}{2}appzz - 2apuz + 2auu - b^3 = 0$, qu'on mettra ſur le Tr: anal: où elle a une déterminatrice AB parallèle à la Bande ſans

z, qui donne l'éq: $9ppuzz + 4\frac{1}{2}appzz = 0$, ou $u = -\frac{1}{2}a$. Elle déſigne donc [§. 139] des Branches hyperboliques dont l'Aſymptote-droite eſt l'abſciſſe FEf, de l'ordonnée $AE = -\frac{1}{2}a$.

Pour ſavoir la poſition de ces Branches autour de leur Aſymptote, on portera l'Origine d'A en E, en ſubſtituant $-\frac{1}{2}a + t$ à u.

L'équa-

Digitized by Google

CH. VIII. §. 141. L'équation ordonnée par z PL. XIV.

$$(9ppu + 4\tfrac{1}{2}app)zz + (-12puu - 2apu)z + 4u^3 + 2auu - b^3$$
$$1 \quad 0 \qquad 2 \quad 1 \qquad 3 \quad 2 \quad 0$$

$$+(9pp)tzz \quad +(-24pu - 2ap)tz + (12uu + 4au)t$$
$$0 \qquad \tfrac{1}{2} \quad 0 \qquad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{1}{2}$$

$$-12ptuz \qquad +(12u + 2a)tt$$
$$0 \qquad \tfrac{1}{1} \quad 0$$

$$+4t^3$$

$$u = -\tfrac{1}{2}a$$

$$0 \quad -2a^2pz \quad -b^3$$
$$+9p^2tz^2 + 10aptz + aat$$
$$-12ptuz - 4att$$
$$+4t^3$$

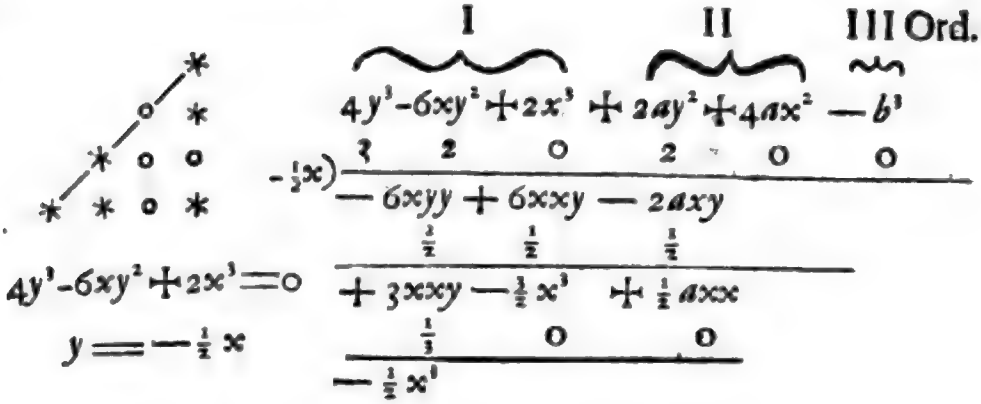
Cette Transformée miſe ſur le Triang : anal : a une déterminatrice utile AB qui donne $9pptz^2 - 2a^2pz = 0$, ou

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ * & * & * & o & \\ & * & * & o & \\ & & * & * & \\ & & * & B & \end{array}$$

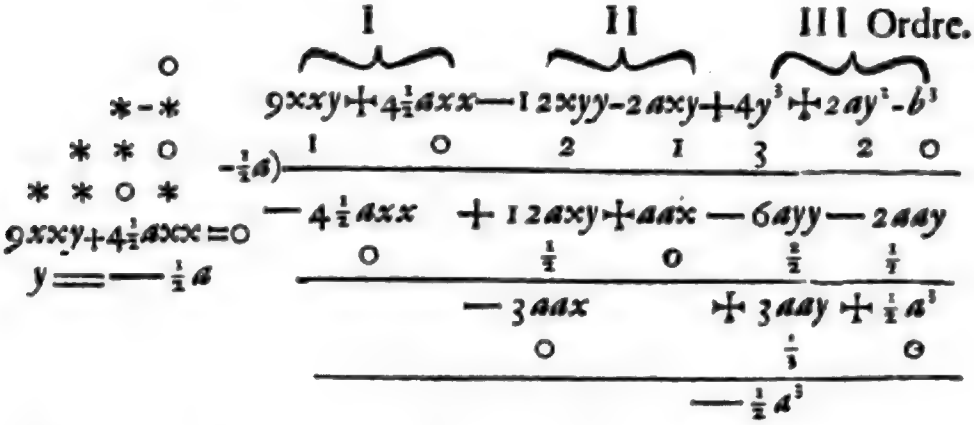
$t = \frac{2aa}{9pz}$: ce qui marque que les deux Branches hyperboliques accompagnent leur Aſymptote FEf dans les angles AEF, gEf des coordonnées de même ſigne.

On tire la même choſe de la Méthode des Séries. Le prémier terme étant $-\frac{1}{2}x$, on calculera le ſecond, &c. par l'abregé du §. 106.

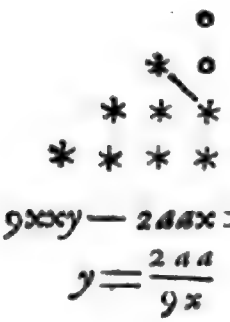
Pl. XIV. Ch. VIII. §. 143.



Prémiére Transformée $4y^3 - 12xyy + 9xxy + 2ay^2 - 2axy + 4\frac{1}{2}axx - b^3 = 0$.



Seconde Transformée, $9xxy - 12xyy + 10axy - 2aax + 4y^3 - 4ayy + aay - b^3 = 0$.



La Série commence donc par ces trois termes $-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}a+\frac{2aa}{9x}$; dont les deux prémiers expriment l'ordonnée de l'Aſymptote droite FEf, & le troiſiéme marque que les Branches de la Courbe tombent, du côté négatif auſſi bien

Fig. 99.

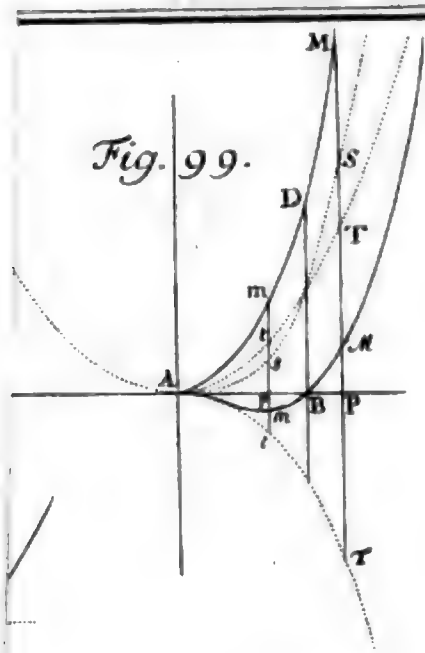


Fig. 100.

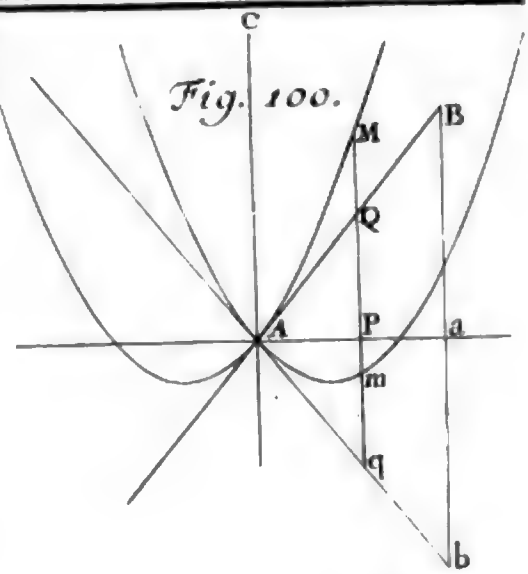


Fig. 102.

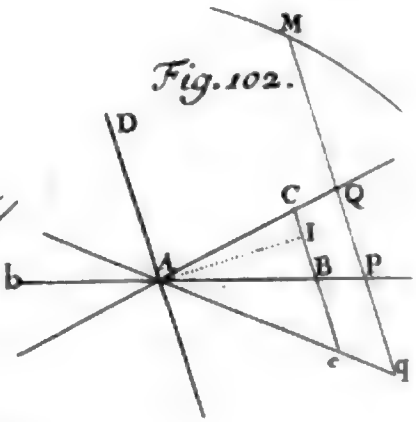


Fig. 103.

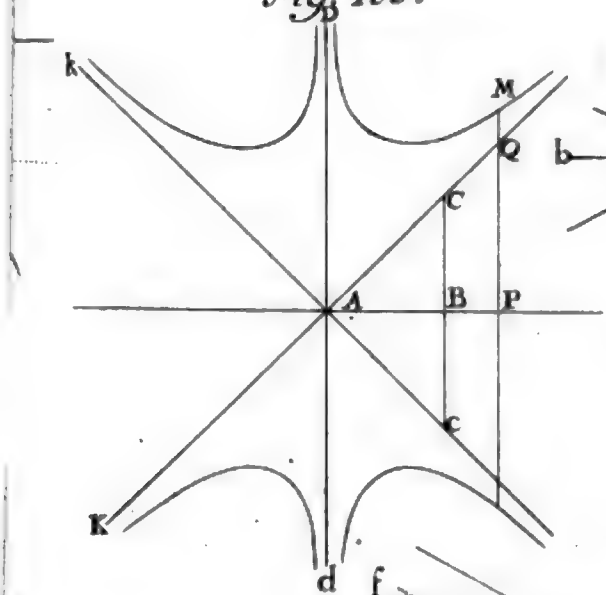
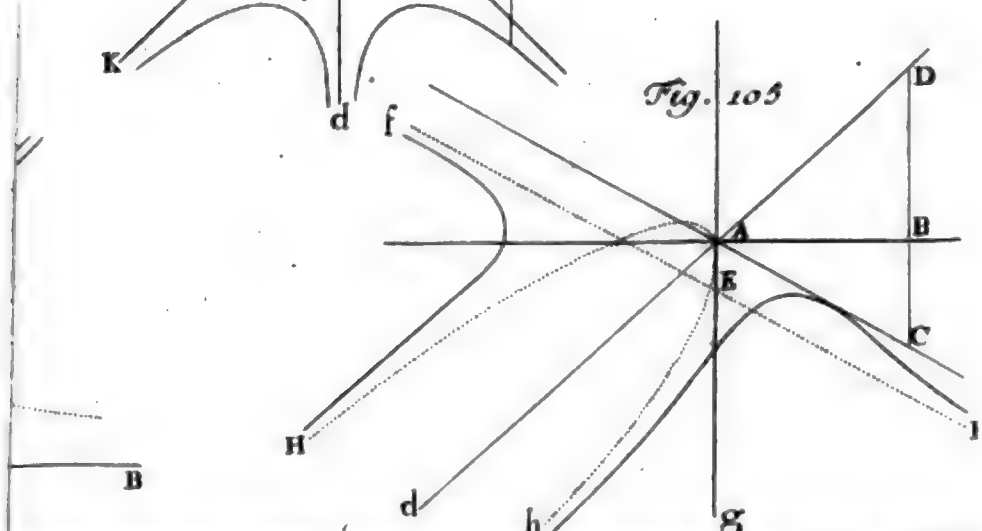


Fig. 105



Digitized by Google

CH. VIII. §. 143. bien que du côté positif, entre l'Asymptote droite & l'Axe des abscisses. PL. XV.

Exemple III. Soit $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 2axy^2 - 5ax^3 = 0$, l'équation d'une Courbe ; & $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 = 0$ sera celle de son plus haut Rang, qui a deux racines doubles $y - x = 0$, & $y + x = 0$. En les comparant avec la formule $y - Ax = 0$, on a $A = +1$, & $A = -1$, ou $A = \pm 1$, & par conséquent $q[=Ap] = \pm p$. Donc ici, comme dans l'*Ex. I*, on aura les dernières directions AC des Branches infinies, en donnant à l'abscisse $AB = 1$ les ordonnées $BC = +1$, & $Bc = -1$, & menant les Droites AC, Ac. Fig. 106. num. 1.

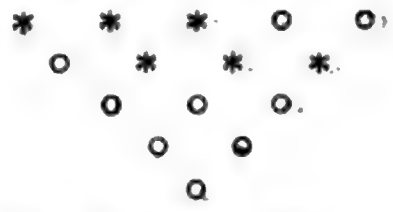
On transportera l'Axe des abscisses sur ces Droites, en substituant pz à x & $qz + u$ à y.

$$\begin{array}{l}
\underset{4}{(q^4} \underset{2}{- 2p^2q^2} \underset{0}{+ p^4)z^4} + \underset{2}{(2apq^2} \underset{1}{- 5ap^3)z^3} \\
\hline
+ \underset{\frac{3}{2}}{(4q^3} \underset{\frac{1}{2}}{- 4p^2q)uz^3} \quad + \underset{\frac{1}{2}}{(4apq)uz^2} \\
\hline
+ \underset{\frac{2}{3}}{(6q^2} \underset{0}{- 2p^2)u^2z^2} \quad + \underset{0}{(2ap)u^2z} \\
\hline
+ \underset{\frac{1}{4}}{(4q)u^3z} \\
\hline
+ (1)u^4
\end{array}$$

Et mettant $\pm p$ pour q dans la transformée, elle sera $4p^2u^2z^2 \pm 4pu^3z + u^4 - 3ap^3z^3 \pm 4ap^2uz^2 + 2apu^2z = 0$, où les signes supérieurs sont pour l'Axe AC, & les inférieurs pour l'Axe Ac.

Cette équation mise sur le Tr : anal : a deux déterminatrices. Celle qui traverse le plus haut Rang désigne la

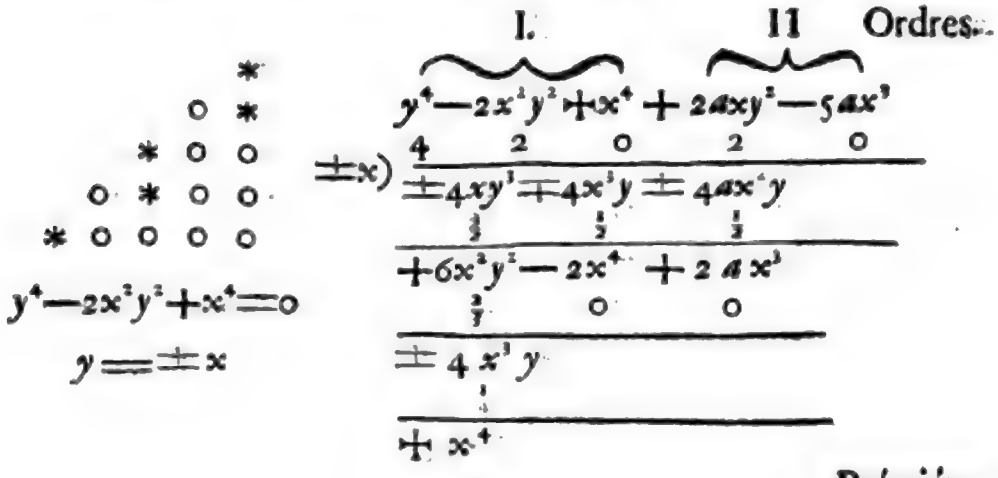
Pl. XV. derniére direction des Branches infinies qui n'eſt parallèle, ni aux abſciſſes, ni aux ordonnées. Ch. VIII. §. 143.



L'autre, qui paſſe par lès Caſes u^2z^2 & z^3, donne l'éq : $4p^2u^2z^2 - 3ap^3z^3 = 0$, ou $u^2 = \frac{3}{4}apz$, qui eſt à la Parabole ordinaire décrite, avec un Paramétre $= \frac{3}{4}ap$, ſur les Axes AD, AC, ou AD, Ac, dans la ſituation à peu près où l'on voit les Paraboles EAe, FAf, qui ſont les Paraboles-aſymptotes de la Courbe cherchée. Et puiſque la racine de l'éq : $4p^2u^2z^2 - 3ap^3z^3 = 0$ n'eſt pas multiple, chaque Branche AE, Ae, AF, Af de ces Paraboles eſt Aſymptote d'une Branche de Courbe.

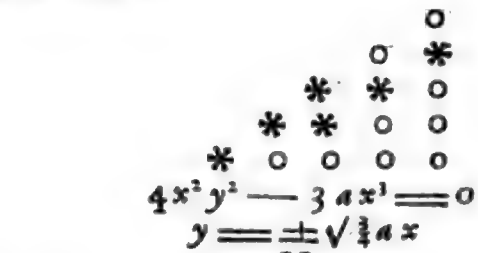
On trouvera la même choſe par la Méthode des Séries. On a déja le prémier terme $\pm x$ des deux Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'y en x : mais on cherchera encore le ſecond, troiſiéme & quatriéme terme, puiſqu'il faut aller juſques-là pour avoir un expoſant nègatif.

Voici tout le procédé du Calcul [§. 106].



Prémiére

Ch. VIII. Prémiére Transformée $y^4 \pm 4xy^3 + 4x^2y^2 + 2axy^2 \pm$ Pl. XV.
§. 143. $4ax^2y - 3ax^3 = 0$.



$4x^2y^2 - 3ax^3 = 0$

$y = \pm\sqrt{\frac{3}{4}ax}$

I II III Ordres.

$4x^2y^2 - 3ax^3 \pm 4xy^3 \pm 4ax^2y + y^4 + 2axy^2$ | $\pm\sqrt{\frac{1}{4}ax}$

2 0 3 1 4 2

$\pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 12xyy\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 4ax^2\sqrt{\frac{1}{4}ax} \pm 4y^3\sqrt{\frac{1}{4}ax} \pm 4axy\sqrt{\frac{1}{4}ax}$

$\frac{1}{2}$ $\frac{3}{2}$ 0 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$

$+3ax^3 \pm 9ax^2y + \frac{9}{2}axyy + \frac{1}{2}a^2x^2$

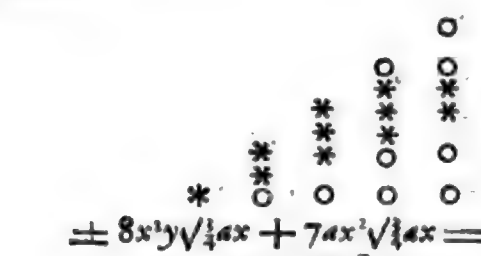
0 $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$ 0

$+3ax^2\sqrt{\frac{3}{4}ax} \pm 3axy\sqrt{\frac{1}{4}ax}$

0 $\frac{1}{2}$

$+\frac{9}{16}aaxx$

Seconde Transf. $4x^2y^2 \pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} \pm 4xy^3 + 12xy^2\sqrt{\frac{1}{4}ax} \pm 13ax^2y + 7ax^2\sqrt{\frac{1}{4}ax} + y^4 \pm 4y^3\sqrt{\frac{1}{4}ax} + \frac{1}{2}axy^2 \pm 7axy\sqrt{\frac{1}{4}ax} + \frac{13}{16}a^2x^2 = 0$.



$\pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 7ax^2\sqrt{\frac{1}{4}ax} = 0$

$y = \mp\frac{7}{8}a$

I II

$\mp 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 7ax^2\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 4x^2y^2 \pm 13ax^2y + \frac{13}{16}a^2x^2$ &c.

1 0 2 1 0

$\pm\frac{7}{8}a$) $-7ax^2\sqrt{\frac{1}{4}ax} \mp 7ax^2y - \frac{91}{8}a^2x^2$

0. $\frac{1}{2}$ 0

$+\frac{49}{16}a^2x^2$

PL. XV. Troiſiéme Transformée $\pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} + 4x^2y^2 \pm 6ax^2y - \frac{100}{16}a^2x^2$ &c. CH. VIII. §. 141.

On voit que dans cette troiſiéme opération, qui doit être la derniére, puiſqu'elle donnera à x un expoſant négatif, l'on a ſupprimé une bonne partie du Calcul, qui ne ſeroit pas néceſſaire. Car la déterminatrice, partant de la Caſe $x^{2+1:2}y$, portera ſur la Caſe x^2, à moins qu'elle ne ſoit vuide. Il ne s'agit donc que de ſavoir ſi cette Caſe eſt pleine, & quel eſt le terme qui y loge. Or pour cela il ſuffit de calculer le ſecond ordre, & on trouve que la Caſe x^2 contient le terme $-\frac{100}{16}a^2x^2$. On aura donc $\pm 8x^2y\sqrt{\frac{1}{4}ax} - \frac{100}{16}a^2x^2 = 0$, ou $y = \pm\frac{100aa}{64\sqrt{3ax}}$, pour le quatriéme terme de la Série.

Les trois prémiers $\pm x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} \mp \frac{7}{8}a$, expriment l'ordonnée d'une Aſymptote-courbe, qui ſe conſtruit ainſi. Fig. 106. num. 2. Par les extrémités de l'abſciſſe $AI = \frac{7}{8}a$, & des ordonnées AG, Ag, de même grandeur, qu'on méne les Droites GIH, gIh. Qu'on décrive, avec un Paramétre égal à $\frac{1}{4}a \times \frac{AI}{GI} = \frac{21aa}{32GI}$, une Parabole ordinaire OGN, ſur les Axes GA, GH, avec une derniére direction parallèle à GH. Qu'on décrive auſſi, avec un Paramétre égal à $-\frac{21aa}{32gI}$, une Parabole ogn, ſur les Axes gA, gh, ſa derniére direction étant parallèle à gh. Je dis que ces deux Paraboles ſont celles que repréſentent les éq: $v = x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} - \frac{7}{8}a$, & $v = -x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} + \frac{7}{8}a$. Car ſi on nomme GH, z, & HO, ou HN, u, l'équation de la Parabole OGN, rélativement aux coordonnées GH, & HO ou HN, eſt $uu = \frac{21aaz}{32GI}$. Mais, nommant AP, x, &

PO

CH. VIII. §. 143. PO ou PN, v, on aura AP [x] : GH [z] = AI [$\frac{7}{8}a$] : GI. Donc $z = \frac{x.GI}{\frac{7}{8}a}$; ce qui étant ſubſtitué dans l'éq : $uu = \frac{21aaz}{32GI}$, la transforme en $uu = \frac{1}{4}ax$, ou $u = \pm\sqrt{\frac{1}{4}ax}$. De plus PO, ou PN, [$v$] = PH [ou PI, ſoit AP — AI, c'eſt-à-dire $x - \frac{7}{8}a$] + HO, ou — HN [$\pm\sqrt{\frac{1}{4}ax}$]. Donc l'équation de la Parabole OGN, rélativement aux coordonnées AP, & PO ou PN, eſt $v = x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} - \frac{7}{8}a$. Et de même $v = -x \pm \sqrt{\frac{1}{4}ax} + \frac{7}{8}a$ eſt l'équation de la Parabole ogn rélativement aux coordonnées AP & Po ou Pn. PL. XV.

Les Paraboles OGN, ogn ſont donc les Aſymptotes-curvilignes de la Courbe propoſée : & le quatriéme terme de la Série, $\pm\frac{100aa}{64\sqrt{3ax}}$, fait voir que les Branches de la Courbe tombent, par raport à l'Axe des abſciſſes, au-delà des Branches GO, go, & en-deçà des Branches GN, gn, comme on le voit dans la *Fig.* 106. *n°.* 2, qui repréſente le cours de cette Ligne.

Exemple IV. Par le ſeul changement d'un ſigne, l'équation de l'Exemple précédent eſt changée en celle-ci, $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 2axy^2 - 5ax^4 = 0$ †. Et l'équation du prémier rang $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 = 0$ a quatre racines, deux imaginaires $+x\sqrt{(1-\sqrt{2})}$, $-x\sqrt{(1-\sqrt{2})}$, & deux réelles $+x\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, $-x\sqrt{(1+\sqrt{2})}$. Comme elles nous menacent d'un Calcul aſſez long, nous n'appliquerons à cet Exemple que la Méthode des Séries, & nous employerons la lettre A pour déſigner le nombre irrationel $\pm\sqrt{(1+\sqrt{2})}$. Il s'agit donc de ſubſtituer $Ax + u$ à y dans la propoſée.

$u^4 -$

† *Mem. de l'Acad.* 1731. pag. 30.

Pl. XV. Ordres. Ch. VIII. §. 143.

$$\begin{array}{l|l|l}
 & \overbrace{u^4 - 2x^2u^2 - x^4}^{\text{I}} & \overbrace{+ 2axu^2 - 5ax^3}^{\text{II}} \\
 & 4 \quad 2 \quad 0 & 2 \quad 0 \\
Ax) & + 4Axu^3 - 4Ax^3u & + 4Aax^2u \\
 & \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
 & + 6A^2x^2u^2 - 2A^2x^4 & + 2A^2ax^3 \\
 & \frac{1}{1} \quad 0 & 0 \\
 & + 4A^3x^3u & \\
 & \frac{1}{4} & \\
 & + A^4x^4 &
\end{array}$$

La transformée eſt donc $u^4 + 4Axu^3 + (6AA-2)x^2u^2 + (4A^3 - 4A)x^3u + (A^4 - 2A^2 - 1)x^4 + 2axu^2 + 4Aax^2u + (2A^2 - 5)ax^3 = 0$, où l'on peut d'abord remarquer que le terme $(A^4 - 2A^2 - 1)x^4$ eſt nul, puiſque la déterminatrice aboutiſſoit à la Caſe x^4. Mais le terme contigu $(4A^3 - 4A)x^3u$ ne manque pas, puiſque la racine $y - Ax = 0$ eſt racine ſimple de l'équation $y^4 - 2x^2y^2 - x^4 = 0$ que fournit cette déterminatrice. Ainſi mettant la transformée ſur le Tr: anal: couché ſur la Bande ſans x, on lui trouvera une déterminatrice parallèle à cette Bande, qui donne l'éq: $(4A^3 - 4A)x^3u + (2A^2 - 5)ax^3 = 0$, ou $u = -\frac{2AA-5}{4A^3-4A}a$ = [en mettant $= \sqrt{(1+\sqrt{2})}$ pour A] $= \pm\frac{3-2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}.\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a = \pm\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$.

Ces deux prémiers termes de la Série $\pm x\sqrt{(1+\sqrt{2})} \pm \frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$, montrent que la Courbe a quatre

Branches

CH. VIII. §. 143. Branches hyperboliques, & ils déterminent la poſition de leurs Aſymptotes-droites. Le prémier terme fait voir que ſi on donne à l'abſciſſe $AB = 1$, les ordonnées $BC = +\sqrt{(1+\sqrt{2})}$ & $Bc = -\sqrt{(1+\sqrt{2})}$, & qu'on méne les Droites AC, Ac, elles ſeront parallèles à la derniére direction des Branches infinies, & par conſéquent à leur Aſymptote. Et le ſecond terme aprend que ſi l'on prend les ordonnées $AE = +\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$, & $Ae = -\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$ & qu'on méne les Droites EF, ef parallèles à AC, Ac, elles ſeront les Aſymptotes cherchées. On peut auſſi, & cela eſt plus ſimple, prendre l'abſciſſe négative $AG = \frac{7\sqrt{2}-10}{8}a$, & mener par le point G, les Droites GF, gf parallèles à AC, Ac. Car il eſt aiſé de voir que les Droites EF, ef, ſe croiſent au point G, éloigné de l'Origine A de la diſtance $\frac{7\sqrt{2}-10}{8}a$. PL. XV. Fig. 107.

Si l'on veut aller plus loin & chercher la poſition de ces Branches hyperboliques autour de leurs Aſymptotes droites, il faut calculer encore un terme de la Série. Soit $\mp\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a$ nommé B. Il faut donc ſubſtituer $B+t$ à u dans la transformée, ou du moins dans les deux prémiers ordres de ſes termes. Car en conſidérant cette équation ſur le Triang: anal: on voit qu'il manquera dans

				o
			*	*
		*	*	o
	*	*	o	o
*	o	o	o	o

la ſeconde transformée le terme x^1, & qu'ainſi la déterminatrice

Pl. XV. natrice partant de la Caſe x^1y, portera ſur la Caſe x^2, ſi elle eſt pleine. Il s'agit donc de voir ſi elle l'eſt, & quel terme la remplit. Ch. VIII. §. 141.

I II Ordres.

$$(4A^3-4A)tx^3+(2A^2-5)ax^3+(6AA-2)t^2x^2+4Aatx^2 \text{ \&c.}$$

$$B)\quad +(4A^3-4A)Bx^3 \qquad +2(6AA-2)Btx^2+4ABax^2$$

$$+(6AA-2)BBx^2$$

On voit par ce Calcul, que la Caſe tx^3 loge le terme $(4A^3-4A)tx^3$, & la Caſe x^2 le terme $((6AA-2)BB+4ABa)x^2$. La déterminatrice, qui paſſe par ces deux Caſes, donnera donc

$$t = -\frac{(6AA-2)BB+4ABa}{4A^3-4A}x^{-1}$$

$$= [\text{puiſque } B = \pm\frac{3\sqrt{2}-4}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}a = \pm\frac{3\sqrt{2}-4}{8A}a]$$

$$-\frac{(6AA-2)(3\sqrt{2}-4)^2a^2:64AA+4(3\sqrt{2}-4)aa:8}{(4AA-4)A}x^{-1}$$

$$= -\frac{(6\sqrt{2}+4)(34-24\sqrt{2})+\frac{1}{2}\sqrt{2}-2}{\pm 4\sqrt{2}\times\sqrt{(1+\sqrt{2})}}aax^{-1} =$$

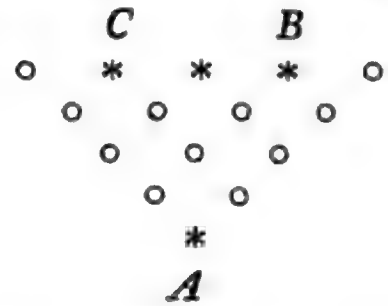
$$\mp\frac{-154+109\frac{1}{2}\sqrt{2}}{4\sqrt{2}.\sqrt{(1+\sqrt{2})}}aax^{-1} = \mp\frac{-154\sqrt{2}+219}{8\sqrt{(1+\sqrt{2})}}aax^{-1}.$$

Cette fraction étant poſitive, le ſigne $\mp$ qui la précéde montre que la Courbe tombe, de part & d'autre, entre l'Axe des abſciſſes AB & les Aſymptotes droites EF, ef. Car ſi l'on nomme cette fraction C, la Série ſera pour les Branches de l'Aſymptote EF, $y = Ax+B-\frac{Caa}{x}$ &c.

& pour

CH. VIII. & pour les Branches de l'Aſymptote ef, $y = -Ax -$ PL. XV.
§. 143. $B + \frac{Caa}{x}$, &c.

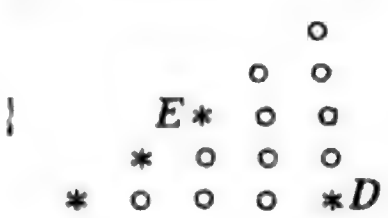
Exemple V. L'éq : $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - a^4 = 0$, miſe ſur le Triang : analyt : a trois déterminatrices AB,



AC, BC. Celles qui paſſent par la Pointe A indiquent des Branches qui ont les Axes pour Aſymptotes. Elles ſont auſſi indiquées par les racines $y = 0$, $x = 0$, de l'équation du plus haut Rang. Les équations que donnent ces déterminatrices, $x^3y - a^4 = 0$, ou $y = \frac{a^4}{x^3}$, & $xy^3 - a^4 = 0$, ou $x = \frac{a^4}{y^3}$, font voir que les Branches infinies qu'elles déſignent ſe jettent dans les angles des coordonnées de même ſigne, le long de l'un & de l'autre Axe.

La déterminatrice BC qui traverſe le plus haut Rang, donne l'éq : $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 = 0$, qui a, outre les racines $x = 0$, $y = 0$, dont on vient de parler, une racine double $y - x = 0$, qui nous aprend que la Courbe a encore des Branches infinies, dont la derniére direction AD coupe en deux également les angles BAC, bAc des coordonnées. Mais pour connoitre la nature de ces Branches, on cherchera encore un terme de la Série en Fig. 108.

Pl. XV. ſubſtituant $u + x$ à y dans l'équation propoſée, ce qui la transforme en $xu^3 + x^2u^2 - a^4 = 0$, qui étant miſe ſur le Triang: anal: a une déterminatrice utile DE, qui donne $x^2u^2 - a^4 = 0$, ou $u = \pm\frac{a^2}{x}$. Ce ſecond terme de la Série $y = x \pm \frac{a^2}{x}$ *&c.* marque deux Branches qui accompagnent de part & d'autre les deux parties AD, Ad, de la Droite DAd, qui eſt la derniére direction & l'Aſymptote droite de ces Branches. Ch. VIII. §. 143.



Ainſi la Courbe a huit Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes BAb, CAc, DAd, qui ſe croiſent au Point A, ſemblable en cela à la Courbe de l'*Exemple I.* En effet, c'eſt la même Courbe dans une poſition différente. Car ſi l'on prend AD pour l'Axe des ordonnées, & la perpendiculaire AE pour celui des abſciſſes, on aura [à cauſe des angles demi-droits QAS, QMR] $AP\,[x] = PS - AS = QR\,[\frac{u}{\sqrt{2}}] - AS\,[\frac{z}{\sqrt{2}}]$, & $PM\,[y] = PR + RM = QS\,[\frac{z}{\sqrt{2}}] + RM\,[\frac{u}{\sqrt{2}}]$. Et ces valeurs de x & de y, ſubſtituées dans l'équation de la Courbe $x^3y - 2x^2y^2 + xy^3 - a^4 = 0$, la transforment en $uuzz - z^4 - a^4 = 0$, ou $z^4 - uuzz + a^4 = 0$, qui eſt l'équation de la Courbe examinée dans l'*Exemple I.*

Exem-

Ch. VIII. §. 143. *Exemple VI.* Soit enfin l'éq : $y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + x^5 - 2ay^4 - 4axy^3 + 4ax^3y + 2ax^4 + a^2y^3 + a^2xy^2 - a^2x^2y + a^2x^3 - a^2b^3 = 0$. Cet Exemple eſt aſſez compoſé, & par là propre à faire connoitre comment il faut s'y prendre pour éviter tout le Calcul ſuperflu. Pl. XV.

Le plus haut Rang, ſur lequel eſt appliquée la ſeule déterminatrice ſupérieure qu'ait l'équation propoſée, eſt préciſément la cinquiéme puiſſance $y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + y^5$ de $y + x$. Ce Rang égalé à zéro n'a donc qu'une ſeule racine, mais quintuple, $y + x = 0$, ou $y = -x$; ce qui marque que la derniére direction des Branches infinies de la Courbe eſt parallèle à la Droite B A C qui coupe en deux également l'angle des coordonnées de différents ſignes. Cette même équation marque que le prémier terme de la Série deſcendante qui donne y en x, eſt $-x$. Pour avoir le ſecond, on ſubſtituera $-x + u$ à y. Fig. 109. num. 1.

Ord. I. II III IV.

$y^5+5xy^4+10x^2y^3+10x^3y^2+5x^4y+x^5-2ay^4-4axy^3+4ax^3y+2ax^4+a^2y^3+a^2xy^2-a^2x^2y+a^2x^3-a^2b^3$

5. 4. 3. 2. 1. 0 4. 3. 1. 0 3. 2. 1. 0 0

$-x)$

$-5xy^4-20x^2y^3-30x^3y^2-20x^4y-5x^5 \quad +8axy^3+12ax^2y^2-4ax^4 \quad -3a^2xy^2+2a^2x^2y+a^2x^3$

$\frac{4}{1}$ $\frac{3}{1}$ $\frac{2}{1}$ $\frac{1}{1}$ 0 $\frac{3}{1}$ $\frac{2}{1}$ 0 $\frac{2}{1}$ $\frac{1}{1}$ 0

$+10x^2y^3+30x^3y+30x^4y+10x^5 \quad -12ax^2y-12ax^3y \quad +3a^2xy-a^2x^2$

$\frac{3}{2}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0 $\frac{2}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0

$-10x^3y^2-20x^4y-10x^5 \quad +8ax^2y+4ax^3 \quad -a^2x^2$

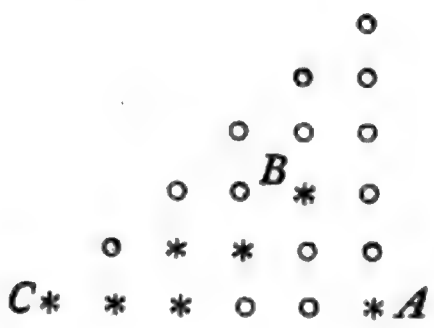
$\frac{3}{3}$ $\frac{1}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$ 0 0

$+5x^4y-5x^5 \quad -2ax^3$

$\frac{1}{4}$ 0 0

$-x^5$

PL. XV. Et la prémiére transformée ſera $y^5 - 2ay^4 + 4axy^3 + a^2y^3 - 4a^2xy^2 + 4a^3x^2y - a^4b^3 = 0$. En la mettant ſur le Tr: analyt: couché ſur la Bande ſans x, on lui trouve deux déterminatrices ſupérieures AB, BC. CH. VIII. §. 143.



L'une AB, qui porte ſur les plus hautes Caſes des deux prémiéres colomnes, donne $4a^2x^2y - a^4b^3 = 0$, ou $y = \frac{b^3}{4x^2}$. Il n'eſt pas beſoin de continuer plus loin la Série $y = -x + \frac{b^3}{x^2}$ &c. parce que dès le ſecond terme elle eſt réguliére. Elle indique deux Branches hyperboliques, qui accompagnent, dans les angles des ordonnées poſitives, leur Aſymptote droite B A C.

L'autre déterminatrice BC donne $y^5 + 4axy^3 + 4a^2x^2y = 0$, ou, diviſant par y, $y^4 + 4axy^2 + 4a^2x^2 = 0$, dont la racine quarrée $yy + 2ax = 0$, ſe réſout en ces deux-ci, $y = +\sqrt{-2ax}$, $y = -\sqrt{-2ax}$, qui ſont imaginaires, quand on prend x. poſitive. Et comme l'une & l'autre eſt racine double de l'éq: $y^4 + 4axy^2 + 4a^2x^2 = 0$, on ne doit encore rien affirmer des termes ſuivans; mais on continuera le Calcul en ſubſtituant $\pm\sqrt{-2ax} + y$ à y dans la prémiére transformée.

$y^5 -$

Ord. I II III IV

$y^5 + 4axy^3 + 4a^2x^2y - 2ay^4 - 4a^2xy^2 + a^2y^3 - a^2b^3$

5. 3. 1 4. 2 3 0

$\pm\sqrt{-2ax}$

$\pm 5y^4\sqrt{-2ax} \pm 12axy^2\sqrt{-2ax} \pm 4a^2x^2\sqrt{-2ax} \mp 8ay^3\sqrt{-2ax} \mp 8a^2xy\sqrt{-2ax} \pm 3a^2y^2\sqrt{-2ax}$

$\frac{4}{2}$ $\frac{2}{2}$ 0 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{2}$

$-20axy^3 - 24a^2x^2y + 24a^2xy^2 + 8a^3x^2 - 6a^3xy$

$\frac{3}{3}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ 0 $\frac{1}{3}$

$\mp 20axy^2\sqrt{-2ax} \mp 8a^2x^2\sqrt{-2ax} \pm 16a^2xy\sqrt{-2ax} \mp 2a^3x\sqrt{-2ax}$

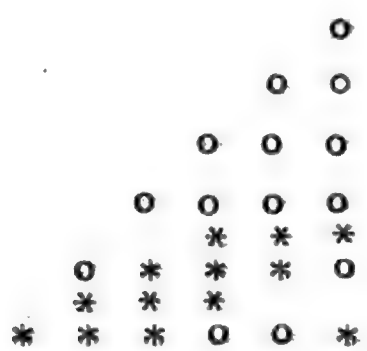
$\frac{2}{4}$ 0 $\frac{1}{4}$ 0

$+20a^2x^2y - 8a^3x^3$

$\frac{1}{5}$ 0

$\pm 4a^2x^2\sqrt{-2ax}$

Ainſi la ſeconde Transformée eſt $y^5 \pm 5y^4\sqrt{-2ax} - 16axy^3 \mp 8axy^2\sqrt{-2ax} - 2ay^4 \mp 8ay^3\sqrt{-2ax} + 20a^2xy^2 \pm 8a^2xy\sqrt{-2ax} + a^2y^3 \pm 3a^2y^2\sqrt{-2ax} - 6a^3xy \pm 2a^3x\sqrt{-2ax} - a^2b^3 = 0$. Sur le Triang: anal: elle n'a qu'une déterminatrice utile, ſavoir celle qui eſt horizontale, & qui donne $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} \pm 8a^2xy\sqrt{-2ax} \mp 2a^3x\sqrt{-2ax} = 0$, ou, diviſant par $\mp 8ax\sqrt{-2ax}$, $yy - ay + \frac{1}{4}aa = 0$ qui a une ſeule racine, mais double, $y - \frac{1}{2}a = 0$.



Elle

PL. XV. Elle marque que $+\frac{1}{2}a$ eſt un troiſiéme terme commun aux deux Séries, qui commencent par $-x \pm \sqrt{-2ax}$. Mais cette racine $y-\frac{1}{2}a=0$ étant double, elle oblige à calculer encore le terme ſuivant, d'autant mieux que, dans celui-ci, l'expoſant d'x n'eſt pas encore négatif. Et comme il y a lieu de préſumer qu'il ſuffira de trouver encore un ſeul terme, on cherchera à s'épargner du calcul en ſubſtituant $\frac{1}{2}a+y$ à y, ſeulement dans les termes des deux prémiers ordres. CH. VIII. § 141.

I II Ordre.

$$\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} \pm 8a^2xy\sqrt{-2ax} \mp 2a^3x\sqrt{-2ax} - 16axy^3 + 20a^2xy^2 - 6a^3xy, \&c.$$
$$2 \qquad 1 \qquad 0 \qquad 3 \qquad 2 \qquad 1$$

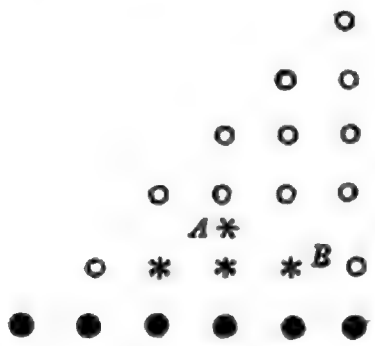
$\frac{1}{2}a)$

$$\mp 8aaxy\sqrt{-2ax} \pm 4a^3x\sqrt{-2ax} \qquad -24aaxy^2 + 20a^3xy - 3a^4x$$
$$\frac{1}{2} \qquad 0 \qquad\qquad \frac{2}{2} \qquad \frac{1}{2} \qquad 0$$

$$\pm 2a^3x\sqrt{-2ax} \qquad -12a^2xy + 5a^4x$$
$$0 \qquad\qquad \frac{1}{2} \qquad 0$$

$$-2a^4x$$

Le prémier ordre ſe réduit au ſeul terme $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax}$, & le ſecond à $-16axy^3 - 4a^2xy^2 + 2a^3xy$. Et ces termes étant mis ſur le Triang; analyt: on voit que la dé-



terminatrice AB paſſe par les Caſes $x^{1:2}yy$ & xy, & qu'étant

Ch.VIII. §. 143. tant continuée elle traverſe la Caſe $x^{1:2}$. Il faut donc examiner ſi cette Caſe eſt pleine ou vuide. Ce ſont les termes du troiſiéme ordre qui doivent la remplir. On ſubſtituera donc $\frac{1}{2}a + y$ à y dans les termes du troiſiéme ordre de la ſeconde transformée. Pl.XV.

III Ordre.

$$\overbrace{\pm 5y^4\sqrt{-2ax} \mp 8ay^3\sqrt{-2ax} \pm 3a^2y^2\sqrt{-2ax}}$$
$$\overset{4}{\qquad} \overset{3}{\qquad} \overset{2}{\qquad}$$

$\frac{1}{2}a)$
$$\pm 10ay^3\sqrt{-2ax} \mp 12a^2y^2\sqrt{-2ax} \pm 3a^3y\sqrt{-2ax}$$
$$\overset{\frac{5}{2}}{\qquad} \overset{\frac{4}{2}}{\qquad} \overset{\frac{3}{2}}{\qquad}$$
$$\pm \tfrac{15}{2}a^2y^2\sqrt{-2ax} \mp 6a^3y\sqrt{-2ax} \pm \tfrac{1}{4}a^4\sqrt{-2ax}$$
$$\overset{\frac{3}{3}}{\qquad} \overset{\frac{2}{3}}{\qquad} \overset{0}{\qquad}$$
$$\pm \tfrac{5}{2}a^3y\sqrt{-2ax} \mp a^4\sqrt{-2ax}$$
$$\overset{\frac{1}{4}}{\qquad}$$
$$\pm \tfrac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax}$$

Ils ſe réduiſent à $\pm 5y^4\sqrt{-2ax} \pm 2ay^3\sqrt{-2ax} \mp \frac{3}{2}a^2y^2\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} \pm \frac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax}$. Ce dernier terme, ayant ſa place dans la Caſe $x^{1:2}$, ſe trouve ſur la déterminatrice, qui donnera l'équation $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} + 2a^3xy \pm \frac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} = 0$, ou, diviſant par $\mp 8ax\sqrt{-2ax}$, $yy \mp \frac{2a^2}{8\sqrt{-2ax}}y - \frac{a^3}{128x} = 0$, dont la racine quarrée eſt $y \mp \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} = 0$. Les deux Séries, que nous ſuivons, ont donc pour leur quatriéme terme, l'une $+\frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}$, l'autre $-\frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}$.

Quoique dans ce terme l'expoſant d'x ſoit négatif; cependant, comme il eſt racine double de l'équation qui le

Pl.XV. donne, il eſt néceſſaire de continuer le Calcul, en ſubſti- Ch.VIII. §. 43.
tuant $\mp \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} + y$ à y dans la troiſiéme transformée. Mais pour cela il faut l'avoir complette; & juſqu'ici nous n'avons que les termes qui ont réſulté de ceux des trois prémiers ordres. Il faut donc achever la transformation en ſubſtituant $\frac{1}{2}a + y$ à y dans le quatriéme ordre:

IV Ordre.

$$+ y^5 - 2ay^4 + a^2y^3 - a^2b^3$$
$$5 \quad 4 \quad 3 \quad 0$$

$\frac{1}{2}a$)

$$+\tfrac{5}{2}ay^4 - 4a^2y^3 + \tfrac{1}{2}a^3y^2$$
$$\tfrac{4}{2} \quad \tfrac{3}{2} \quad \tfrac{2}{2}$$

$$+\tfrac{5}{2}a^2y^3 - 3a^3y^2 + \tfrac{1}{4}a^4y$$
$$\tfrac{3}{3} \quad \tfrac{2}{3} \quad \tfrac{1}{3}$$

$$+\tfrac{5}{4}a^3y^2 - a^4y + \tfrac{1}{8}a^5$$
$$\tfrac{2}{4} \quad \tfrac{1}{4} \quad 0$$

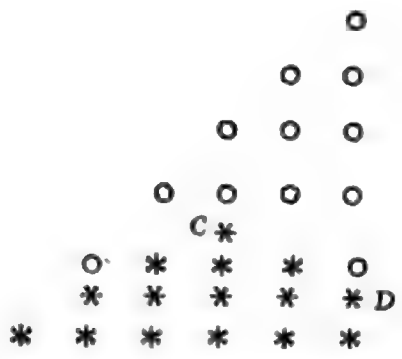
$$+\tfrac{5}{16}a^4y - \tfrac{1}{8}a^5$$
$$\tfrac{1}{5} \quad 0$$

$$+\tfrac{1}{12}a^5$$

Et il en réſulte $y^5 + \frac{1}{2}ay^4 - \frac{5}{2}a^2y^3 - \frac{1}{4}a^3y^2 + \frac{3}{16}a^4y + \frac{2}{32}a^5 - a^2b^3$.

Réuniſſant les réſultats de ces différents ordres, la troiſiéme transformée complette eſt $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} - 16axy^3 - 4a^2xy^2 + 2a^3xy \mp 5y^4\sqrt{-2ax} \mp 2ay^3\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{2}a^2y^2\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} \mp \frac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} + y^5 + \frac{1}{2}ay^4 - \frac{1}{2}a^2y^3 - \frac{1}{4}a^3y^2 + \frac{3}{16}a^4y + \frac{1}{32}a^5 - a^2b^3 = 0$. Cette transformée miſe ſur le Triang: anal: a, rélativement à la déterminatrice CD qui paſſoit par les Caſes $x^{3-3}yy$, xy, &

CH. VIII. §. 143. & $x^{1:2}$ & qui a donné l'éq : $y = \mp \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}$, ſept or- PL. XV. dres de termes.



Il eſt probable qu'il ne ſera pas beſoin d'aller au-delà du terme que nous cherchons ; c'eſt le cinquiéme de la Série. Ainſi nous commencerons par ſubſtituer $\mp \frac{aa}{8\sqrt{-2ax}} + y$ à y dans les deux prémiers Ordres.

I II Ordre.

$$\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} + 2a^3xy \pm \tfrac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} - 4a^2xy^2 \mp \tfrac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} + \tfrac{1}{32}a^5 - a^2b^3 \text{ \&c.}$$

$$\pm\frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}}\Big)\ 2 \quad 1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad 0$$

$$-2a^3xy \quad \mp\tfrac{1}{8}a^4\sqrt{-2ax} \quad \pm\tfrac{1}{2}a^3y\sqrt{-2ax} - \tfrac{1}{16}a^5$$

$$\tfrac{1}{2} \qquad 0 \qquad \tfrac{1}{2}$$

$$\pm\tfrac{1}{16}a^4\sqrt{-2ax} \qquad + \tfrac{1}{32}a^5$$

Les termes du prémier ordre ſe réduiſent à $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax}$, & ceux du ſecond à $-4a^2xy^2 - a^2b^3$. Donc la déterminatrice paſſera par la Caſe $x^{1:2}y^2$, & par la Pointe, & donnera l'éq : $\mp 8axy^2\sqrt{-2ax} - a^2b^3 = 0$, ou $y^2 = \mp\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}$. Le ſigne — a lieu pour la prémiére, &

Pl. XV. le ſigne + pour la ſeconde des deux Séries que nous cal- Ch. VIII. §. 143.
culons. Donc pour la prémiére $y = \pm\sqrt{-\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$, & pour la ſeconde $y = \pm\sqrt{\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$, grandeur imaginaire. Car ſi on prend x poſitive, $\sqrt{-2ax}$ eſt imaginaire, & ſi on prend x négative, $\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}$ eſt négative, & ſa racine eſt imaginaire. Ainſi la ſeconde de nos deux Séries a ſon cinquiéme terme imaginaire, & elle-même l'eſt entiérement. Mais la prémiére, qui ne l'eſt qu'à demi, ſe fourche en deux $y = -x + \sqrt{-2ax} + \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} + \sqrt{-\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$ &c. & $y = -x + \sqrt{-2ax} + \frac{1}{2}a + \frac{a^2}{8\sqrt{-2ax}} - \sqrt{-\frac{a^2b^3}{8ax\sqrt{-2ax}}}$ &c.

Ces deux Séries, avec la prémiére $y = -x + \frac{b^3}{4xx}$ &c. font voir que la Courbe a quatre Branches infinies, dont
Fig. 109. num. 1. deux DB, EC ſont hyperboliques, & ont pour Aſymptote la Droite BAC dont l'ordonnée eſt le prémier terme $-x$ de la prémiére Série. Les deux autres EF, HG ſont paraboliques, & ont pour Aſymptote-curviligne la Courbe IKL, à l'abſciſſe x de laquelle répond l'ordonnée que repréſentent ces quatre termes, $-x + \sqrt{-2ax} + \frac{1}{2}a + \frac{aa}{8\sqrt{-2ax}}$.

On verra plus clairement la poſition des Branches de cette Courbe, en la raportant à deux autres Axes, dont l'un eſt l'Aſymptote droite CAB & l'autre ſa perpendiculaire AN. Alors le point M de la Courbe, au lieu des coordonnées AP [x] & PM [y], aura les coordonnées AQ [z] & QM [u], dont les raports s'expriment par les équat:

CH. VIII. §. 143. PL. XV.

équat : $x = \frac{z - u}{\sqrt{2}}$, & $y = \frac{z + u}{\sqrt{2}}$; valeurs qui ſubſtituées dans l'éq : $y^5 + 5xy^4 + 10x^2y^3 + 10x^3y^2 + 5x^4y + x^5 - 2ay^4 - 4axy^3 + 4ax^3y + 2ax^4 + aay^3 - aaxy^2 - aax^2y + aax^3 - aab^3 = 0$, ou $(y + x)^5 - 2a(y - x)(y + x)^3 + aa(y + x)(y - x)^2 - a^2b^3 = 0$, la changent en $(\frac{2z}{\sqrt{2}})^5 - 2a(\frac{2u}{\sqrt{2}})(\frac{2z}{\sqrt{2}})^3 + aa(\frac{2z}{\sqrt{2}})(\frac{2u}{\sqrt{2}})^2 - a^2b^3 = 0$, ou $4z^5\sqrt{2} - 8azu^3 + 2aazuu\sqrt{2} - a^2b^3 = 0$, ou encore, faiſant $\frac{a}{\sqrt{2}} = c$ & $\frac{b}{\sqrt{2}} = d$, en $z^5 - 2cz^3u + cczuu - ccd^3 = 0$. Cette équation ſe réduit à $z^4 - 2czzu + ccuu = \frac{ccd^3}{z}$ ou $zz - cu = \pm cd\sqrt{\frac{d}{z}}$, ſoit $u = \frac{zz}{c} \mp d\sqrt{\frac{d}{z}}$, qui ſe conſtruit ainſi.

Sur les Axes AB, AC on décrira la Parabole DAd, dont le Paramétre eſt c, de ſorte que l'abſciſſe AP [z] a l'ordonnée $PO = \frac{zz}{c}$. On décrira auſſi l'Hyperbole CNB, cnB, dont l'ordonnée PN, ou Pn, eſt $\pm d\sqrt{\frac{d}{z}}$. Alors donnant à chaque abſciſſe AP deux ordonnées PM, Pm égales, l'une à la ſomme On, l'autre à la différence ON des ordonnées de l'Hyperbole & de la Parabole, on aura la Courbe cherchée CMDmc. Car ſon ordonnée [u] eſt égale à $\frac{zz}{c} \pm d\sqrt{\frac{d}{z}}$, & par conſéquent ſon équation eſt $z^5 - 2cz^3u + cczuu - ccd^3 = 0$. Mais en la raportant aux Axes EAe, FAf, qui coupent également les quatre angles que font entr'eux les Axes CAc, BAb, ſon équation ſera juſtement celle qui a été propoſée dans cet *Exemple.* Fig. 109. num. 2.

Pl. XV. *Exemple.* Dans cette conſtruction il eſt aiſé de reconnoître que la Courbe a des Branches hyperboliques MC, mc, dont CAc eſt l'Aſymptote, & des Branches paraboliques MD, mD, dont l'Aſymptote eſt la Branche AOD de la Parabole dAD: On le reconnoit, dis-je, aiſément, en conſidérant que près de l'Origine, les ordonnées de l'Hyperbole CNBnc l'emportent de beaucoup ſur les ordonnées de la Parabole dAD, & que loin de l'Origine, c'eſt tout le contraire. Ch. VIII. §. 143.

144. Nous finirons ce Chapitre par quelques conſidérations générales ſur les Branches infinies des Courbes & ſur les Aſymptotes droites.

I. Les Branches infinies d'une Courbe ſont toûjours en nombre pair *.

L'ordonnée d'une Branche infinie de Courbe s'exprime par une Série deſcendante $Ax^b + Bx^i + Cx^k$ &c. qui eſt ou entiérement imaginaire, ou demi-imaginaire, ou réelle [§. 95]. Lorſqu'elle eſt entiérement imaginaire, la Branche, dont cette Série devroit marquer l'ordonnée, eſt imaginaire. Cette Série eſt réelle, lorſque tous les expoſants b, i, k, &c. ſont des nombres entiers, poſitifs ou négatifs, ou des nombres rompus dont le dénominateur eſt un nombre impair. Alors la grandeur qu'exprime cette Série eſt réelle, ſoit qu'on prenne x poſitive, ſoit qu'on la prenne négative. Ainſi cette Série repréſente deux Branches infinies, une du côté des abſciſſes poſitives, une du côté des négatives.

Enfin, la Série eſt demi-imaginaire lorſqu'un, ou pluſieurs, des expoſants b, i, k, &c. eſt une fraction d'un dénominateur pair, & d'un numerateur impair. Dans ce

* Stirling, *Lin. tert. Ord.* Newton. Prop. I. Cor. 3. Mr. De Gua, *Uſage de l'Anal.* pag. 47.

Digitized by Google

CH. VIII. §. 144. ce cas, la Série n'eſt réelle que quand on prend x poſitive, ou quand on la prend négative. La Branche indiquée par cette Série ne s'étend que du côté des abſciſſes poſitives, ou du côté des négatives. Mais en échange, lors qu'on donne à x le ſigne qui rend réels les termes demi-imaginaires, ces termes ont deux valeurs, une poſitive & une négative, parce qu'une racine paire a également le ſigne + & le ſigne —. Ainſi la Série eſt double, & exprime deux ordonnées. Il y a donc deux Branches infinies qui répondent à cette Série, & qui ſont ſituées, non pas de part & d'autre de l'Axe des ordonnées, mais toutes deux d'un même côté. Donc, dans tous les Cas, le nombre des Branches d'une Courbe eſt un nombre pair. PL. XV.

145. II. Toute Ligne algébrique d'un Ordre impair a, au moins, deux Branches infinies *.

Parce que dans toute équation d'un Ordre impair, l'une ou l'autre des coordonnées a ſon plus haut expoſant impair. Prenons que ce ſoit l'ordonnée. Donc en la regardant comme l'inconnuë, quelque valeur qu'on prenne pour l'abſciſſe, l'ordonnée aura toûjours une valeur réelle, puiſqu'une équation d'un dégré impair ne peut avoir toutes ſes racines imaginaires. Ainſi toutes les abſciſſes, tant poſitives que négatives à l'infini, ont au moins une ordonnée réelle. La Courbe a donc au moins deux Branches infinies, une d'un côté, l'autre de l'autre, de l'Axe des ordonnées.

146. III. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans le double de l'expoſant de ſon Ordre.

Car

* STIRLING, *Lin. tert. Ord.* Newt. Pr. VI. Cor. 5.
Mr. NICOLE, *Mem. de l'Ac.* 1729. p. 198.

gitized by Google

PL. XV. Car en prenant les ordonnées de façon que leur Axe ne ſoit parallèle à la derniére direction d'aucune des Branches infinies de la Courbe, toutes ces Branches s'éloigneront à l'infini de cet Axe. Donc leurs ordonnées ſeront repréſentées par des Séries deſcendantes, qui donnent la valeur d'y en x. Or l'équation ne peut fournir plus de pareilles Séries qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de la plus haute puiſſance d'y : parce que ces Séries ſont les racines de l'équation, où l'on regarde y comme l'inconnuë, & qu'une équation ne peut avoir plus de racines qu'il n'y a d'unités dans le plus haut expoſant de ſon inconnuë. Et l'expoſant de la variable y ne peut jamais ſurpaſſer l'expoſant de l'Ordre de la Courbe. Donc on ne ſauroit avoir plus de Séries qui donnent y en x, qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de la Courbe. Mais chaque pareille Série ne peut indiquer, au plus, que deux Branches infinies, & pour cela il faut qu'elle ſoit réelle. Donc, une Courbe ne peut avoir, au plus, que deux fois autant de Branches infinies qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de cette Courbe. CH. VIII. §. 146.

147. IV. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Aſymptotes droites qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de ſon Ordre *.

Cette Propoſition ſe prouve par le même raiſonnement que la précédente. Si l'on prend les ordonnées de ſorte qu'elles ne ſoient parallèles à aucune Aſymptote, l'ordonnée de chaque Branche hyperbolique ſera repréſentée par une Série telle que $Ax + B + Cx^{-k}$ &c. dont les deux prémiers termes $Ax + B$ expriment l'ordonnée de l'Aſymptote [§. 131]. A ſera zéro, ſi l'Aſymptote eſt parallèle aux

* STIRLING, Prop. VI. Cor. 7.

Ch. VIII. §. 147. aux abſciſſes; B ſera zéro, ſi elle paſſe par l'Origine; ainſi A & B ſeront zéro, ſi l'Aſymptote eſt l'Axe des abſciſſes. Il ne ſauroit y avoir plus d'Aſymptotes droites qu'il n'y a de pareilles Séries. Et l'équation de la Courbe n'en ſauroit donner plus qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de la Courbe. Donc le nombre des Aſymptotes droites ne peut ſurpaſſer les nombres des unités contenuës dans cet expoſant. Pl. XV.

148. V. Lorſque la Courbe a autant d'Aſymptotes droites que l'expoſant de ſon Ordre a d'unités, toutes ſes Branches infinies ſont hyperboliques. Car les ordonnées étant priſes de ſorte qu'elles ne ſoient parallèles à aucune Aſymptote, toutes les Séries deſcendantes qui donnent la valeur d'y en x, c'eſt-à-dire, toutes celles qui peuvent exprimer l'ordonnée d'une Branche infinie de la Courbe, commencent par trois termes tels que $Ax+B+Cx^{-k}$ &c. [où A & B peuvent être zéro]. Elles repréſentent donc des Branches hyperboliques [§. 131], & la Courbe n'en a point d'autres.

En effet, puiſque chaque Aſymptote droite a deux Branches hyperboliques, & qu'une Courbe ne peut avoir plus de Branches infinies qu'il n'y a d'unités dans le double de l'expoſant de ſon Ordre; ſi elle a autant d'Aſymptotes droites qu'il y a d'unités dans cet expoſant, toutes ſes Branches infinies ſeront hyperboliques.

149. VI. Dans le même Cas, c'eſt-à-dire, quand une Courbe algébrique a autant d'Aſymptotes droites qu'une Courbe de ſon Ordre en peut avoir; toute Droite qui coupe toutes ces Aſymptotes, & qui rencontre la Courbe en autant de points, eſt coupée de façon que la ſomme des parties interceptées entre la Courbe & les Aſymptotes

PL. XV. eſt égale à la ſomme des parties interceptées entre les Asymptotes & la Courbe [§. 65] *. CH. VIII. §. 148.

Car ſi l'on prend cette Droite & ſes parallèles pour les ordonnées ; puiſqu'elle coupe la Courbe en autant de points qu'il y a d'Aſymptotes, c'eſt-à-dire, en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant de l'Ordre de la Courbe, l'équation ſera telle que le plus haut expoſant d'y ſera égal à l'expoſant de l'Ordre. Soit v cet expoſant, $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ les deux prémiers termes de l'équation, & $y = A'x + B' + C'x^{-k}$ &c. $y = A''x + B'' + C''x^{-k}$ &c. $y = A'''x + B''' + C'''x^{-k}$ &c. &c. les Séries deſcendantes, qui donnent y en x, tirées de cette équation. Ainſi $y - A'x - B' - C'x^{-k}$ &c. $= 0$, $y - A''x - B'' - C''x^{-k}$ &c $= 0$, $y - A'''x - B''' - C'''x^{-k}$ &c $= 0$ ſont les racines de l'éq: $y^v + (ax + b)y^{v-1}$ &c $= 0$, & cette équation n'eſt autre choſe que le produit de ces racines, dont le nombre eſt ſuppoſé v. Le prémier terme de ce produit eſt y^v, & le ſecond eſt $-(A'x + B' + C'x^{-k}$ &c $+ A''x + B'' + C''x^{-k}$ &c $+ A'''x + B''' + C'''x^{-k}$ &c$)y^{v-1} = -((A' + A'' + A'''$ &c$)x + (B' + B'' + B'''$ &c$) + (C' + C'' + C'''$ &c$)x^{-k}$ &c$)y^{v-1}$, lequel comparé avec $(ax + b)y^{v-1}$, auquel il doit être égal, donne $A' + A'' + A'''$ &c $= a$, $B' + B'' + B'''$ &c $= b$, $C' + C'' + C'''$ &c $= 0$, & tout le reſte pareillement égal à zéro. De même, ſi on multiplie les unes par les autres toutes les équations des Aſymptotes droites

* NEWTON, *Enum. lin. tert. Ord.* II. 2. STIRLING, *Lin. tert. Ord.* Newt. Prop. X. Cor. 4.

Digitized by Google

CH. VIII. §. 149. PL. XV.

tes $y - A'x - B' = 0$, $y - A''x - B'' = 0$, $y - A'''x - B''' = 0$, &c. ce produit exprimera le Syſtême de toutes ces Droites. Or ce produit a pour ſon prémier terme y^v, & pour le ſecond $-(A'x + B' + A''x + B'' + A'''x + B''' \text{ \&c})y^{v-1}$, ou $-((A' + A'' + A''' \text{ \&c})x + (B' + B'' + B''' \text{ \&c}))y^{v-1} = -(ax + b)y^{v-1}$. L'équation qui repréſente le Syſtême des Aſymptotes a donc les deux mêmes prémiers termes que l'équation de la Courbe. Donc [§. 65] une ordonnée qui coupe toutes les Aſymptotes & la Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon ordre, eſt coupée de façon que la ſomme des parties interceptées entre la Courbe & les Aſymptotes, eſt égale à la ſomme des parties interceptées entre les Aſymptotes & la Courbe.

150. VII. Le nombre des points, où une Courbe algébrique peut rencontrer ſon Aſymptote droite, eſt inférieur, au moins, de deux unités à l'expoſant de l'Ordre de cette Courbe *.

Car en prenant les ordonnées parallèles à une Aſymptote, elle ſera déſignée par une déterminatrice paralléle à la Bande ſans y [§. 137]. Ainſi, dans cette équation ordonnée par y, il manque au moins le prémier terme, celui où y auroit un expoſant égal à l'expoſant de l'Ordre de la Courbe. Par conſéquent, aucune ordonnée [parallèle à l'Aſymptote] ne peut rencontrer la Courbe en autant de points qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon Ordre [§. 41]. Mais en particulier, l'Ordonnée-aſymptote la rencontre, au moins, une fois de moins. Car le nombre de points où une ordonnée rencontre une Courbe eſt égal au nombre des racines réelles de l'égalité qui

 réſulte

* STIRLING, Prop. IV.

Digitized by Google

PL. XV. réſulte quand à x on ſubſtituë la valeur de l'abſciſſe de cette ordonnée. Mais l'abſciſſe de l'Ordonnée-aſymptote ſe détermine en égalant à zéro la bande entiére ſur laquelle eſt appliquée la déterminatrice qui marque cette Aſymptote [§. 139]. Donc cette valeur ſubſtituée à x fait diſparoître cette bande, & fait évanouir le terme, qui eſt le prémier de l'équation ordonnée par y. Ainſi dans l'Egalité, dont les racines déterminent les points où l'Aſymptote rencontre la Courbe, l'expoſant de la plus haute puiſſance d'y eſt inférieur à l'expoſant de l'Ordre de la Courbe, de deux unités, au moins. Le nombre de ſes racines, & par conſéquent le nombre des points où la Courbe peut rencontrer l'Aſymptote, eſt inférieur de deux unités, au moins, à l'expoſant de l'Ordre de cette Courbe. CH. VIII. § 150.

Soit, par ex. $ly^v + (ax+b)y^{v-1} + (cx^2+dx+e)y^{v-2}$ &c $= 0$, l'équation d'une Courbe de l'ordre v. Si elle a quelque Aſymptote parallèle aux ordonnées y, il faut que le terme ly^v, au moins, diſparoiſſe, l étant égale à zéro, & l'abſciſſe x dont l'ordonnée eſt Aſymptote, ſe déterminera par l'éq: $ax+b=0$, ou $x=-\frac{b}{a}$. On aura les ordonnées de cette abſciſſe, en ſubſtituant, dans l'équation de la Courbe, $-\frac{b}{a}$ au lieu d'x, ce qui fera évanouir le terme $(ax+b)y^{v-1}$, qui par l'abſence du terme ly^v eſt devenu le prémier; & par l'évanouiſſement de ce terme, $\frac{cbb-2dba+eaa}{aa}y^{v-2}$ ſe trouve le prémier. Donc, pour cette abſciſſe $-\frac{b}{a}$, l'équation ne ſera que du dégré $v-2$. Elle ne peut donc avoir plus de

CH. VIII. §. 150. de $v-2$ racines; la Courbe ne peut couper ſon Aſymptote en plus de $v-2$ points. PL. XV.

Ainſi une Courbe du ſecond Ordre ne peut pas rencontrer ſon Aſymptote. Une Courbe du troiſiéme Ordre ne peut rencontrer ſon Aſymptote qu'en un point: Une du quatriéme Ordre qu'en deux, & ainſi de ſuite.

151. VIII. Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Aſymptotes droites parallèles à ſes ordonnées qu'il ne manque de termes initiaux à ſon équation ordonnée par y.

Car s'il ne manque à l'éq: $ly^v + (ax+b)y^{v-1} + (cx^2+dx+e)y^{v-2}$ &c $= 0$, que le premier terme ly^v; la déterminatrice parallèle à la Bande ſans y, qui indique [§. 139] les abſciſſes des Ordonnées-aſymptotes, traverſant la bande y^{v-1}, donnera l'éq: $ax+b=0$, qui n'a qu'une ſeule racine. Il n'y a donc, en ce cas, qu'une ſeule Aſymptote parallèle aux ordonnées. Mais s'il manque à l'équation de la Courbe ſes deux prémiers termes, $ly^v + (ax+b)y^{v-1}$, la déterminatrice traverſera la bande y^{v-2}, & donnera l'éq: $cx^2 + dx + e = 0$, qui ne peut avoir que deux racines, & ne peut indiquer que deux Ordonnées-aſymptotes. S'il manque à l'équation de la Courbe ſes trois prémiers termes, la déterminatrice traverſera la bande y^{v-3}, & donnera une équation du troiſiéme dégré qui ne peut avoir que trois racines, qui ſont trois abſciſſes d'Ordonnées-aſymptotes. On voit que ce raiſonnement s'applique de la même maniére à quelque nombre qu'il manque de termes initiaux.

Mais il arrivera ſouvent que le nombre des Aſymptotes-ordonnées ſera moindre que le nombre des termes initiaux qui manquent à l'équation. 1°. à cauſe des coëffi-

Pl. XV. cients a, c, &c. qui peuvent manquer, ce qui déprime les Ch. VII. les équations $ax + b = 0$, $cxx + dx + e = 0$, & les ré- §. 151. duit à des dégrés inférieurs. Si, par ex. l, a, b, & c ſont zéros, la déterminatrice, traverſant la bande y^{v-2}, pourroit donner une équation du ſecond dégré: mais à cauſe de $c = 0$, cette équation ſe réduit à une du prémier $dx + e = 0$, qui n'indique qu'une ſeule Aſymptote-ordonnée. 2°. à cauſe des racines imaginaires qui ne donnent que des Aſymptotes imaginaires. 3°. à cauſe des racines égales, qui ne marquent chacune qu'une ſeule Aſymptote, quoiqu'elles tiennent lieu de pluſieurs racines.

152. IX. Une Courbe algébrique ne peut avoir autant d'Aſymptotes droites parallèles qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon Ordre *.

Car prenant les ordonnées y parallèles à ces Aſymptotes, il manquera [§. *préc.*] autant de termes initiaux à l'équation ordonnée par y qu'il y a d'Aſymptotes parallèles aux ordonnées. S'il y avoit autant de ces Aſymptotes que d'unités dans l'expoſant v de l'ordre de la Courbe, il manqueroit à cette équation ſes v prémiers termes. Mais le nombre de tous ſes termes eſt $v + 1$. Il ne lui reſteroit donc que le dernier terme, qui ne renferme plus d'y. L'équation n'auroit de variables que x, & ne repréſenteroit pas une Courbe, mais quelques Droites parallèles [§. 40. II. 3].

L'équation devant repréſenter une Courbe, elle aura au moins deux termes, comme $(\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots + \zeta)y + (\lambda x^{v} + \mu x^{v-1} \ldots + \rho) = 0$. Alors les abſciſſes des Ordonnées-aſymptotes ſont les racines de l'éq: $\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2}$

* Stirling, *Ibid.* Cor. 5 & 6.

Ch. VIII. §. 152. $+\beta x^{v-2} \ldots + \zeta = 0$, que donne la déterminatrice qui traverſe la bande y. Ces racines ſont au nombre de $v-1$, & peuvent, ſi elles ſont toutes réelles, déſigner $v-1$ Ordonnées-aſymptotes, c'eſt-à-dire, une de moins que le nombre des unités de l'expoſant v de l'Ordre de la Courbe. Pl. XV.

Ainſi une Courbe du ſecond Ordre ne peut avoir d'Aſymptotes parallèles : car c'eſt n'en avoir point que de n'en avoir qu'une. Une Courbe du troiſiéme Ordre ne peut avoir que deux Aſymptotes parallèles : Une du quatriéme Ordre que trois, &c.

153. X. Quand une Courbe a autant d'Aſymptotes droites parallèles, qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſon ordre, moins une, elle ne peut les couper.

Car dans ſon éq : $(\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots + \zeta) y + (\lambda x^{v} + \mu x^{v-1} \ldots + \rho) = 0$, y ne monte qu'au prémier dégré. Ainſi aucune ordonnée ne peut couper la Courbe en plus d'un point [§. 41]. Et quand cette ordonnée eſt une Aſymptote, la valeur d'y, qui eſt $-\frac{\lambda x^{v} + \mu x^{v-1} + \ldots + \rho}{\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots + \zeta}$ devient infinie, ſon dénominateur étant zéro, puiſqu'on ſuppoſe x égale à une des racines de l'éq : $\alpha x^{v-1} + \beta x^{v-2} \ldots + \zeta = 0$. L'Aſymptote ne rencontre donc la Courbe qu'à l'infini, c'eſt-à-dire, jamais.

CHAPI-

CHAPITRE IX.

Diviſions générales des Lignes des cinq prémiers Ordres.

Pl. XV. 154. LES Propoſitions établies dans le Chap. précédent ſervent de Régles pour former les Diviſions des Lignes courbes de chaque Ordre. Leur fondement naturel eſt le nombre, l'eſpèce & la poſition des Branches infinies de ces Courbes. §. 154.

Pour commencer par le ſecond Ordre, puiſque le prémier ne renferme que la Ligne Droite [§. 40], ſon équation générale eſt $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ [§. 32]. Placée ſur le Triangle analytique, ſon plus haut Rang, qui décide de la derniére direction de ſes Branches infinies [§. 136], égalé à zéro, donne l'éq : $dyy + exy + fxx = 0$. Puiſqu'elle eſt du ſecond dégré, elle peut avoir ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles inégales, ou une ſeule racine double. Ce qui fait trois Cas.

Cas I. Le prémier eſt celui où les deux racines ſont imaginaires, & il a lieu quand e eſt plus petit que $2\sqrt{df}$. Alors il n'y a point de Branches infinies [§. 136].

On rendra plus ſimple l'équation de la Courbe, 1°. en faiſant diſparoître la bande y, qui eſt le ſecond terme de cette équation ordonnée par y, $dyy + (ex + b)y + fxx + cx + a = 0$. On ſuppoſera donc $y = u - \frac{ex + b}{2d}$, & on aura $4dduu + (4df - ee)xx + (4cd - 2be)x + 4ad -$

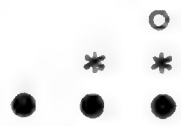
CH. IX. §. 154. $4ad - bb = 0$. 2°. en faiſant évanouir le ſecond terme de cette transformée ordonnée par x, en ſuppoſant $x = z - \frac{2cd - be}{4df - ee}$; ce qui change l'équation en $uu + \frac{4df - ee}{4dd} zz + \frac{(4df - ee)a - dcc + ebc - fbb}{4ddf - dee} = 0$, qui n'a plus que trois termes. PL. XV.

Puiſque $e < 2\sqrt{df}$ le coëfficient $\frac{4df - ee}{4dd}$ du terme zz eſt néceſſairement poſitif. Si le troiſiéme terme $\frac{(4df - ee)a - dcc + ebc - fbb}{4ddf - dee}$ eſt auſſi poſitif ou zéro, c'eſt-à-dire, ſi $a >$ ou $= \frac{dcc - ebc + fbb}{4df - ee}$, la Courbe eſt imaginaire, puiſqu'il n'eſt pas poſſible que deux ou trois termes poſitifs ſoient égaux enſemble à zéro.

Mais ſi ce troiſiéme terme eſt négatif, la Courbe repréſentée par l'équat: $uu + \frac{4df - ee}{4dd} zz = \frac{dcc - ebc + fbb - (4df - ee)a}{(4df - ee)d}$ eſt l'Ovale que les Géomètres apellent *Ellipſe*. L'Ellipſe devient un *Cercle*, lorſque les coordonnées u & z ſont perpendiculaires l'une à l'autre, & que $4df - ee = 4dd$; ce qui réduit l'équation à $uu + zz = \frac{dcc - ebc + fbb - 4add}{4d^3}$.

Cas II. Lorſque e eſt plus grand que $2\sqrt{df}$, l'éq: $dyy + exy + fxx = 0$ a deux racines réelles inégales, que nous ſuppoſerons $y - Ax = 0$, & $y - A'x = 0$. Elles indiquent deux derniéres directions pour les Branches infinies de la Courbe. En ſubſtituant $Ax + u$ à y dans l'équation propoſée, on la transforme en une autre à

Pl. XV. qui manque néceſſairement le terme xx [§. 107]. La déterminatrice paſſera donc par les Caſes ux & x, ſi Ch. IX. §. 154.



celle-ci ſe trouve pleine, & donnera une équation telle que $u = B$. Il faut donc ſubſtituer $B + t$ à u, & on aura une ſeconde transformée, où les Caſes xx & x ſont ſurement vuides [§. 107] : mais celle de la Pointe ne ſauroit l'être. Car, alors, cette transformée, n'ayant

point de termes ſur la Bande x ſeroit diviſible par t. La prémiére transformée ſeroit donc diviſible par $u - B = t$, & la propoſée par $y - Ax - B = u - B = t$. Elle ſeroit donc réductible à deux équations de cette forme $y - Ax - B = 0$, $y - A'x - B' = 0$, & repréſenteroit deux Droites. Donc, ſi elle exprime une Courbe, la Pointe renfermera un terme de la ſeconde transformée. Et la déterminatrice paſſant par cette Caſe & par la Caſe tx, donnera $t = Cx^{-1}$. Ainſi la Série eſt réguliére, & ſes trois prémiers termes $Ax + B + Cx^{-1}$ marquent deux Branches hyperboliques [§. 131], dont l'Aſymptote droite a pour équation $v = Ax + B$.

L'autre racine $y - A'x = 0$ donnera pareillement une Série, dont les trois prémiers termes $A'x + B' + C'x^{-1}$ marquent deux autres Branches hyperboliques, dont l'Aſymptote droite s'exprime par l'éq : $v' = A'x + B'$.

Ainſi la Courbe a deux Aſymptotes droites & quatre Branches hyperboliques qui s'étendent dans les angles aſymptotiques oppoſés.

Que

CH. IX. §. 154. Que ſi le terme x manquoit dans la prémiére transformée, la déterminatrice, qui part de la Caſe ux, au lieu de porter ſur la Caſe x, auroit paſſé par la Pointe, & auroit donné, pour le ſecond terme de la Série, $u = Bx^{-1}$. Dans une des Séries $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. $y = A'x + B' + C'x^{-1}$ &c, ou même dans toutes les deux, le ſecond terme B, ou B', auroit manqué : ce qui marqueroit que l'une des Aſymptotes droites, ou toutes les deux, paſſent par l'Origine ; ſans indiquer d'ailleurs aucun autre changement. PL. XV.

On peut exécuter, tout d'un coup, les deux transformations indiquées ci-deſſus, en portant l'Origine au point où les deux Aſymptotes ſe croiſent, & prenant les abſciſſes ſur l'une & les ordonnées ſur l'autre. Cette transformation vuidera les Caſes yy, xx, y & x, de ſorte que l'équation réduite au terme uz & au terme conſtant, aura cette forme $Puz - Q = 0$, ou $uz = \frac{Q}{P}$, ſous laquelle on reconnoit l'*Hyperbole ſimple* [§. 118]. Voici tout le Calcul.

En ſubſtituant [§. 24] $m + pz + ru$ à x, & $n + qz + su$ à y, dans l'équation générale $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$, on la transformera en celle-ci

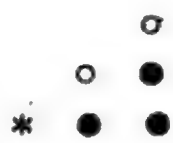
$$(dss+ers+frr)uu + (2dqs+eqr+eps+2fpr)uz + (dqq+epq+fpp)zz + (bs+cr+2dns+enr+ems+2fmr)u + (bq+cp+2dnq+enp+emq+2fmp)z + (a+bn+cm+dnn+emn+fmm) = 0$$

On déterminera la raiſon de r à s, par l'éq : $dss + ers + frr = 0$, ce qui fait diſparoitre le terme uu, & donne aux ordonnées une poſition parallèle à une des Aſymptotes. On déterminera la raiſon de p à q par l'éq : $dqq + epq + fpp = 0$: ce qui fait diſparoitre le terme zz, &

Pl. XV. donne aux abſciſſes une poſition parallèle à une Aſympto- Ch. IX. §. 156.
te. Mais il faut prendre garde qu'on ne faſſe pas les abſciſſes parallèles aux ordonnées, [ce qui ſeroit abſurde], en faiſant les unes & les autres parallèles à la même Aſymptote, c'eſt-à-dire, en faiſant la raiſon $p:q$ égale à la raiſon $r:s$. L'éq : $dss+ers+frr=0$, ou $dqq+epq+fpp=0$, ayant deux racines inégales [puiſque $dyy+exy+fxx=0$, qui a, par ſuppoſition, deux racines inégales, ſe change en $dss+ers+frr=0$, ſi l'on écrit s pour y & r pour x, & en $dqq+epq+fpp=0$, en mettant q pour y & p pour x]; on déterminera la raiſon $r:s$ par l'une de ſes racines, & la raiſon $p:q$ par l'autre, en prenant $\frac{s}{r}=\frac{-e+\sqrt{(ee-4df)}}{2d}$, & $\frac{q}{p}=\frac{-e-\sqrt{(ee-4df)}}{2d}$, ou réciproquement. Enſuite on déterminera m & n par ces deux éq : $bs+cr+2dns+enr+ems+2fmr=0$, & $bq+cp+2dnq+enp+emp+2fmq=0$, qui font évanouir les termes u & z, & portent l'Origine ſur les deux Aſymptotes, c'eſt-à-dire, ſur le Point où elles ſe croiſent, lequel eſt un Centre général [§. 76]. Ces équations donnent $m=\frac{-be+2cd}{ee-4df}$, & $n=\frac{-ce+2bf}{ee-4df}$. Et l'équation de la Courbe ſe réduit à $(2dqs+eps+eqr+2fpr)uz+(a+bn+cm+dnn+emn+fmm)=0$, ou [mettant pour s, r, q, p, m & n, leurs valeurs] à $-4d(ee-4df)uz+a(ee-4df)^2+(dcc-ebc+fbb)(ee-4df)=0$, ſoit $uz=\frac{a(ee-4df)+dcc-ebc+fbb}{4d}$, qui eſt à l'*Hyperbole* ordinaire [§. 118].

Cas III.

CH. IX. §. 154. *Cas III.* Enfin lorſque $e = 2\sqrt{df}$, l'éq : $dyy + exy +$ PL XV. $fxx = 0$ n'a qu'une ſeule racine, mais double, $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} = 0$, qui indique une ſeule derniére direction pour les Branches infinies de la Courbe [§. 136]. Qu'on ſubſtituë $-x\sqrt{\frac{f}{d}} + u$ à y dans la propoſée, & elle ſera transformée en une équation, où il manquera les termes xx & xy [§. 107].



S'il manquoit auſſi le terme x, la transformée n'auroit aucun terme où parût la lettre x, & elle ſe réduiroit à une équation telle que $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$ qui peut avoir, ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une ſeule racine réelle double. Si les deux racines u, u' ſont imaginaires, y [$= -x\sqrt{\frac{f}{d}} + u$ ou $+u'$] eſt auſſi imaginaire, & l'équation n'exprime que des Lignes imaginaires. Si u, u' ſont réelles & inégales, la propoſée ſe réduit à ces deux équations ſimples $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} - u = 0$, $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} - u' = 0$. Ainſi elle exprime deux Droites parallèles [§. 40]. Si u & u' ſont égales, l'équation propoſée eſt le quarré de $y + x\sqrt{\frac{f}{d}} - u = 0$, & ne déſigne qu'une ſeule Droite [§. 40].

Mais ſi dans la transformée le terme x ne manque pas, on verra, en la mettant ſur le Triangle analytique, que

PL.XV. que la déterminatrice paſſera par les Caſes uu & x, & qu'elle donnera une équation telle que $u = \pm\sqrt{Bx}$. On aura donc la valeur d'y en x par deux Séries deſcendantes $-x\sqrt{\frac{f}{d}}+\sqrt{Bx}$ &c. $-x\sqrt{\frac{f}{d}}-\sqrt{Bx}$ &c. qui indiquent deux Branches paraboliques, de part & d'autre de l'Axe des abſciſſes, & du côté poſitif ou négatif, ſelon que B eſt une grandeur poſitive ou négative [§. 133]. CH.IX §. 154

Si dans l'équation transformée générale du *Cas* préced. on fait $dqq+epq+fpp=0$, ce qui fait diſparoitre le terme zz, & rend les abſciſſes parallèles à la derniére direction des Branches infinies [§. 135], on aura $\frac{q}{p}=-\frac{e}{2d}$. Car $e=2\sqrt{df}$, ou $f=\frac{ee}{4d}$, transforme l'éq: $dqq+epq+fpp=0$, en $dqq+epq+\frac{eepp}{4d}=0$, ſoit $ddqq+depq+\frac{1}{4}eepp=0$, dont la racine quarrée $dq+\frac{1}{2}ep=0$ donne $\frac{q}{p}=-\frac{e}{2d}$. On verra diſparoitre en même tems le terme uz, dont le coëfficient $2dqs+eqr+eps+2fpr$ ſe réduit à $-2des-eer+2des+4dfr$, c'eſt-à-dire, à rien, ee étant égal à $4df$. Qu'on porte maintenant l'Origine ſur la Courbe, en donnant à m & n des valeurs qui faſſent diſparoitre le terme conſtant $a+bn+cm+dnn+emn+fmm$: ce qui peut ſe faire en une infinité de maniéres: car on trouve $n=\frac{b-em\pm\sqrt{(bb-4ad+(2be-4cd)m)}}{2d}$; de ſorte que prenant pour m une valeur quelconque plus grande que $\frac{4ad-bb}{2be-4cd}$, afin que n ne ſoit pas imaginaire, n ſera déterminée. Qu'on détermine enſuite la raiſon de s à r par l'éq: $bs+cr+2dns+enr+ems+2fmr=0$, qui

CH. IX. §. 154. qui fait disparoitre le terme u & donne $\frac{s}{r} = -\frac{c+em+2fm}{b+em+2dn}$. PL. XV. Alors l'équation est réduite aux termes uu & z, & sous cette forme $(dss+esr+frr)uu+(bq+cp+2dnq+enp+emq+2fmp)z=0$, qui [en mettant $4df$ pour ee, $-e$ pour q, $2d$ pour p, $-e-en-2fm$ pour s, & $b+em+2dn$ pour r] se réduit à $(dcc-ebc+fbb)uu-(be-2cd)z=0$, soit $uu=\frac{be-2cd}{dcc-ebc+fbb}z$, où l'on reconnoit la *Parabole* simple [§. 123].

Et ce sont là toutes les Lignes du second Ordre.

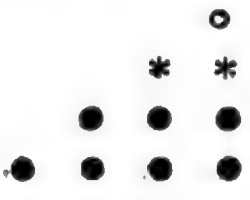
155. L'EQUATION générale des Lignes du troisiéme Ordre est $a+by+cx+dyy+exy+fxx+gy^3+hxyy+ixxy+lx^3=0$, dont le troisiéme & plus haut rang égalé à zéro donne l'équation cubique $gy^3+hxyy+ixxy+lx^3=0$, qui a au moins une racine réelle *.

Cas I. Soit cette racine $y-Ax=0$, & supposons d'abord que les deux autres sont imaginaires. Alors les Branches infinies de la Courbe n'ont qu'une seule derniére direction parallèle à la Droite que représente l'équation $y=Ax$ [§. 135]. Et si l'on substituë $Ax+u$ à y dans la proposée, on aura une transformée à laquelle il manquera le terme x^3 [§. 107].

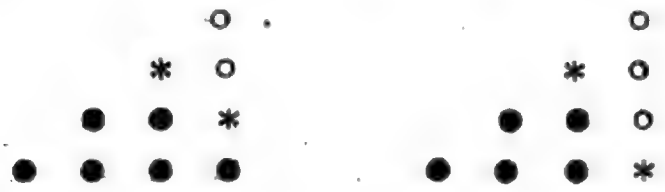
1. S'il ne lui manque pas le terme x^2, la déterminatrice passant par les Cases ux^2 & x^2, donnera une équation telle que $u=B$. L'exposant d'x n'étant pas négatif dans ce terme u, il faut substituer $B+t$ à u, & on aura une seconde

* Voyez NEWTON, *Enumer. linear. tert. Ordinis.* STIRLING, *Lineæ tert. Ord.* Newton. NICOLE, *Mem. de l'Ac.* 1729. p. 198.

Pl. XV. ſeconde transformée à qui manquent les termes x^1 & x^2. Ch. IX. §. 155.



Dans cette transformée, ou le terme x ſubſiſte, ou il manque. S'il ſubſiſte, la déterminatrice paſſe par les Caſes tx^2 & x, & donne $t = Cx^{-1}$. S'il manque, la déterminatrice paſſe par la Caſe tx^2 & par la Pointe, & donne $t = Dx^{-2}$. Dans l'un & l'autre Cas, la Série eſt régu-



liére. L'un & l'autre indique une Aſymptote droite dont l'équation eſt $v = Ax + B$. Mais les Branches hyperboliques de la Courbe qui donne la Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. ſe jettent dans les Angles aſymptotiques oppoſés (1). Et celles de la Courbe qui fournit la Série $y = Ax + B + Dx^{-2}$ &c. s'étendent d'un même côté de l'Aſymptote, mais de part & d'autre de l'Axe des ordonnées (2).

On ne peut pas ſuppoſer un troiſiéme Cas, où la Pointe

(1) Dans l'*Enumération* qu'a donnée Mr. Newton *des Lignes du 3e. Ordre*, il déſigne celles-ci par le nom d'*Hyperboles défectives ſans diamétre*. Il les détaille au N°. 5, & en compte *ſix eſpéces*. La diſtinction de ces eſpéces eſt fondée ſur d'autres propriétés que celles des Branches infinies.

(2) Ce ſont les *Hyperboles défectives avec diamétre*, dont Mr. Newton compte *ſept eſpéces* au N°. 6.

CH. IX. §. 155. Pointe reſteroit vuide ; car l'équation n'auroit aucun terme ſur la Bande ſans y, ou ſans t, & ſeroit par conſéquent diviſible par $t = u - B = y - Ax - B$. Elle n'exprimeroit donc pas une Courbe du troiſiéme Ordre, mais une Courbe du ſecond Ordre avec une Droite dont l'équation ſeroit $y - Ax - B = 0$, ou peut-être même l'aſſemblage de trois Droites. PL. XV.

2. Si le terme x^2 manque dans la prémiére transformée, il n'en réſulte point de nouvelles Courbes. Seulement dans les deux précédentes Séries, le terme u, ou B, eſt zéro; parce que l'Origine eſt ſur l'Aſymptote repréſentée, dans ce Cas, par l'éq : $v = Ax$.

Cas II. Si les trois racines de l'éq : $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = 0$ ſont réelles & inégales, on fera ſur chacune de ces racines le même Calcul qu'on vient de faire ſur la racine unique du *Cas* précéd. On conclura donc que la Courbe a trois Aſymptotes droites accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, qui s'étendent, avec des directions oppoſées, ou d'un même côté de l'Aſymptote droite, ou des deux côtés de cette Aſymptote. Ce qui fait trois différens Genres de Courbes. Car ou chaque Aſymptote a ſes Branches de Courbe de part & d'autre (3) : ou deux Aſymptotes les ont de part & d'autre, la troiſiéme les ayant d'une même part (4) : ou chaque Aſymptote a ſes Branches de Courbe d'un même côté (5). A quoi l'on peut ajoûter, ſi

(3) Mr. NEWTON les nomme *Hyperboles redondantes ſans diamétre*, & il en compte *neuf eſpéces* qu'il détaille au N°. 1.

(4) Ce ſont les *Hyperboles redondantes avec un diamétre*, dont Mr. NEWTON compte *douze eſpéces* au N°. 2. Mais Mr. STIRLING a fait voir qu'il en faut ajoûter deux, & que ce Genre a *quatorze eſpéces*.

(5) Mr. NEWTON les apelle *Hyperboles redondantes avec trois diamétres*, & il n'en compte que *deux eſpéces* au N°. 3. Mais Mr. STIRLING a fait voir qu'il y en a *quatre eſpéces*.

Digitized by Google

Pl. XV. l'on en veut faire un quatriéme Genre, les Courbes dont les trois Aſymptotes ſe croiſent en un ſeul point (6). Ch. IX. §. 155.

Il ſemble que cette énumération ſoit imparfaite, & que nous ayons oublié le Genre, où des trois Aſymptotes l'une a ſes Branches de Courbe de part & d'autre, les deux autres les ayant d'une même part. Mais ce Cas eſt im-
Fig. 110. poſſible. Car ſi on établit que l'Aſymptote AB a ſes deux Branches D, E de part & d'autre, tandis que les Aſymptotes BC, CA ont leurs Branches F, G, & H, I d'un même côté; on verra que, pour lier ces ſix Branches deux à deux, comme elles doivent l'être afin que le cours de la Courbe ſoit continu [§. 19], il faudra, quelque combinaiſon qu'on faſſe, qu'une Aſymptote ſoit coupée deux fois par la Courbe; ce qui eſt impoſſible [§. 150]. Le Calcul démontre auſſi l'impoſſibilité de ce Genre.

Car ſoient $y - Ax = 0$, $y - A'x = 0$, $y - A''x = 0$, les trois racines de l'équation faite en égalant à zéro le plus haut Rang; & ſoient $y - Ax - B - Cx^{-1} - Dx^{-2}$ &c $= 0$, $y - A'x - B' - C'x^{-1} - D'x^{-2}$ &c $= 0$, $y - A''x - B'' - C''x^{-1} - D''x^{-2}$ &c $= 0$ les trois Séries que donnent ces trois racines. Celles où le terme x^{-1} ſera zéro déſignent les Branches hyperboliques qui s'étendent d'un même côté de l'Aſymptote: & celles où ce terme ſubſiſte marquent les Branches hyperboliques qui ſe jettent de part & d'autre de leur Aſymptote [§. 128]. Or en comparant le produit

$$y^3 - (A + A' + A')xy^2 + (AA' + AA'' + A'A'')x^2y - AA'A''x^3 = 0$$
$$- (B + B' + B'')y^2 \qquad \&c \qquad \&c$$
$$- (C + C' + C'')x^{-1}y^2$$
$$\&c$$

de

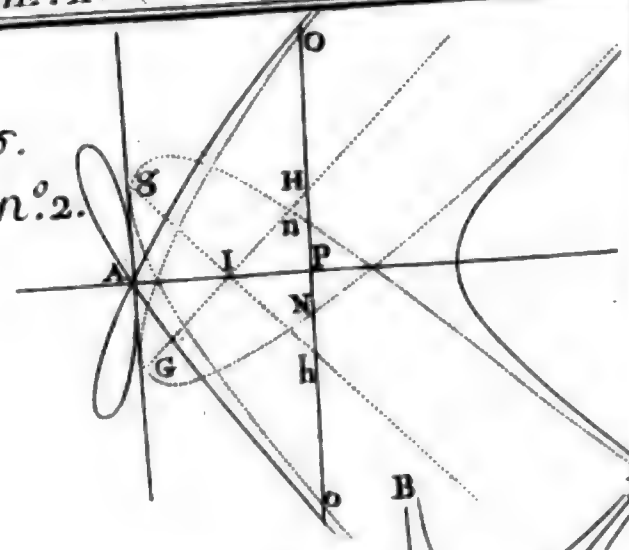
(6) Ce Genre contient les *neuf eſpéces d'Hyperboles redondantes dont les trois Aſymptotes ſe croiſent en un point.* NEWTON, N°. 4.

Digitized by Google

Fig. 106.

n°. 1.

n°. 2.



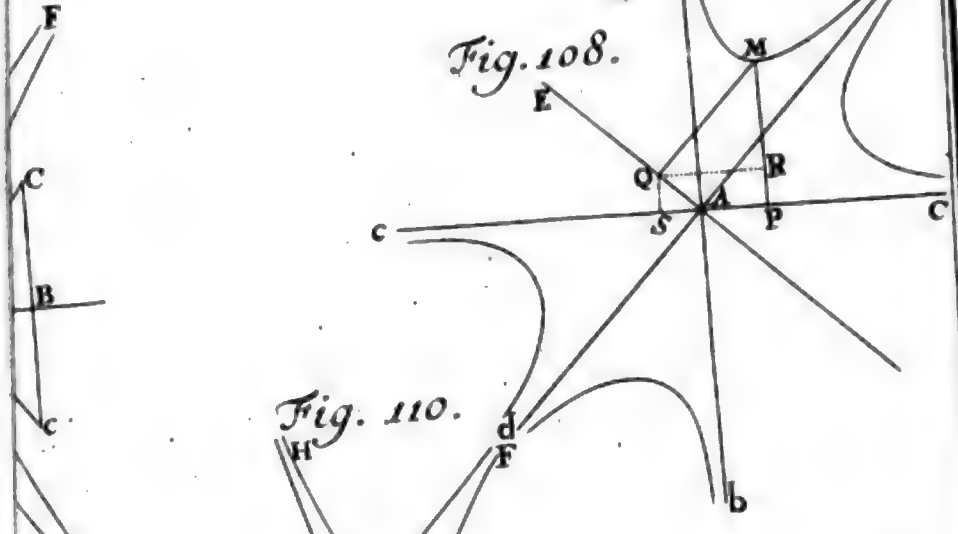


Fig. 108.

Fig. 110.

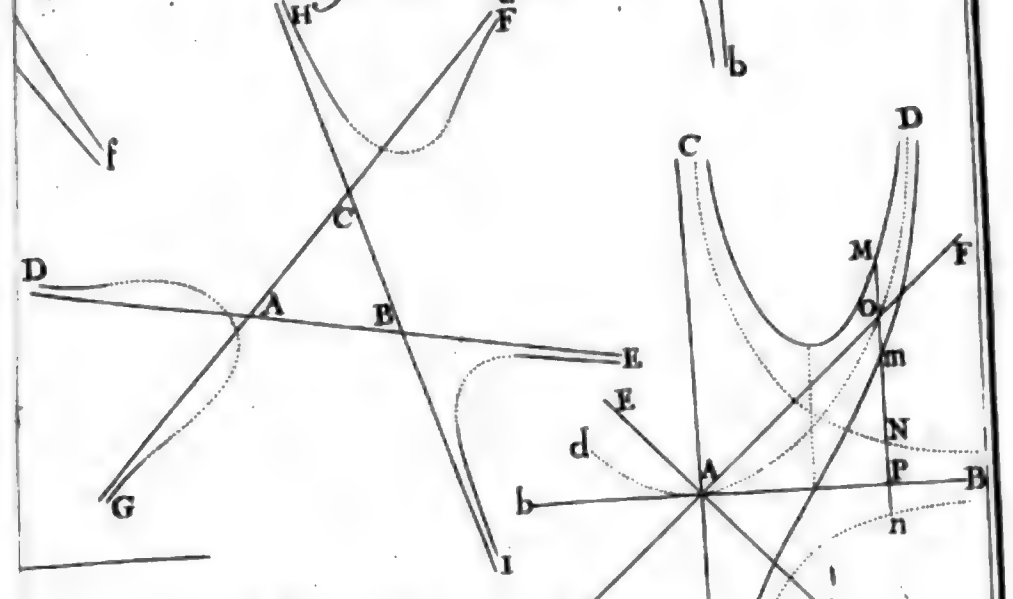


Fig. 109.

n°. 1.

n°. 2.

Digitized by Google

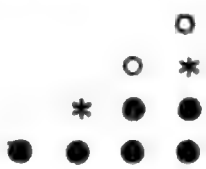
Digitized by Google

Ch. IX. de ces trois Séries avec l'équation propoſée Pl. XV.
§. 155. $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 + dy^2 + exy + fx^2$ &c. &c. $= 0$, on trouvera $C+C'+C''=0$:

ce qui montre que ſi deux des trois grandeurs C, C', C'', ſont zéro, la troiſiéme eſt auſſi néceſſairement zéro. Donc ſi des trois Aſymptotes il y en a deux qui ont leurs Branches infinies d'une même part, la troiſiéme a auſſi ſes Branches d'un même côté.

Cas III. Si l'équation du plus haut Rang de la propoſée a deux de ſes racines égales entr'elles; c'eſt-à-dire, ſi elle a une racine double $y - Ax = 0$ & une racine ſimple $y - Ax = 0$: chacune de ces racines donnera une Série. Celle de la racine ſimple déſigne, comme dans le *Cas* 1, une Aſymptote droite, & deux Branches hyperboliques qui tombent ou d'un même côté de l'Aſymptote, ou de part & d'autre. Pour avoir la Série de la racine double, on ſubſtituera dans l'équation propoſée $Ax + u$ à y, & on aura une transformée à laquelle il manquera les termes x^3 & ux^2 [§. 107].

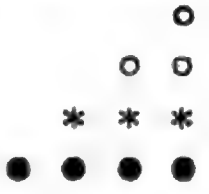
I. Si le terme x^2 ne manque pas, la déterminatrice paſſera par les Caſes u^2x & x^2, & donnera une équation



telle que $u = \pm\sqrt{Bx}$, & dès lors la Série eſt réguliére, cette équation n'ayant point de racines multiples. Ses deux prémiers termes $Ax \pm \sqrt{Bx}$ marquent [§. 133] deux Branches paraboliques, qui, combinées avec les deux ſortes de Branches hyperboliques que peut indiquer

Pl. XV. la racine ſimple, ſont deux Genres de Courbes (7) (8). Ch. IX. §. 115.

11. Si le terme x^2 manque, la déterminatrice traverſe la Bande x & donne une équation de cette forme $\alpha u x^2$



$+\beta u x+\gamma=0$, ou $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$, qui, étant du ſecond dégré, peut avoir deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une ſeule racine réelle double.

1. Si ces deux racines ſont imaginaires, les Séries qu'elles devroient donner ſont imaginaires: & la Courbe n'a de Branches infinies que celles qui ſont indiquées par la racine ſimple $y-A'x=0$: en quoi ce genre reſſemble aſſez à celui du premier *Cas* (9).

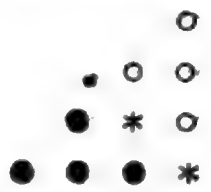
2. Si les deux racines de l'éq: $\alpha u^2+\beta u+\gamma=0$ ſont réelles & inégales $u-B=0$, $u'-B'=0$; qu'on ſubſtituë $B+t$, ou $B'+t$ à u, & on aura une ſeconde transformée à qui il manquera de plus qu'à la prémiére le terme x. Sa déterminatrice paſſant par la Pointe & par la Caſe tx, donnera $t=Cx^{-1}$, & la Série eſt dès lors réguliére. Ses prémiers termes $Ax+B+Cx^{-1}$, ou $Ax+B'+C'x^{-1}$, marquent des Branches hyperboliques,

(7) Le prémier eſt celui des *Hyperboles paraboliques ſans diamétre* dont Mr. NEWTON détaille *ſept eſpéces* au N°. 7.

(8) Le ſecond eſt celui des *Hyperboles paraboliques avec diamétre*, dont Mr. NEWTON compte *quatre eſpéces* au N°. 8. Mais il y en a réellement *ſix eſpéces*.

(9) Ce ſont les *Hyperboliſmes de l'Ellipſe*, dont il y a *trois eſpéces* énumerées par Mr. NEWTON au N°. 10.

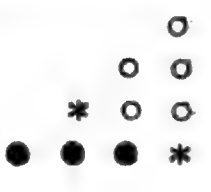
CH. IX. §. 155. ques, qui, avec des directions oppoſées, ſe jettent de part & d'autre de leur Aſymptote droite repréſentée par PL. XV.



l'éq: $v = Ax + B$, ou $v = Ax + B'$. Ainſi la racine double $y - Ax = 0$ marque, dans ce Cas, quatre Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes droites parallèles, auxquelles il faut joindre la troiſiéme Aſymptote accompagnée de deux Branches infinies que déſigne la racine ſimple $y - A'x = 0$ (10).

On ne peut pas ſuppoſer ici, que la Pointe reſte vuide: car la ſeconde transformée n'auroit aucun terme ſur la Bande ſans y, ou plutôt ſans t: elle ſeroit donc diviſible par t, & la propoſée par $y - Ax - B$ [$= u - B = t$]. Elle ne repréſenteroit donc qu'une Droite & une Courbe du ſecond Ordre, ou même trois Droites [§. 21].

3. Enfin, ſi l'éq: $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ n'a qu'une racine double $u = B$, on ſubſtituera $B + t$ à u dans la prémiére transformée, & on aura la ſeconde à laquelle manqueront les termes x & tx ſur la Bande x [§. 107]. Mais, par la raiſon qu'on vient d'alléguer, la Pointe ne ſera pas vuide. La déterminatrice partant de la Caſe t^2x

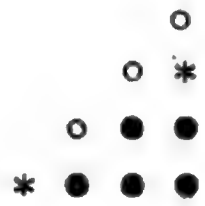


(10) Ce ſont les *Hyperboliſmes de l'Hyperbole*, dont il y a *quatre eſpéces* comptées au N°. 9.

Ch. IX. §. 155. portera donc ſur la Pointe, & donnera l'éq : $t = \pm\sqrt{Cx^{-1}}$: & dès ce terme la Série $y = Ax + B \pm \sqrt{Cx^{-1}}$ &c eſt réguliére. Elle marque deux Branches hyperboliques qui avec une même derniére direction ſe jettent de part & d'autre de l'Aſymptote droite repréſentée par l'éq : $v = Ax + B$. Et ces deux Branches avec les deux que donne la racine ſimple $y - A'x = 0$, font les quatre Branches hyperboliques de ce genre (11).

Cas IV. Si l'équation, faite en égalant à zéro le plus haut Rang de la propoſée, n'a qu'une ſeule racine triple $y - Ax = 0$, ſes Branches infinies n'ont qu'une ſeule derniére direction parallèle à la Droite que repréſente cette éq : $y - Ax = 0$. Et ſubſtituant, dans la propoſée, $Ax + u$ à y, on aura une transformée à qui manquent, ſur le plus haut Rang, les termes x^3, ux^2, u^2x [§. 107].

1. S'il ne lui manque pas le terme x^2, la déterminatrice portera ſur cette Caſe & ſur la Caſe u^3, & donnera $u = Bx^{2:3}$, & la Série eſt réguliére. Ses prémiers termes



$Ax + Bx^{2:3}$ marquent deux Branches paraboliques, qui, ſous

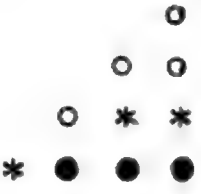
(11) Mr. Newton les appelle *Hyperboliſmes de la Parabole*, & il en détaille *cinq eſpéces* au N°. 11. Une de ces eſpéces eſt l'*Hyperbole cubique*.

On auroit pû ſubdiviſer ces trois derniers Genres, chacun en deux, ſuivant que l'Aſymptote déſignée par la racine ſimple a ſes Branches de Courbe de part & d'autre, ou d'une même part. Mais puiſque Mr. Newton n'a pas trouvé à propos de faire cette ſubdiviſion, on a cru devoir l'imiter dans une choſe aſſez indifférente.

Digitized by Google

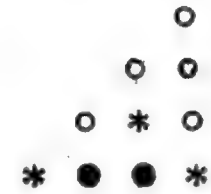
ſous des directions oppoſées, ſe jettent d'un même côté de la Droite parallèle à leur derniére direction, & qui eſt exprimée par l'éq : $y = Ax$ (12). CH. IX. §. 155.

2. S'il manque à la transformée le terme x^2, & non le terme ux, on aura deux déterminatrices ſupérieures. L'une, qui paſſe par u^3 & ux, donnera $u = \pm\sqrt{Bx}$. La



Série $y = Ax \pm \sqrt{Bx}$ &c indique deux Branches paraboliques, qui tendent d'un même côté ſous une direction parallèle à la Droite repréſentée par l'éq : $y = Ax$.

L'autre déterminatrice eſt horizontale ſi la Caſe x eſt pleine, & donne $u = B'$. Subſtituant donc $B' + t$ à u, la ſeconde transformée n'aura aucun des termes x^3, u^2x, ux^2, x^2 & x, & ſa déterminatrice paſſant par la Pointe



& la Caſe tx, donnera $t = C'x^{-1}$. La Série $y = Ax + B' + C'x^{-1}$ &c. qui eſt réguliére, indique deux Branches hyperboliques, qui, avec une direction oppoſée ſe jettent de part & d'autre de leur Aſymptote droite exprimée par l'éq : $v = Ax + B'$.

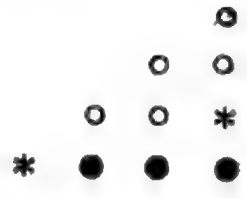
On

(12) Ce ſont les *Paraboles divergentes*, dont Mr. NEWTON compte *cinq eſpéces* au N°. 12. L'une d'elles eſt la *Parabole ſemi-cubique*.

Digitized by Google

Ch. IX. §. 155. On prouveroit, comme ci-deſſus [*Cas* III. 2], que dans cette transformée la Pointe ne peut reſter vuide. Et ſi dans la prémiére transformée le terme x avoit manqué, cela ne donneroit point de nouvelles Courbes. Seulement on auroit $u = o = B'$; l'équation de l'Aſymptote droite ſeroit $v = Ax$, ce qui marqueroit qu'elle paſſe par l'Origine. Ainſi les Courbes de ce Genre ont quatre Branches infinies, deux hyperboliques & deux paraboliques, qui ont toutes quatre leur derniére direction parallèle (11).

3. S'il manque enfin à la prémiére transformée le terme ux avec x^2, elle n'aura qu'une déterminatrice ſupérieure, qui, paſſant par les Caſes u^3 & x donnera $u =$



$Bx^{\frac{1}{3}}$. Les deux prémiers termes $Ax + Bx^{\frac{1}{3}}$ de la Série réguliére marquent deux Branches paraboliques, leſquelles, ſous des directions oppoſées, & parallèles à la Droite exprimée par l'éq: $y = Ax$, ſe jettent de part & d'autre de cette Droite.

Lorſque cette transformée eſt la plus compliquée, elle eſt $u^3 + au^2 + \beta u + \gamma + \delta x = o$. Qu'on ſubſtituë $sy + n$ à u & $ry + z + m$ à x: ce qui change les coordonnées de maniére que l'Axe des abſciſſes, & non celui des ordonnées, reſte parallèle à ſa prémiére poſition [§. 25]: l'équation ſe changera en celle-ci $s^3y^3 + (3n + a)s^2y^2 + (3n^2s + 2ans + \beta s + \delta r)y + (n^3 + an^2 + \beta n + \gamma + \delta m) + \delta z$

(11) Ce Genre ne renferme qu'*une ſeule eſpéce* de Courbes que Mr. NEWTON apelle *le Trident*. N°. 13.

$+\delta z = 0$, où l'on peut faire 1°. $3n + a = 0$, ce qui donne $n = -\frac{1}{3}a$. 2°. $3n^2 s + 2ans + \beta s + \delta r = 0$; d'où l'on tire $r = -\frac{3n^2 + 2an + \beta}{\delta} s = \frac{\frac{1}{3}a^2 - \beta}{\delta} s$. 3°. $n^3 + an^2 + \beta n + \gamma + \delta m = 0$, d'où réſulte $m = -\frac{n^3 + an^2 + \beta n + \gamma}{\delta} = -\frac{2a^3 - 9a\beta + 27\gamma}{27\delta}$. Alors l'équation ſera réduite à $s^3 y^3 + \delta z = 0$, ou $y^3 = -\frac{\delta}{s^3} z$, qui eſt à la *Parabole cubique*; elle eſt par conſéquent la ſeule Courbe de ce Genre [14]. Ch. IX. §. 151.

On ne peut pas ſuppoſer, que dans la transformée $u^3 + au^2 + \beta u + \gamma + \delta x = 0$ le terme δx manque: puiſqu'elle ſeroit réduite à une ſeule variable u, & diviſible en ſes trois racines $u - B = 0$, $u - B' = 0$, $u - B'' = 0$. Donc la propoſée ſe pourroit diviſer en trois équations $y - Ax - B = 0$, $y - Ax - B' = 0$, $y - Ax - B'' = 0$, & ne repréſenteroit que trois Droites parallèles.

Ainſi toutes les Courbes du troiſiéme Ordre ſe réduiſent aux *quatorze Genres* que nous venons d'indiquer.

156. On s'y prendra de la même maniére pour faire l'énumération des Courbes du quatriéme Ordre *. L'équation générale des Lignes de cet Ordre étant miſe ſur le Triangle analytique, le quatriéme & plus haut Rang donne une équation du quatriéme dégré, telle que $my^4 + nxy^3 + ox^2y^2 + px^3y + qx^4 = 0$, que pour abréger nous nommerons Æ. Elle a quatre racines, imaginaires ou réelles, égales ou inégales; ce qui fait huit *Cas* différens, qu'on

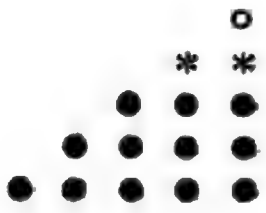
(14) Comme le remarque Mr. Newton, N°. 14.

* *Voyez* Mr. De Bragelogne, *Hiſt. de l'Acad.* 1730, 31, & 32.

Ch. IX. §. 156. qu'on peut arranger ainſi. Ou l'éq: Æ n'a que des *racines imaginaires* [Cas I], ou elle a *deux racines imaginaires & deux racines ſimples* [Cas II], ou elle a *quatre racines ſimples* [Cas III], ou elle a *deux racines imaginaires & une double* [Cas IV], ou *deux doubles* [Cas V], ou *deux ſimples & une double* [Cas VI], ou *une racine ſimple & une triple* [Cas VII], ou enfin *une ſeule racine quadruple* [Cas VIII].

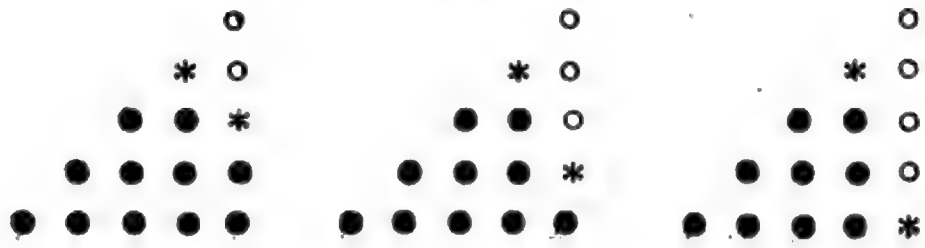
Cas I. Si les *racines* de l'éq: Æ ſont toutes *imaginaires*, la Courbe n'aura point de Branches infinies [§. 136]. Quoique ſon cours puiſſe être varié en diverſes maniéres dans un eſpace fini, ce qui donne un grand nombre d'eſpèces différentes; on doit néantmoins toutes les ranger ſous un même Genre: du moins ſi l'on s'en tient à la méthode que nous ſuivons ici, & qui conſiſte à déterminer les Genres par le nombre & l'eſpèce des Branches infinies.

Cas II. Si l'éq: Æ n'a que *deux racines ſimples*, $y - Ax = 0$, $y - A'x = 0$, on aura, en ſubſtituant $Ax + u$ à y, une transformée à laquelle manquera le terme x^4.



1. Si le terme x^3 ne manque pas, la déterminatrice horizontale donnera $ux^3 = Bx^3$, ou $u = B$: & ſubſtituant $B + t$ à u, on aura une ſeconde transformée, à laquelle manqueront les termes x^4 & x^3.

1. Si



1. Si la Caſe x^2 n'eſt pas vuide, c'eſt ſur elle que portera la déterminatrice qui part de la Caſe tx^1, & elle donnera $t = Cx^{-1}$. La Série réguliére $y = Ax + B + Cx^{-1}$ *&c.* déſigne deux Branches hyperboliques qui ſe jettent dans les angles aſymptotiques oppoſés.

2. Si la Caſe x^2 eſt vuide & la Caſe x pleine, c'eſt ſur celle-ci que porte la déterminatrice, qui donnera $t = Cx^{-2}$. La Série $y = Ax + B + Cx^{-2}$ *&c.* marque deux Branches hyperboliques, qui s'étendent d'un même côté de l'Aſymptote, dans les angles aſymptotiques de ſuite.

3. Si les Caſes x^2 & x ſont vuides, celle de la Pointe ne ſauroit l'être; parce que la ſeconde transformée ſeroit diviſible par t, la prémiére par $u - B$, & la propoſée par $y - Ax - B$, de ſorte qu'elle ne repréſenteroit qu'une Droite avec une Ligne du troiſiéme Ordre. La déterminatrice donnera donc $t = Cx^{-1}$; & la Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ *&c.* indique deux Branches hyperboliques qui tombent dans les deux angles aſymptotiques oppoſés.

II. Si dans la prémiére transformée le terme x^1 manquoit, on auroit $u = 0 = B$: ce qui feroit voir que l'Aſymptote paſſe par l'Origine, ſon éq : $v = Ax + B$ étant réduite à $v = Ax$. D'ailleurs tout le reſte ſubſiſte également, & ce vuide de la Caſe x^1 ne donne point de nouvelles Courbes.

Cu. IX. §. 156. Ainſi, ſous la derniére direction exprimée par la racine $y - Ax = 0$ de l'éq : Æ, il y a une Aſymptote droite avec deux Branches hyperboliques, mais qui peuvent être de trois différens genres. La racine $y - A'x = 0$, donne auſſi une Aſymptote droite avec deux Branches hyperboliques, qui peuvent être de trois genres différens. Donc, en combinant les uns avec les autres, on aura ſix Genres de Courbes compris dans ce ſecond *Cas*, leſquels ont chacun quatre Branches hyperboliques.

Cas III. Si l'éq : Æ a *quatre racines ſimples*, on raiſonnera ſur chacune d'elles comme on vient de faire ſur les deux racines ſimples du *Cas* préced. La Courbe a donc quatre Aſymptotes de directions différentes, & chacune d'elles eſt accompagnée de deux Branches hyperboliques, qui peuvent être de trois différents genres. Il ſemble qu'en les combinant enſemble on trouvera quinze Genres de Courbes. Mais un calcul ſemblable à celui qu'on a fait au §. *préc. Cas II*, fera voir que de ces quinze combinaiſons, il y en a ſix d'impoſſibles. Car ſoient $y - Ax - B - Cx^{-1} - Dx^{-2}$ &c $= 0$, $y - A'x - B' - C'x^{-1} - D'x^{-2}$ &c $= 0$, $y - A''x - B'' - C''x^{-1} - D''x^{-2}$ &c $= 0$, & $y - A'''x - B''' - C'''x^{-1} - D'''x^{-2}$ &c $= 0$, les quatre Séries que fourniſſent les quatre racines de l'éq : Æ. Celles où le terme x^{-1} ne manque point déſignent les Branches hyperboliques du prémier genre ; celles qui n'ont pas le terme x^{-1}, mais bien x^{-2}, marquent les Branches du ſecond genre : & celles du troiſiéme ſont indiquées par les Séries qui n'ont ni le terme x^{-1}, ni le terme x^{-2}. Or en comparant avec l'équation propoſée $\alpha y^4 + \beta xy^3 + \gamma x^2y^2$ &c
$+ \zeta y^3 + \eta xy^2$ &c
$+ \lambda y^2$ &c
le produit des quatre Séries

$y^4 -$

$$y^4-(A+A'+A''+A''')\,xy^3+(AA'+AA''+AA'''+A'A''+A'A'''+A''A''')\,x^2y^2 \;\&c$$
$$-(B+B'+B''+B''')\,y^3+\left\{\begin{matrix}AB'+AB''+AB'''+A'B+A'B''+A'B'''\\A''B+A''B'+A''B''+A'''B+A'''B'+A'''B''\end{matrix}\right\}xy^2 \;\&c$$
$$-(C+C'+C''+C''')x^{-1}y^3+\left\{\begin{matrix}AC'+AC''+AC'''+A'C+A'C''+A'C'''\\A''C+A''C'+A''C'''+A'''C+A'''C'+A'''C''\\BB'+BB''+BB'''+B'B''+B'B'''+B''B'''\end{matrix}\right\}y^2 \;\&c$$
$$+(D+D'+D''+D''')x^{-2}y^3+\left\{\begin{matrix}AD'+AD''+AD'''+A'D+A'D''+A'D'''\\A''D+A''D'+A''D'''+A'''D+A'''D'+A'''D''\\BC'+BC''+BC'''+B'C+B'C''+B'C'''\\B''C+B''C'+B''C'''+B'''C+B'''C'+B'''C''\end{matrix}\right\}x^{-1}y^2 \;\&c$$

$\&c$ $\&c$

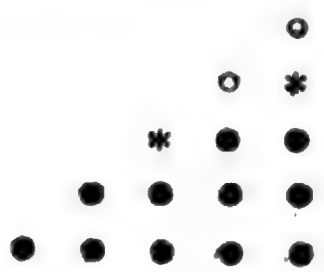
on verra que les coëfficients de $x^{-1}y^3$, $x^{-1}y^2$, $x^{-2}y^3$ $\&c$. étant zéro, 1°. $C+C'+C''+C'''=0$; de ſorte que ſi trois de ces quatre grandeurs C, C', C'', C''' ſont zéro, la quatriéme eſt auſſi néceſſairement zéro : c'eſt-à-dire, qu'il n'eſt pas poſſible qu'une ſeule des quatre Aſymptotes ait des Branches infinies du prémier genre : ce qui exclud d'abord quatre combinaiſons, ſçavoir, celle où l'on ſuppoſeroit une paire de Branches du prémier genre, & les autres, ou toutes trois du ſecond genre, ou deux du ſecond & une du troiſiéme, ou une du ſecond & deux du troiſiéme, ou toutes trois du troiſiéme. 2°. que $D+D'+D''+D'''=0$, de ſorte que C, C', C'', C''' & trois des quatre grandeurs D, D', D'', D''', étant zéro, la quatriéme l'eſt auſſi : ce qui exclud la combinaiſon qui ſuppoſe une paire de Branches infinies du ſecond genre, & les trois autres du troiſiéme. 3°. que C, C', C'', C''' étant zéro, deux des grandeurs D, D', D'', D''' ne peuvent être zéro. Car ſi on ſuppoſe, par exemple, D''' & $D''=0$, le coëfficient de $x^{-2}y^3$ ſe réduit à $D+D'$, & & celui de $x^{-1}y^2$ à $AD'+A'D+A''D+A''D'+A'''D+A'''D'$. Ainſi ces coëfficients étant égaux à zéro, on aura $-\frac{D}{D'}=1=-\frac{A+A'+A''}{A'+A''+A'''}$. Donc $A=A'$;

Ch. IX. §. 156. ce qui ſeroit contraire à la ſuppoſition que les quatre racines Ax, $A'x$, $A''x$, $A'''x$ de l'éq : Æ ſont inégales. Ainſi il faut encore exclure la combinaiſon qui ſuppoſe deux paires de Branches du ſecond genre, & deux du troiſiéme.

Donc de quinze combinaiſons que préſentent trois genres combinés quatre à quatre, en ayant exclu ſix, il en reſte neuf, qui ſont neuf Genres compris dans ce *Cas III*, ſç. 1°. Quatre paires de Branches du prémier genre. 2°. Trois du prémier & une du ſecond. 3°. Trois du prémier & une du troiſiéme. 4°. Deux du prémier & deux du ſecond. 5°. Deux du prémier, une du ſecond, & une du troiſiéme. 6°. Deux du prémier & deux du troiſiéme. 7°. Quatre du ſecond. 8°. Trois du ſecond & une du troiſiéme. 9°. Quatre paires de Branches du troiſiéme genre.

Cas IV. L'équation Æ ayant *deux racines imaginaires & une racine double* $[y - Ax = 0]$, la Droite indiquée par cette racine double eſt parallèle à la derniére direction des Branches infinies que peut avoir la Courbe. En ſubſtituant $Ax + u$ à y, dans la propoſée, on aura une transformée (T), à laquelle manquent les termes x^4 & ux^3 [§. 107].

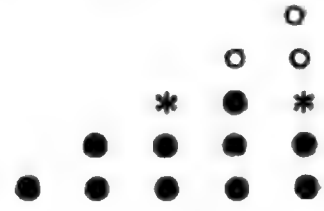
I. Si T a le terme x^3, la déterminatrice paſſera par



u^2x^2 & x^3, & donnera $u = \pm\sqrt{Bx}$. La Série, dès lors réguliére, $y = Ax \pm \sqrt{Bx}$ &c. indique deux Branches

ches paraboliques, qui embraſſent pour ainſi dire la Droite exprimée par l'éq : $y = Ax$. CH. IX. §. 156.

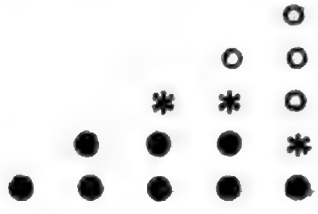
II. Mais s'il manque à T le terme x^1, la déterminatrice ſera couchée ſur la Bande x^2, & donnera une équa-

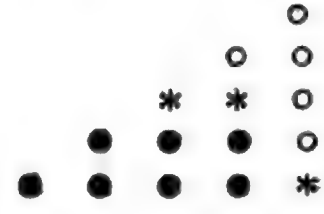


tion de cette forme $\alpha u^2x^2 + \beta ux^2 + \gamma x^2 = 0$, ou $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$, qui a, ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une ſeule racine double.

1. Si elles ſont imaginaires, la Série eſt imaginaire par ſon ſecond terme. La Courbe n'a donc point de Branches infinies.

2. Si elles ſont réelles ſimples, $u - B = 0$, $u - B' = 0$, on ſubſtituera $B + t$ à u dans T, & on aura une ſeconde transformée, à laquelle il manquera encore le terme x. La déterminatrice utile partira donc de la Caſe tx^2 & paſſera par la Caſe x; ou, ſi elle eſt vuide, par la Pointe, qui ne ſauroit être vuide, par la raiſon ſi ſouvent allé-

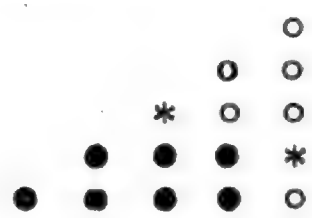




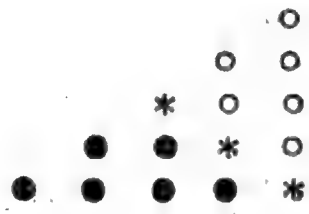
guée. On aura donc $t = Cx^{-1}$, ou $t = Cx^{-2}$. La racine B donne donc une Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c, ou $y = Ax + B + Cx^{-2}$ &c. Et la racine B' donne auſſi une Série $y = Ax + B' + C'x^{-1}$ &c. ou $y = Ax + B'$

[Ch. IX. §. 156. $+B'+C'x^{-2}$ &c. Ainſi la Courbe a deux Aſymptotes paralleles repréſentées par les éq : $v = Ax + B$, $v' = Ax + B'$. Et ces Aſymptotes ſont accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, qui ſe jettent dans les angles aſymptotiques oppoſés, ou de ſuite : ce qui, par la combinaiſon, fait trois Genres de Courbes.

3. Si l'éq : $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$ n'a qu'une racine double $u = B''$, on ſubſtituera $B'' + t$ à u dans T, & on aura une nouvelle transformée (V), à qui il manquera les termes x^2 & tx^1. Donc la déterminatrice partant de t^2x^2 portera ſur la Caſe x, ſi elle eſt pleine, & donnera $t = \pm\sqrt{Cx^{-1}}$. La Série $y = Ax + B'' \pm \sqrt{Cx^{-1}}$ &c, marque deux Branches hyperboliques qui embraſſent l'Aſymptote droite repréſentée par l'éq : $v = Ax + B''$.



III. Que ſi dans l'éq : V il manque le terme x, la déterminatrice paſſera par les Caſes t^2x^2, tx, & la Pointe, & donnera une équation de cette forme $\alpha t^2x^2 + \delta tx + \epsilon = 0$, qui aura ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une double.

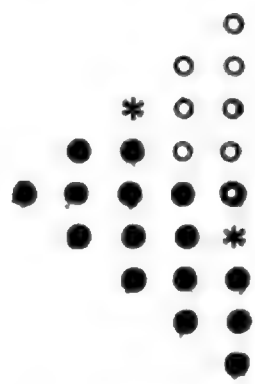


1). Si

1). Si ces deux racines ſont imaginaires, la Série eſt imaginaire par ſon troiſiéme terme, & la Courbe eſt finie. Ch. IX. §. 156.

2). Si elles ſont réelles & ſimples $t = Cx^{-1}$, $t = C'x^{-1}$, on a deux Séries $y = Ax + B'' + Cx^{-1}$ &c. $y = Ax + B'' + C'x^{-1}$ &c. qui marquent une ſeule Aſymptote, [$v = Ax + B''$] avec quatre Branches hyperboliques, étenduës, ou dans les quatre angles aſymptotiques, ſi C & C' ont des ſignes contraires, ou deux dans un de ces angles & deux dans l'oppoſé, ſi C & C' ont le même ſigne.

3). Si l'éq: $\alpha t^2x^2 + \delta tx + \epsilon = 0$ n'a qu'une racine double $t = C''x^{-1}$, la Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1}$ &c. n'eſt pas encore réguliére : mais il faut ſubſtituer $C''x^{-1} + s$ à t dans V, & l'on aura une transformée (X), où la Pointe & la Caſe sx ſeront vuides. La déterminatrice partant de la Caſe s^2x^2 paſſera par la Caſe



x^{-1}, ſi elle eſt pleine, & donnera $s = \pm\sqrt{D}x^{-1}$. La Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} \pm \sqrt{D}x^{-1}$ &c. marque deux Branches hyperboliques, qui ſe jettent dans un même angle aſymptotique, ayant pour Aſymptote-courbe une des Branches de l'Hyperbole dont l'équation eſt $v = Ax + B'' + C''x^{-1}$.

CH. IX. §. 156. IV. Si le terme x^{-1} manque dans la transformée X, la déterminatrice traverſera les Caſes s^2x^2, s & x^{-2}, & donne une équation du ſecond dégré, qui a ou deux racines imaginaires, ou deux réelles ſimples, ou une double. On reviendra donc aux raiſonnemens précédens, & on conclura, que,

(1). Si ces racines ſont imaginaires, la Courbe n'a point de Branches infinies.

(2). Si elles ſont réelles, $s = Dx^{-2}$, $s = D'x^{-2}$, les Séries $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + Dx^{-2}$ &c. $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D'x^{-2}$ &c. marquent une ſeule Aſymptote droite avec quatre Branches hyperboliques, qui ſe jettent deux à deux dans les angles aſymptotiques oppoſés.

(3). S'il n'y a qu'une racine double $s = D''x^{-2}$, la Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2}$ &c. n'eſt pas encore réguliére : mais on doit ſubſtituer $D''x^{-2} + r$ à s dans X, & on aura une autre transformée, ſur laquelle repétant le même raiſonnement, on aura, ou la Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} \pm \sqrt{E}x^{-5}$ &c. qui déſigne deux Branches hyperboliques étenduës dans un des angles aſymptotiques ; ou une Série dont le cinquiéme terme eſt imaginaire, & qui ne donne point de Branches infinies ; ou les deux Séries $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} + Ex^{-3}$ &c. $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} + E'x^{-3}$ &c. qui marquent quatre Branches hyperboliques étenduës deux à deux dans les angles aſymptotiques oppoſés ; ou enfin une ſeule Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1} + D''x^{-2} + E''x^{-3}$ &c. mais qui n'eſt pas encore en régle, & à laquelle, par un même raiſonnement, on trouve pour ſixiéme terme, ou $\pm \sqrt{F}x^{-7}$, ou un terme imaginaire, ou un terme double Fx^{-4}, $F'x^{-4}$, ou un terme ſimple $F''x^{-4}$, ſuivi d'un ſeptiéme, qui ſera, ou $\pm \sqrt{G}x^{-9}$, ou imaginaire, ou double Gx^{-5}, $G'x^{-5}$,

ou

ou ſimple $G''x^{-1}$ mais &c. ce qui peut aller à l'infini. CH. IX. §. 156.

On ne ſauroit donc énumérer tous les genres des Courbes compriſes dans ce IVe. *Cas :* mais on peut les réduire à cinq *Claſſes.*

1e. Celles qui n'ont point de Branches infinies, parce que le ſecond, troiſiéme, quatriéme, ou &c. terme de la Série qui les exprime, eſt imaginaire. N°. II, 1. III, 1). IV, (1). &c.

2e. Celles qui ont deux Branches paraboliques. N°. I.

3e. Celles qui ont deux Branches hyperboliques, ſoit qu'elles ſe jettent de part & d'autre de leur Aſymptote qu'elles ſemblent embraſſer, N°. II, 3 : ſoit qu'elles ſe jettent dans un ſeul des angles aſymptotiques, N°. III, 3). IV, (3).

4e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques autour d'une ſeule Aſymptote, ſoit qu'elles ſe jettent dans les quatre angles aſymptotiques, une dans chacun ; ſoit qu'elles ſe jettent, deux à deux, dans deux angles aſymptotiques oppoſés. N°. III, 2). IV, (2).

5e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes parallèles. N°. II, 2.

Cas V. Si l'éq : Æ a *deux racines doubles*, chaque racine donnera les mêmes variations que celles du préced. *Cas.* On les combinera donc les unes avec les autres, & on trouvera les quinze Claſſes ſuivantes.

1e. Les Courbes finies. *Combinaiſon de la 1e. Claſſe avec elle-même.*

2e. Les Courbes qui ont deux Branches paraboliques. *Claſſes 1 & 2.*

3e. Celles qui ont deux Branches hyperboliques. *Cl. 1 & 3.*

4e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques avec une ſeule Aſymptote. *Cl. 1 & 4.*

Ch. IX. §. 156. 5e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques & deux Aſymptotes parallèles. *Cl.* 1 & 5.

6e. Celles qui ont quatre Branches paraboliques. *Claſſe 2 avec elle-même.*

7e. Celles qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques. *Cl.* 2 & 3.

8e. Celles qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques avec une ſeule Aſymptote. *Cl.* 2 & 4.

9e. Celles qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques avec deux Aſymptotes parallèles. *Claſſes* 2 & 5.

10e. Celles qui ont quatre Branches hyperboliques avec deux Aſymptotes non-parallèles. *Cl.* 3 *avec elle-même.*

11e. Celles qui ont ſix Branches hyperboliques, deux autour d'une Aſymptote & quatre autour d'une autre, leſquelles Aſymptotes ne ſont pas parallèles. *Cl.* 3 & 4.

12e. Celles qui ont ſix Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes, dont deux parallèles ſont coupées par la troiſiéme. *Cl.* 3 & 5.

13e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles, ſçavoir quatre Branches autour de chaque Aſymptote. *Cl.* 4 *avec elle-même.*

14e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes, dont deux parallèles, ayant chacune deux Branches, ſont coupées par la troiſiéme qui a quatre Branches. *Cl.* 4 & 5.

15e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de quatre Aſymptotes parallèles deux à deux. *Cl.* 5. *avec elle-même.*

Cas VI. Si l'éq: Æ a *deux racines ſimples & une double*, on combinera les ſix genres du *Cas II* [leſquels ne ſont qu'une Claſſe de quatre Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles] avec les cinq Claſſes

Claſſes du IVe. *Cas*, & on aura les cinq Claſſes ſuivantes. CH. IX. §. 156.

1e. Les Courbes qui n'ont que quatre Branches hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles.

2e. Celles qui ont deux Branches paraboliques, & quatre hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles.

3e. Celles qui ont ſix Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes non parallèles.

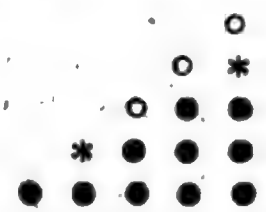
4e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de trois Aſymptotes non parallèles, ſçavoir, quatre autour d'une Aſymptote & deux autour de chacune des deux autres.

5e. Celles qui ont huit Branches hyperboliques autour de quatre Aſymptotes dont deux ſont parallèles.

Cas VII. Si l'éq: Æ a *une racine ſimple & une triple*, la racine ſimple $y - A'x = 0$ indique une Aſymptote droite, avec deux Branches hyperboliques. Elles peuvent être de trois genres différens, comme on l'a montré au *Cas I.*

Mais la racine triple étant $y - Ax = 0$, on ſubſtituera $Ax + u$ à y dans la propoſée, & on aura une transformée (T), dont les Caſes x^4, ux^3, & u^2x^2 reſtent vuides [§. 107].

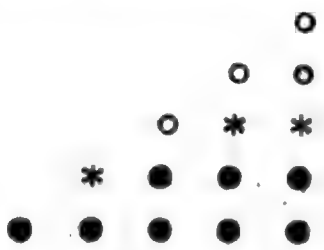
I. Si la Caſe x^3 eſt pleine, la déterminatrice traverſera



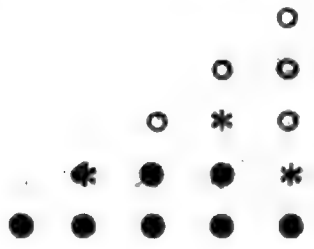
les Caſes u^3x & x^3, & donnera $u = Bx^{2:3}$. La Série, dès lors réguliére, $y = Ax + Bx^{2:3}$ *&c.* indique deux

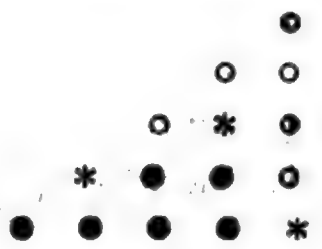
CH. IX. §. 156. Branches paraboliques d'un même côté de la Droite exprimée par $y = Ax$, qui eſt parallèle à leur derniére direction.

II. Si la Caſe x^1 eſt vuide, mais que x^2 ne le ſoit pas; on aura deux déterminatrices, l'une qui paſſe par u^1x & ux^2, & l'autre par ux^2 & x^3. La prémiére donne $u = \pm\sqrt{B'x}$, & ſa Série $y = Ax \pm \sqrt{B'x}$ &c. mar-



que deux Branches paraboliques, qui embraſſent la Droite repréſentée par l'éq : $y = Ax$, parallèle à leur derniére direction. La ſeconde déterminatrice donne $u = B$, & ſubſtituant $B + t$ à u dans T, on aura une transformée à laquelle il manque le terme x^2. La déterminatrice partant

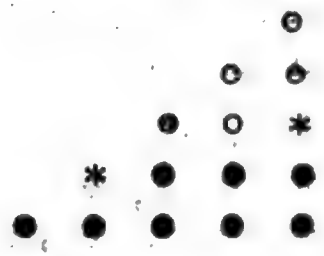




de la Caſe tx^2, portera donc ſur la Caſe x, ou, ſi elle eſt vuide, ſur la Pointe, qui, dans ce cas, ne peut être vuide, & on aura $t = Cx^{-1}$, ou $t = C'x^{-2}$. La Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. ou $y = Ax + B + C'x^{-2}$ &c. déſigne deux Branches hyperboliques d'un même côté, ou des deux côtés de l'Aſymptote droite exprimée par l'éq : $v = Ax + B$. Ces deux Branches hyperboliques, avec

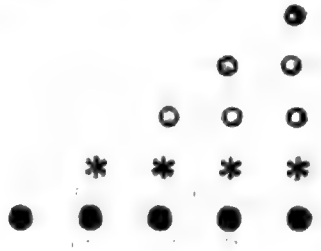
avec les deux paraboliques qu'indique la prémiére déterminatrice, ſont quatre Branches infinies dont la derniére direction eſt parallèle à la Droite repréſentée par l'éq : $y = Ax$. CH. IX. §. 156.

III. S'il manque à la transformée T le terme ux^2, elle n'a qu'une ſeule déterminatrice, qui paſſe par les Caſes u^1x & x^2, ſi celle-ci eſt pleine, & donne $u = B'x^{1:1}$. La Série $y = Ax + B'x^{1:1}$, dès lors réguliére, marque



deux Branches paraboliques, dont la derniére direction eſt parallèle à la Droite repréſentée par $y = Ax$, & qui ſe jettent enfin dans deux angles oppoſés des quatre que fait cette Droite avec l'Axe des ordonnées.

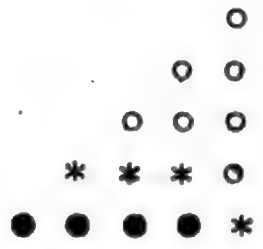
IV. S'il manque encore à la transformée T le terme x^2, la déterminatrice traverſera la bande x, & fournira une équation cubique, qui peut avoir, 1°. une racine



ſimple réelle, & deux imaginaires, 2°. trois racines ſimples, 3°. une ſimple & une double, ou 4°. une triple.

1. S'il n'y a qu'une racine ſimple $u = B$; en ſubſtituant $B + t$ à u dans T, on aura une ſeconde transformée

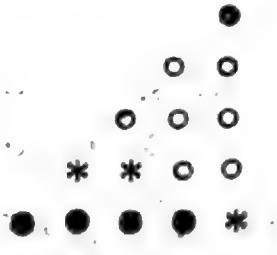
Ch. IX §. 156. mée, où la Caſe x ſera vuide. Celle de la Pointe ne pouvant l'être, la déterminatrice donnera $t = Cx^{-1}$.



La Série $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. marque deux Branches hyperboliques étenduës dans les angles aſymptotiques oppoſés.

2. S'il y a trois racines, on raiſonnera de la même maniére ſur chacune d'elles, & on conclura qu'elles indiquent trois Aſymptotes parallèles à la Droite repréſentée par l'éq: $y - Ax = 0$, & accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, qui ſe jettent dans les angles aſymptotiques oppoſés.

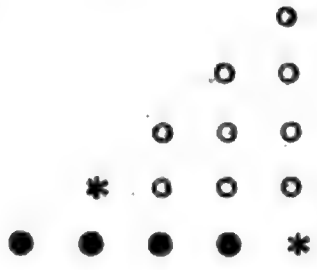
3. S'il y a une racine ſimple $u = B$, & une double $u = B'$, la racine ſimple donne, comme n°. 1 & 2, une Aſymptote droite avec deux Branches hyperboliques. Mais pour la double, on ſubſtituera $B' + t$ à u, & on aura une ſeconde transformée, à laquelle manquent les termes x & tx. La déterminatrice, partant de la Caſe t^2x, portera



ſur la Pointe, qui ne ſauroit être vuide, & donnera $t = \pm\sqrt{C'x^{-1}}$. La Série, dès lors réguliére, $y = Ax + B'$

$+B' \pm \sqrt{C'x^{-1}}$ *&c.* marque deux Branches hyperboliques qui embraſſent, pour ainſi dire, leur Aſymptote. Il y a donc ici deux Aſymptotes, accompagnées chacune de deux Branches hyperboliques, mais dont les unes ſe jettent dans les angles aſymptotiques de ſuite, & les autres dans les angles aſymptotiques oppoſés. CH. IX. §. 156.

4. Si l'équation cubique, que fournit la déterminatrice de T, n'a qu'une racine triple $u = B''$, il manquera les termes x, tx & t^2x à la transformée qui réſulte de la ſubſtitution de $B' + t$ à u dans T. La déterminatrice, partant



de la Caſe t^3x, paſſera par la Pointe, & donnera $t = C''x^{-1:3}$. La Série $y = Ax + B'' + C''x^{-1:3}$ *&c.* indique deux Branches hyperboliques jettées dans les angles aſymptotiques oppoſés.

Ainſi joignant aux Branches infinies qu'indique la racine double de l'éq: Æ, les deux Branches hyperboliques marquées par la racine ſimple, il ſe trouve ſept Claſſes de Courbes renfermées dans ce VIIe. *Cas.*

La 1e. & la 3e. ſont des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & deux Branches hyperboliques. N^os. I & III.

La 2e. eſt des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles. N°. II.

La 4e. & 7e. ſont des Courbes qui ont quatre Bran-

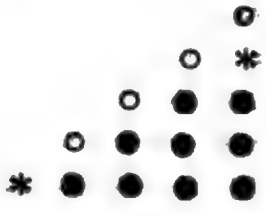
Ch. IX. §. 156. ches hyperboliques autour de deux Aſymptotes non parallèles. N°. IV, 1 & 4.

La 5e. préſente trois Aſymptotes parallèles coupées par une quatriéme, chaque Aſymptote ayant deux Branches hyperboliques. N°. IV, 2.

Et la 6e. n'a que deux Aſymptotes parallèles coupées par une troiſiéme, ayant chacune deux Branches hyperboliques. N°. IV, 3.

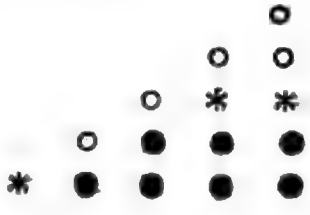
Cas VIII. Quand l'éq: Æ n'a qu'*une ſeule racine quadruple* $y - Ax = 0$; en ſubſtituant $Ax + u$ à y, on la transforme en une équat. (T), dans le plus haut Rang de laquelle, il n'y a que la Caſe u^4 qui ſoit pleine.

I. Si, dans le troiſiéme Rang, la Caſe x^3 eſt remplie, la déterminatrice donnera $u = \pm\sqrt[4]{Bx^3}$, & dès lors, la



Série $y = Ax \pm \sqrt{Bx^3}$ *&c.* eſt réguliére. Elle indique deux Branches paraboliques, qui embraſſent, pour ainſi dire, la Droite $[y = Ax]$ parallèle à leur derniére direction.

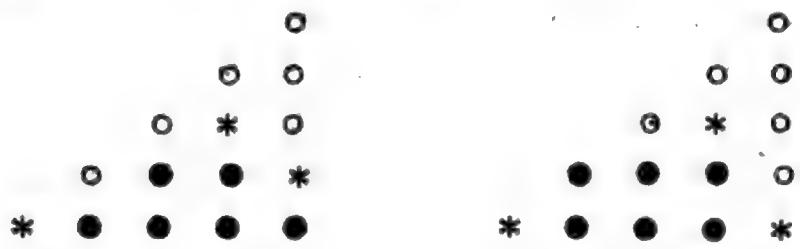
II. Si, dans le troiſiéme Rang, la Caſe x^3 eſt vuide,



mais

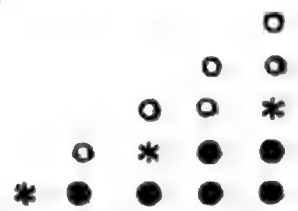
Digitized by Google

mais non pas la Caſe uz^2, on a deux déterminatrices, qui donnent, l'une $u = \sqrt[2]{B'z^2}$, l'autre $u = B$. La prémiére marque deux Branches paraboliques, qui, d'un même côté de la Droite [$y = Ax$] parallèle à leur derniére direction, ſe jettent de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. L'autre indique une Aſymptote-droite, dont l'équation eſt $v = Az + B$, & pour avoir le genre des Branches hyperboliques qui l'accompagnent, on ſubſtituera $B + t$ à u, & on aura une ſeconde transformée dont la Caſe z^2 ſera vuide. Si la Caſe z eſt pleine, on aura Ch. IX. §. 156.



$t = Cz^{-1}$. Si elle eſt vuide, on aura $t = Cz^{-2}$. Ainſi ce N°. II préſente des Courbes qui ont deux Branches hyperboliques & deux Branches paraboliques.

III. Si, dans la transformée T, il manque au troiſiéme Rang les Caſes z^3 & uz^2, la déterminatrice paſſera par les Caſes u^4, u^2z & z^2, & donnera une équation du ſecond dégré, qui aura ou deux racines imaginaires, ou deux racines réelles ſimples, ou une racine double.

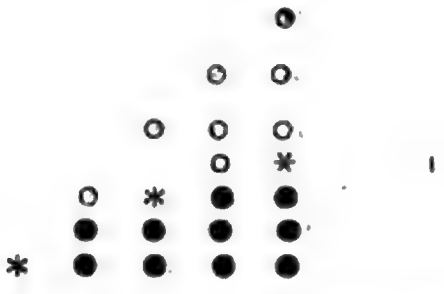


1. Si elles ſont imaginaires, la Série eſt imaginaire, & la Courbe finie.

 2. S'il

CH. IX. §. 156. 2. S'il y a deux racines réelles $uu - Bx = 0$, $uu - B'x = 0$, ou $u = \pm\sqrt{Bx}$, $u = \pm\sqrt{B'x}$, on a quatre Séries $y = Ax + \sqrt{Bx}$ &c. $y = Ax + \sqrt{B'x}$ &c. $y = Ax - \sqrt{Bx}$ &c. $y = Ax - \sqrt{B'x}$ &c. qui marquent quatre Branches paraboliques, qui ont toutes leur derniére direction parallèle à une même Droite $[y = Ax]$, qu'elles embraſſent. Ces quatre Branches ſe jettent d'un même côté de l'Axe des ordonnées, ſi B & B' ont le même ſigne; elles ſe jettent deux d'un côté & deux de l'autre, ſi B & B' ont des ſignes contraires.

3. S'il n'y a qu'une racine double $uu - B''x = 0$, ou $u = \pm\sqrt{B''x}$, la Série n'eſt pas réguliére dès ce ſecond terme. On ſubſtituera donc $\pm\sqrt{B''x} + t$ à u dans T, & on aura une ſeconde transformée (V) dont les Caſes x^2 & $tx^{1:2}$ reſtent vuides. Si la Caſe $x^{3:2}$ eſt pleine, la dé-

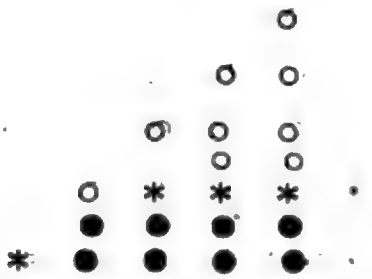


terminatrice paſſant par t^2x & $x^{1:2}$ donnera $t = \pm\sqrt{C}\sqrt{B''x}$, où il faut remarquer qu'on ne peut pas employer les deux valeurs de $\pm\sqrt{B''x}$, mais celle ſeulement qui multipliée par C fait un produit poſitif, dont la racine $\sqrt{C}\sqrt{B''x}$ n'eſt pas imaginaire. Il n'y aura donc que deux Séries $y = Ax + \sqrt{B''x} + \sqrt{C}\sqrt{B''x}$ &c & $y = Ax + \sqrt{B''x} - \sqrt{C}\sqrt{B''x}$ &c. ou $y = Ax - \sqrt{B''x} + \sqrt{C}\sqrt{B''x}$ &c. & $y = Ax - \sqrt{B''x} - \sqrt{C}\sqrt{B''x}$ &c, qui déſignent deux Branches paraboliques jettées dans un ſeul des quatre angles, que fait avec l'Axe des ordonnées la Droite $y = Ax$.

Elles

Elles ont pour Parabole-aſymptote une des Branches de la Parabole exprimée par l'éq : $v = Ax \pm \sqrt{B''x}$. Ch. IX. §. 156.

Mais ſi, dans la transformée V, la Caſe $x^{1:2}$ ſe trouve vuide, la déterminatrice couchée ſur la Bande x, dont la



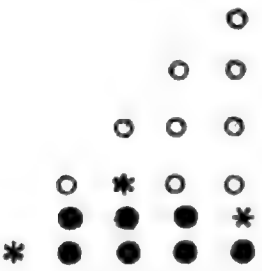
Caſe u^1x eſt vuide, donnera une équation de cette forme $\alpha u^2x + \beta ux + \gamma x = 0$, ou $\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0$, qui peut avoir, ou deux racines imaginaires, ou deux réelles ſimples, ou une double.

1). Si ces racines ſont imaginaires, les Branches infinies le ſont auſſi.

2). Si elles ſont réelles $t = C$, $t = C'$, on aura deux Séries réguliéres dès le troiſiéme terme, $y = Ax \pm \sqrt{B''x} + C + \frac{D}{\sqrt{B''x}}$ &c, $y = Ax \pm \sqrt{B''x} + C' + \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$ &c, qui marquent quatre Branches paraboliques, dont les derniéres directions ſont parallèles, & qui ont pour Aſymptote-courbe, les unes la Parabole $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C$, les autres la Parabole $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C'$.

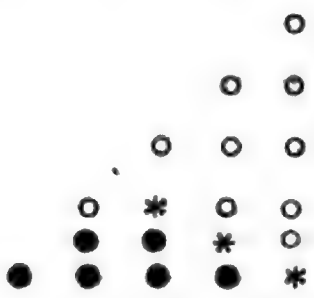
3). Mais s'il n'y a qu'une racine ſimple $t = C''$, la Série, qui commence par les trois termes $Ax \pm \sqrt{B''x} + C''$ n'eſt pas encore réguliére. Il faut ſubſtituer $C'' + s$ à t dans V, & on aura une troiſiéme transformée (X) à laquelle manqueront les termes x & sx. Donc, ſi la Caſe $x^{1:2}$ n'eſt pas vuide, la déterminatrice donnera $s = \pm \sqrt{Dx}$

CH. IX. §. 156.



$\pm\sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$, expreſſion où l'on ne doit prendre qu'une des deux valeurs de $\pm\sqrt{B'x}$; celle qui fait avec Dx^{-1} un produit négatif étant excluë, parce que la racine de ce produit ſeroit imaginaire. Il y a donc deux Séries $y = Ax + \sqrt{B''x} + C'' + \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. & $y = Ax + \sqrt{B'x} + C'' - \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. ou $y = Ax - \sqrt{B''x} + C'' + \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. & $y = Ax - \sqrt{B''x} + C'' - \sqrt{Dx^{-1}}\sqrt{B''x}$ &c. qui marquent deux Branches paraboliques, dans un même angle, & dont l'Aſymptote-courbe eſt une des deux Branches de la Parabole $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C''$.

Que ſi la Caſe $x^{1:2}$ de l'éq : X ſe trouve vuide, la déterminatrice paſſant par les Caſes s^2x, $sx^{1:2}$ & par la



Pointe, donnera une équation du ſecond dégré, de laquelle, au moyen d'un raiſonnement ſemblable à celui qu'on vient de faire, on conclura, que,

(1). Si

(1). Si elle n'a que des racines imaginaires, la Courbe n'a point de Branches infinies. CH. IX. §. 156.

(2). Si elle a deux racines réelles $s = \pm \frac{D}{\sqrt{B''x}}$, $s = \pm \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$, on aura quatre Séries $y = Ax + \sqrt{B''x} + C'' + \frac{D}{\sqrt{B'x}}$ &c. $y = Ax + \sqrt{B''x} + C'' - \frac{D}{\sqrt{B''x}}$ &c. $y = Ax - \sqrt{B''x} + C'' + \frac{D'}{\sqrt{B''x}}$ &c. $y = Ax - \sqrt{B''x} + C'' - \frac{D'}{\sqrt{b''x}}$ &c. qui indiquent quatre Branches paraboliques, dont l'Aſymptote-courbe eſt la Parabole repréſentée par l'éq : $v = Ax \pm \sqrt{B''x} + C''$.

(3). Mais s'il n'y a qu'une racine double $s = \pm \frac{D''}{\sqrt{B''x}}$, la Série $y = Ax \pm \sqrt{B''x} + C'' \pm \frac{D''}{\sqrt{B''x}}$ &c. n'eſt pas encore réguliére, & pour avoir le terme ſuivant, il faut ſubſtituer $\pm \frac{D''}{\sqrt{B''x}} + r$ à s dans X, &c. & les mêmes concluſions que ci-deſſus reviennent à l'infini.

Il y a donc une infinité de genres de Courbes compriſes ſous ce N°. III, mais qui ſe peuvent réduire à trois Claſſes.

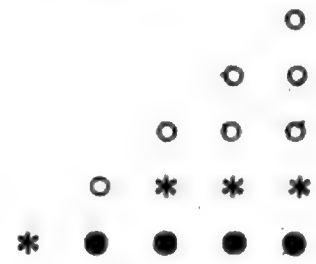
1°. Celles qui n'ont point de Branches infinies : 1, 1), (1).

2°. Celles qui ont quatre Branches paraboliques : 2, 2), (2).

3°. Celles qui n'en ont que deux, étenduës dans un ſeul des quatre angles que fait avec l'Axe des ordonnées la Droite parallèle à leur derniére direction : 3, 3), (3).

IV. S'il

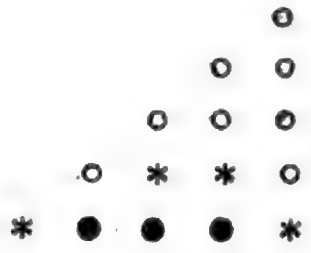
CH. IX. §. 156. IV. S'il manque, dans la transformée T, toutes les Caſes de la Bande x^2 ; elle aura deux déterminatrices. La



prémiére, qui paſſe par les Caſes u^4 & u^2x, donne $u = \pm\sqrt{Bx}$, & la Série $y = Ax \pm \sqrt{Bx}$ &c. qui en réſulte, réguliére dès le ſecond terme, indique deux Branches paraboliques, qui embraſſent la Droite $[y = Ax]$ parallèle à leur derniére direction. La ſeconde, couchée ſur la Bande x, donne une équation du ſecond dégré, qui préſente trois Cas. Car

1°. Si les racines ſont imaginaires, la Série l'eſt auſſi. La Courbe n'aura donc que les deux Branches paraboliques indiquées par la prémiére déterminatrice.

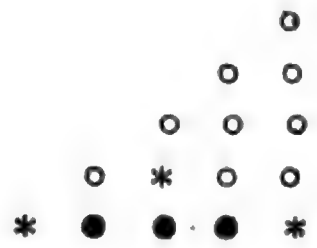
2°. Si les racines ſont réelles & inégales $u = B$, $u = B'$, on aura deux Séries réguliéres $y = Ax + B + Cx^{-1}$ &c. $y = Ax + B' + C'x^{-1}$ &c. qui marquent deux



Aſymptotes parallèles, qui ont chacune deux Branches étenduës dans les angles aſymptotiques oppoſés ; auxquelles il faut joindre les deux Branches paraboliques de la prémiére déterminatrice.

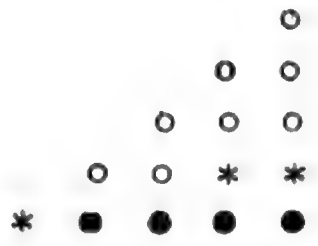
3°. Si

3°. Si ſes racines ſe réduiſent à une ſeule double $u = B''$; en ſubſtituant $B'' + t$ à u, on aura une ſeconde transformée, qui n'aura ſur la bande x que le terme $t^2 x$. La ſeconde déterminatrice donnera donc $t = \pm \sqrt{C^{\nu} x^{-1}}$. Ch. IX. §. 156.



La Série $y = Ax + B'' \pm \sqrt{C^{\nu} x^{-1}}$ *&c.* indique deux Branches hyperboliques, qui embraſſent leur Aſymptote droite exprimée par l'éq : $v = Ax + B''$, & qu'on joindra aux deux Branches paraboliques de la prémiére déterminatrice.

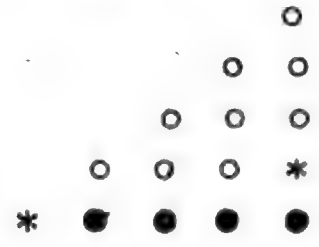
V. Qu'il manque à la transformée T les Caſes x^4, ux^3, u^2x^2 & u^3x du quatriéme rang, les Caſes x^3, ux^2, & u^2x du troiſiéme, & la Caſe x^2 du ſecond, elle aura encore



deux déterminatrices. L'une, paſſant par u^4 & ux, donne $u = Bx^{\frac{1}{3}}$, & ſa Série $y = Ax + Bx^{\frac{1}{3}}$ marque deux Branches paraboliques dont la derniére direction eſt la Droite $y = Ax$, & qui ſe jettent dans deux angles oppoſés de ceux que fait cette Droite avec l'Axe des ordonnées. L'autre déterminatrice donne $u = B'$, & par une nouvelle transformée $t = C'x^{-1}$. Sa Série $y = Ax +$

Ch. IX. §. 156. $B' + C'x^{-1}$ &c. marque deux Branches hyperboliques étenduës dans les angles aſymptotiques oppoſés. Ces Courbes ont donc deux Branches paraboliques & deux hyperboliques.

VI. Enfin, il peut encore manquer à la transformée T la Caſe ux, & alors elle n'a qu'une déterminatrice, qui



donne $u = \pm\sqrt{Bx}$. Elle indique deux Branches paraboliques, qui embraſſent la Droite [$y = Ax$] parallèle à leur derniére direction.

On ne peut pas ſuppoſer, qu'avec toutes les Caſes ſuppoſées vuides, il manque encore à la transformée T la Caſe x. Car T ſeroit réduite à la ſeule Bande ſans x, & n'exprimeroit que quatre Droites parallèles. La propoſée ne déſigneroit donc que ces Droites, & non pas une Courbe du quatriéme Ordre.

Ainſi toutes les Courbes de ce VIIIe. *Cas* ſe réduiſent à dix Claſſes.

La 1e. n'a que deux Branches paraboliques. N°. I.

La 2e. a deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, N°. II.

La 3e. n'a point de Branches infinies, N°. III, 1, 1), (1).

La 4e. a quatre Branches paraboliques, N°. III, 2, 2), (2).

La 5e. n'a que deux Branches paraboliques, N°. III, 3, 3), (3).

La

La 6e. a auſſi deux Branches paraboliques, N°. IV, 1. Ch. IX. §. 156.

La 7e. a deux Branches paraboliques & quatre hyperboliques autour de deux Aſymptotes parallèles, N°. IV, 2.

La 8e. a deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, N°. IV, 3.

La 9e. de même, N°. V.

Et la 10e. a ſeulement deux Branches paraboliques, N°. VI.

Ces dix Claſſes ſe peuvent, ſi l'on veut, réduire à cinq, en réuniſſant la 1e, la 5e, la 6e, & la 10e; & la 2e, la 8e, & la 9e.

157. Il paroit que ce ſeroit une choſe infinie, que l'énumération de tous les Genres des Courbes du quatriéme Ordre pouſſée au même détail où nous ſommes entrés pour les Courbes du troiſiéme Ordre. Mais en ſe bornant aux *Claſſes générales*, dont la diviſion eſt fondée ſur le nombre & le caractére hyperbolique ou parabolique des Branches infinies, on peut les réduire à neuf.

La 1e. Claſſe ſera des Courbes finies. Telles ſont celles du *Cas I*: *Cas IV*, Claſſe 1: *Cas V*, Claſ. 1: & *Cas VIII*, Claſ. 3.

La 2e. eſt des Courbes qui n'ont que deux Branches paraboliques, *Cas IV*, Cl. 2: *Cas V*, Cl. 2: & *Cas VIII*, Cl. 1, 5, 6, & 10.

La 3e. eſt des Courbes qui ont deux Branches hyperboliques. *Cas IV*, Cl. 3, & *Cas V*, Cl. 3.

La 4e. eſt des Courbes, qui ont quatre Branches paraboliques ſous une même derniére direction, *Cas VIII*, Cl. 4, ou ſous deux différentes derniéres directions; *Cas V*, Cl. 6.

La 5e. eſt des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques, ſoit que l'Aſymptote de celles-ci ſoit parallèle à la derniére direction de celles-là;

Ch. IX. §. 157. *Cas VIII*, Cl. 2, 8, & 9: ſoit qu'elle ne leur ſoit pas parallèle; *Cas V*, Cl. 7, & *Cas VII*, Cl. 1 & 3.

La 6e. eſt des Courbes qui ont quatre Branches hyperboliques. Elle ſe ſubdiviſe en trois, 1°. Celles qui n'ont qu'une Aſymptote, *Cas IV*, Cl. 4: & *Cas V*, Cl. 4. 2°. Celles qui ont deux Aſymptotes parallèles, *Cas IV*, Cl. 5; & *Cas V*, Cl. 5. 3°. Celles qui ont deux Aſymptotes non parallèles, *Cas II*: *Cas V*, Cl. 10: *Cas VI*, Cl. 1: & *Cas VII*, Cl. 4 & 7.

La 7e. eſt des Courbes qui ont deux Branches paraboliques & quatre Branches hyperboliques: celles-ci 1°. n'ayant qu'une Aſymptote, *Cas V*, Cl. 8: ou 2°. ayant deux Aſymptotes parallèles, *Cas V*, Cl. 9: & *Cas VIII*, Cl. 7: ou 3°. ayant deux Aſymptotes non parallèles, *Cas VI*, Cl. 2, & *Cas VII*, Cl. 2.

La 8e. eſt des Courbes qui ont ſix Branches hyperboliques. Elle a auſſi trois ſubdiviſions. 1°. de celles qui n'ont que deux Aſymptotes, non parallèles, *Cas V*, Cl. 11. 2°. de celles qui ont trois Aſymptotes, dont deux ſont parallèles, *Cas V*, Cl. 12: & *Cas VII*, Cl. 6. 3°. de celles qui ont trois Aſymptotes non parallèles, *Cas VI*, Cl. 3.

Enfin la 9e. eſt des Courbes qui ont huit Branches hyperboliques. On en peut faire ſept ſubdiviſions. 1°. Celles qui n'ont que deux Aſymptotes, non parallèles, *Cas V*, Cl. 13. 2°. Celles qui ont trois Aſymptotes, dont deux ſont parallèles, *Cas V*, Cl. 14. 3°. Celles qui ont trois Aſymptotes non parallèles, *Cas VI*, Cl. 4. 4°. Celles qui ont quatre Aſymptotes, dont trois ſont parallèles, *Cas VII*, Cl. 5. 5°. Celles qui ont quatre Aſymptotes parallèles deux à deux, *Cas V*, Cl. 15. 6°. Celles qui ont quatre Aſymptotes, dont deux ſeulement ſont parallèles, *Cas VI*, Cl. 5. 7°. Celles qui ont quatre Aſymptotes non parallèles, *Cas III*.

158. En

Digitized by Google

158. En ſuivant la même route, & au moyen de quelques abregés, il paroit qu'on pourroit diſtribuer les Courbes du cinquiéme Ordre en onze *Claſſes*. CH. IX. §. 158.

La 1e. des Courbes qui n'ont que deux Branches paraboliques.

La 2e. des Courbes qui n'ont que deux Branches hyperboliques.

La 3e. de celles qui ont quatre Branches paraboliques.

La 4e. de celles qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques.

La 5e. de celles qui ont quatre Branches hyperboliques dont les deux Aſymptotes ſeront ou parallèles, ou non parallèles.

La 6e. de celles qui ont ſix Branches infinies, quatre paraboliques & deux hyperboliques.

La 7e. de celles qui ont auſſi ſix Branches infinies, mais deux paraboliques & quatre hyperboliques; autour d'une ſeule Aſymptote; ou autour de deux Aſymptotes parallèles; ou autour de deux Aſymptotes non parallèles.

La 8e. de celles qui ont ſix Branches hyperboliques; autour de deux Aſymptotes non parallèles, dont l'une eſt accompagnée de deux Branches & l'autre de quatre; ou bien autour de trois Aſymptotes, qui peuvent être parallèles; ou dont deux ſeulement ſeront parallèles; ou qui ne ſeront point parallèles.

La 9e. de celles qui ont deux Branches paraboliques & ſix hyperboliques autour des mêmes Aſymptotes que dans la Claſſe précédente.

La 10e. eſt de celles qui ont huit Branches hyperboliques; ou autour de trois Aſymptotes non parallèles; ou dont deux ſont parallèles, la troiſiéme ayant quatre Branches, & les parallèles chacune deux; ou autour de quatre Aſymptotes qui ont chacune deux Branches, & deſquelles trois peuvent être parallèles & coupées par la quatriéme;

CH. IX. §. 158. ou dont deux ſeulement ſont parallèles ; ou qui ſont parallèles deux à deux ; ou enfin qui ne ſont point parallèles.

Et la 11e. eſt de celles qui ont dix Branches hyperboliques ; ou autour de trois Aſymptotes non parallèles, dont une n'a que deux Branches, & les deux autres chacune quatre Branches ; ou autour de quatre Aſymptotes, dont trois peuvent être parallèles, & ayant chacune deux Branches ſont coupées par la quatriéme qui en a quatre ; ou bien dont deux ſeulement ſont parallèles & coupées par les deux autres, une deſquelles a quatre Branches ; ou autour de cinq Aſymptotes, qui peuvent, ou n'être point parallèles, ou n'en avoir que deux parallèles ; ou en avoir trois ; ou en avoir deux couples de parallèles coupées par la cinquiéme ; ou en avoir trois parallèles coupées par les deux autres auſſi parallèles.

159. DONC, pour recapituler le tout,

I. La Ligne du prémier Ordre a deux Branches infinies rectilignes.

II. Dans le 2e. Ordre, il y a une Courbe finie, une infinie avec deux Branches paraboliques, & une avec quatre Branches hyperboliques.

III. Dans le 3e. Ordre, il y a des Courbes qui ont deux Branches paraboliques [*Genres* 12 & 14] ; d'autres qui n'ont que deux Branches hyperboliques [*G.* 1, 2, & 9] ; d'autres qui ont deux Branches paraboliques & deux hyperboliques [*G.* 7, 8, & 13] ; d'autres qui ont quatre Branches hyperboliques [*G.* 11] ; & d'autres qui en ont ſix [*G.* 3, 4, 5, 6 & 10].

IV. Dans le 4e. Ordre, on trouve des Courbes finies [*Cl.* 1] ; d'autres, qui ont deux Branches infinies, ou paraboliques [*Cl.* 2], ou hyperboliques [*Cl.* 3] : d'autres qui ont quatre Branches infinies, ou paraboliques [*Cl.* 4], ou

hyperboliques [*Cl.* 6], ou moitié paraboliques & moitié hyperboliques [*Cl.* 5]; d'autres, qui ont ſix Branches infinies, ou toutes hyperboliques [*Cl.* 8], ou quatre hyperboliques & deux paraboliques [*Cl.* 7]: & d'autres enfin, qui ont huit Branches infinies, toutes hyperboliques [*Cl.* 9]. CH. IX. §. 159.

V. Dans le 5e. Ordre, il y a des Courbes qui n'ont que deux Branches infinies, ou paraboliques [*Cl.* 1], ou hyperboliques [*Cl.* 2]: il y en a qui ont quatre Branches infinies, paraboliques [*Cl.* 3], hyperboliques [*Cl.* 5], ou mi-parties [*Cl.* 4]; il y en a qui ont ſix Branches infinies, quatre paraboliques & deux hyperboliques [*Cl.* 6], ou deux paraboliques & quatre hyperboliques [*Cl.* 7], ou toutes ſix hyperboliques [*Cl.* 8]: il y en a qui ont huit Branches, ou deux paraboliques & ſix hyperboliques [*Cl.* 9], ou toutes huit hyperboliques [*Cl.* 10]: il y en a enfin, qui ont dix Branches infinies, toutes hyperboliques [*Cl.* 11].

160. Où l'on voit, & cette Obſervation peut faire une Régle générale, que le nombre des Branches paraboliques ne ſurpaſſe jamais l'expoſant de l'Ordre de la Courbe, ni même cet expoſant diminué de l'unité, lorſqu'il eſt impair: que le nombre des Branches hyperboliques ne ſurpaſſe jamais le double de l'expoſant de l'Ordre de la Courbe: & qu'à compter deux Branches hyperboliques pour une ſeule, le nombre des Branches infinies, tant paraboliques qu'hyperboliques, ne ſurpaſſe jamais l'expoſant: ce dont la raiſon n'eſt pas difficile à pénétrer par les principes établis dans le Chap. précéd.

CHAPI-

CHAPITRE X.

Des Points ſinguliers : Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpentement.

161. LE NOMBRE, l'eſpèce & la poſition des Branches infinies diſtinguent les Courbes des différens Ordres en leurs Claſſes & Genres. Ces Genres ſe ſubdiviſent en Eſpèces par les varietés, qui conſiſtent en ce que les Courbes ont de remarquable dans un eſpace fini, & qui ſe réduiſent principalement à des *Points ſinguliers*. On donne ce nom aux Points qui ſe diſtinguent des autres Points de la même Courbe par quelque choſe de particulier.

Tout Point d'une Courbe eſt ſimple ou multiple. On apelle *Point ſimple*, celui qui n'apartient qu'à une ſeule Branche de la Courbe, & *Point multiple*, celui qui eſt commun à pluſieurs Branches. En particulier, on nomme *Point double* celui qui eſt commun à deux Branches ; *Point triple* celui qui apartient à trois ; *Point quadruple*, *&c.*

On voit déjà que les Points multiples ſont ſinguliers. Les Points ſimples le ſont auſſi, lorſqu'ils ſont *Points d'Inflexion*, ou *Points de Serpentement*.

162. Pour entendre ce que c'eſt qu'une *Inflexion* & un *Serpentement*, & quels ſont leurs différens dégrés ; on conſidérera qu'une Droite *coupe* une Ligne, quand elle la traverſe au point où elle la rencontre, & qu'elle laiſſe une partie de la Ligne d'un côté & une partie de l'autre. Cette Droite s'apelle *Sécante*.

Une

Ch. X. §. 162. Une Sécante peut rencontrer la Courbe en plus d'un point. Si deux *Points de Section* s'aprochent infiniment l'un de l'autre, en ſorte qu'ils ſe réuniſſent & ſe confondent en un ſeul, la Sécante devient *Tangente*, & les deux Points de ſection réunis ne ſont plus qu'un ſeul *Point de contact*, ou *d'attouchement*. Pl. XVI.

Soit, par ex., un Cercle AEB décrit ſur le diamétre AB, qui coupe la Circonférence en deux Points A, B, éloignés de toute la diſtance AB. Si l'on imagine que ce diamétre vient à ſe mouvoir parallèlement à lui-même, & qu'il paſſe dans la ſituation CD; les Points de ſection ſe ſont aprochés l'un de l'autre, car la chorde CD eſt plus petite que le diamétre AB. S'il continuë à ſe mouvoir en cd, les Points de ſection ſe raprochent toújours plus, parce qu'une chorde eſt d'autant plus petite qu'elle eſt plus éloignée du centre; juſqu'à ce que ce diamétre étant paſſé en $\alpha\delta$, il ceſſe de couper la circonférence, mais il la touche au Point E, où l'on peut feindre qu'il la coupe en deux points infiniment proches l'une de l'autre; parce qu'en effet couper en deux Points réunis, c'eſt toucher en un ſeul Point. Fig. 111.

Une Tangente eſt donc cenſée rencontrer en deux Points la Courbe qu'elle touche, mais en deux Points infiniment proches l'un de l'autre, & coïncidents. Ainſi dans les Courbes du ſecond Ordre, la Tangente ne peut rencontrer la Courbe qu'au ſeul Point d'attouchement: car ſi elle la rencontroit en un autre Point, elle ſeroit cenſée la rencontrer trois fois; ce qui n'eſt pas poſſible dans une Ligne de cet Ordre [§. 39].

163. Mais dans les Lignes des Ordres ſupérieurs, la Tangente peut encore rencontrer la Courbe qu'elle touche. Si trois Points de ſection ſe réuniſſent, la Droite qui paſſe par ces trois Points réunis, ou infiniment pro-

Pl. XVI. ches, touche & coupe en même tems la Courbe, & le Point où ils ſe réuniſſent eſt un *Point d'Inflexion.* Ch. X. §. 163.

Fig. 112. Soit, par ex. AdD une Parabole cubique repréſentée par l'éq: $y = ax^3$. Et ſoit conçuë au point D une Tangente, qui coupe encore la Courbe en E. Si cette Tangente gliſſe le long de la Parabole, la touchant toûjours plus près de l'origine A; quand elle ſera parvenuë en de, le Point de ſection e ſe ſera aproché du Point de contact d. Et il s'en aprochera toûjours plus, juſqu'à-ce que ces deux Points coïncident en A; lorſque la Tangente, parvenuë dans la ſituation BA, touche & coupe la Courbe en un même Point A, où l'on peut concevoir trois Points réunis, ſç. le Point de ſection & les deux Points auxquels eſt équivalent le Point d'attouchement.

Le Point A eſt apellé *Point d'Inflexion*, parce qu'en ce point la Courbe eſt comme pliée & fléchie; la Branche, qui eſt d'une part, tournant ſa concavité du même côté vers lequel la Branche, qui eſt de l'autre part, tourne ſa convexité.

On verra peut-être plus ſenſiblement que toucher en un Point d'Inflexion eſt une choſe équivalente à couper trois Points réunis, ſi on ſe repréſente la même Parabole

Fig. 113. DdAeE, par l'Origine A de laquelle on a mené une Droite DAE oblique aux coordonnées, & qui rencontre la Courbe en deux autres Points D, E. Que cette Droite vienne à tourner ſur le Point A, & à s'aprocher de la Ligne des abſciſſes, en paſſant de DAE en dAe. Les Points de ſection d, e, ſe ſont aprochés de l'Origine A, & s'en aprocheront toujours plus, juſqu'à-ce que la Droite DAE étant enfin paſſée dans la ſituation BAb, qui eſt celle de l'Axe des abſciſſes, les trois Points de ſection D, A, E ſont confondus en un ſeul Point A d'Inflexion.

La Tangente au Point d'Inflexion eſt donc cenſée rencontrer

Ch. X. §. 163. contrer la Courbe en trois Points. Donc les Lignes du second Ordre ne ſont pas ſuſceptibles d'Inflexion [§. 59]. Et dans celles du troiſiéme Ordre, la Tangente au Point d'Inflexion ne peut plus rencontrer la Courbe. Pl. XVI.

164. Mais dans les Lignes du quatriéme Ordre & des Ordres ſupérieurs, une Tangente AB en un Point d'Inflexion A peut encore rencontrer la Courbe, comme en B. Si, par quelque ſuppoſition, la diſtance AB devient infiniment petite Ab, la Droite AB ne coupe plus la Courbe, elle ne fait que la toucher. Mais ce contact eſt équivalent à quatre interſections, ou à deux attouchemens ſimples, infiniment proches l'un de l'autre. L'Inflexion ne paroit plus, quoiqu'elle exiſte réellement dans un eſpace infiniment petit, & qu'elle ſoit ſenſible à l'Analyſe, dont la vuë, ſi l'on oſe parler ainſi, eſt plus perçante que la nôtre. On donne à ces Points le nom de *Points de double Inflexion*, ou *Points de Serpentement* *. Fig. 114.

165. De même, le *Point de triple Inflexion* eſt celui dans le contact duquel ſe réuniſſent cinq interſections : Et dans l'attouchement du *Point de quadruple Inflexion*, ou *de double Serpentement* ſont cenſés confondus ſix Points de ſection. En général, la multiplicité de l'Inflexion ſe compte par le nombre des interſections, moins deux, qui ſe réuniſſent dans le contact de ce Point-là : & la multiplicité du Serpentement par la moitié du nombre des interſections moins deux, qui ſont cenſées confonduës dans le contact de ce Point-là.

166. Il eſt aiſé de voir que les Inflexions ſont alternativement viſibles & inviſibles, en paſſant d'un dégré à

* Mr. de Maupertuis, *Mem. de l'Acad.* 1729. p. 277.

Digitized by Google

PL. XVI. l'autre * : que les ſimples, les triples, les quintuples, & en général celles d'un dégré impair, ſont viſibles ; parce qu'en ce Point-là la Courbe change ſa convexité en concavité, & que la Tangente y eſt en même Sécante. Mais que les Inflexions doubles, les quadruples, & en général celles d'un dégré pair, ſont inviſibles, & ne différent en rien, à la vûë, des ſimples Points de la Courbe : ils ne ſont reconnoiſſables que par les effets que leur exiſtence produit dans le Calcul. C'eſt proprement ces *Points d'Inflexion inviſible* qu'on nomme *Points de Serpentement*. CH. X. §. 166.

167. Il ſuit de là, que les Lignes les plus ſimples, qui ſoient ſuſceptibles d'une Inflexion du dégré t, ſont celles de l'Ordre $t+2$: parce qu'une Droite, qui touche une Courbe en un Point d'Inflexion du dégré t, eſt cenſé la rencontrer en $t+2$ Points [§. 165]. Que les Lignes les plus ſimples, qui ſoient ſuſceptibles d'un Serpentement du dégré v, ſont les Lignes de l'Ordre $2v+2$ [§. 165]. Et que dans les Lignes de l'Ordre $t+2$, ou $2v+2$, la Droite qui les touche en un Point d'Inflexion du dégré t, ou en un Point de Serpentement du dégré v, ne peut plus les rencontrer [§. 39].

168. On trouvera des Exemples de toutes ces eſpèces de Points ſimples, dans les Sommets des Paraboles dont l'équation eſt $y = x^b$, b étant un nombre entier & poſitif.

I. La Parabole ordinaire $y = xx$ n'a au ſommet qu'un Point tout ſimple, ſans Inflexion, ni Serpentement. Auſſi, faiſant $y = 0$, on a $xx = 0$, qui n'a que deux racines $x = 0$, $x = 0$; d'où il paroit que l'Axe des abſciſſes ne

* *Hiſt. de l'Acad.* 1730. pag. 72.

CH. X. §. 168. ne rencontre la Courbe au ſommet que deux fois, qu'il la touche ſimplement. PL XVI.

II. Mais la Parabole cubique $y = x^3$ a une Inflexion à l'Origine. C'eſt pourquoi $y = 0$ donne $x^3 = 0$, dont les trois racines égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, montrent que la Ligne des abſciſſes rencontre trois fois la Courbe à l'Origine, qu'elle y eſt en même tems Tangente & Sécante. Fig. 115.

On le verra clairement, ſi, au lieu de l'éq : $y = x^3$, on prend $y = x^3 - bx^2$, qui repréſente une Courbe que l'Axe des abſciſſes touche à l'Origine A & rencontre au point B. Car, faiſant $y = 0$, on aura $x^3 - bx^2 = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. Ainſi l'Axe rencontre deux fois la Courbe en A, [c'eſt à-dire, il l'y touche], & une fois en B à l'extrémité de l'abſciſſe AB $= b$. Mais ſi l'on conçoit que b diminuë par dégrés, le point B s'aproche de A, juſqu'à-ce que b devenant zéro, B tombe ſur A ; l'éq : $y = x^3 - bx^2$ deviendra $y = x^3$, dans laquelle la ſuppoſition de $y = 0$ donne à x trois valeurs égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, parce que l'Axe des abſciſſes rencontre trois fois la Courbe au point A devenu Point d'Inflexion. Fig. 116.

Ou bien, qu'au lieu de l'éq : $y = x^3$, on prenne $y = x^3 - b^2x$. Cette équation exprime une Courbe, qui coupe trois fois l'Axe des abſciſſes, ſç. à l'Origine A, & aux points B, b, extrémités des abſciſſes AB $= -b$, & Ab $= b$; car $y = 0$ donne $x^3 - b^2x = 0$, qui a trois racines, $x = 0$, $x = b$, $x = -b$. Si donc b diminuë juſqu'à s'anéantir, les points B & b s'aprochent de l'Origine juſqu'à ſe confondre avec le Point A. Alors l'éq : $y = x^3 - bbx$ ſe réduit à $y = x^3$, & ſes trois racines $x = 0$, $x = b$, $x = -b$ ſe réduiſent à $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$; ce qui marque un Point d'Inflexion à l'Origine. Fig. 117.

Pl. XVI. III. La Parabole quarré-quarrée, $y = x^4$ a un Point de Serpentement, ou de double Inflexion, à l'Origine. Car $y = 0$ donne $x^4 = 0$, dont les quatre racines égales $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$ marquent que l'Axe des abſciſſes rencontrera quatre fois la Courbe à l'Origine : & qu'ainſi ce Point, étant un Point ſimple, eſt Point de Serpentement. Ch. X. §. 168.

Cela ſera rendu ſenſible, en ſubſtituant à l'éq: $y = x^4$, l'éq: $y = x^4 - bx^3$, qui repréſente une Courbe, que l'Axe des abſciſſes touche à l'Origine A en un Point d'Inflexion, & coupe en un point B éloigné de A de la diſtance $AB = b$. Car $y = 0$ donne $x^4 - bx^3 = 0$, dont les racines ſont $x = 0$, $x = 0$, $x = 0$, $x = b$. Mais à meſure que b diminuë, B s'aproche d'A, avec lequel il ſe confond enfin, quand b, devenu zéro, rend la racine $x = b$, égale aux trois autres $x = 0$. La Courbe bADB change alors ſon équat: $y = x^4 - bx^3$ en celle-ci $y = x^4$ & devient par conſéquent une Parabole quarré-quarrée bAd, dont l'Origine A eſt un Point de Serpentement, ou de double Inflexion, puiſqu'aux trois Points de ſection que renfermoit déjà le ſommet A, il s'y joint encore celui qui étoit en B. Fig. 118.

On peut auſſi, au lieu de $y = x^4$, prendre l'éq: $y = x^4 - (bb + cc)x^2 + bbcc$. Elle repréſente une Courbe, qui coupe quatre fois l'Axe des abſciſſes, ſç. en c, b, B, & C, extrémités des abſciſſes $Ac = -c$, $Ab = -b$, $AB = b$, $AC = c$: car $y = 0$ donne $x^4 - (bb + cc)x^2 + bbcc = 0$, qui a ces quatre racines $x = c$, $x = -c$, $x = b$, $x = -b$. A meſure que b diminuera, les points B & b s'aprocheront de A, & s'y réuniront quand b ſera zéro. Alors la Courbe, dont l'équation eſt $y = x^4 - ccxx$, touche l'Axe des abſciſſes à l'Origine A, où ce contact réunit les deux interſections B, b, & elle continuë à le couper en C, c. Auſſi $y = 0$ donne $x^4 - ccxx = 0$, Fig. 119. Fig. 120.

Ch. X. §. 168. $= 0$, dont les quatre racines ſont $x = 0, x = 0, x = c,$ $x = -c$. Mais ſi c devient auſſi zéro, les deux Points de ſection C, c viennent encore ſe confondre avec les deux qui ſont déja en A, & le ſommet de la Courbe, qui n'eſt plus que la Parabole quarré-quarrée $y = x^4$, réunit les quatre interſections c, b, B, C. C'eſt donc un Point de Serpentement. Pl. XVI.

IV. La Parabole quarré-cubique $y = x^5$ a un Point de triple Inflexion à l'origine : puiſque $y = 0$ donne $x^5 = 0$, qui a cinq racines égales à celle-ci $x = 0$. L'Axe des abſciſſes eſt donc cenſé rencontrer cinq fois la Courbe à l'Origine, qui n'eſt pourtant qu'un Point ſimple.

Si on ſubſtituë à l'éq : $y = x^5$, l'éq : $y = x^5 - (bb + cc)x^3 + bbccx$, on aura une Courbe, qui coupe cinq fois l'Axe des abſciſſes, ſç. à l'Origine A, & aux extrémités B, b, C, c, des abſciſſes $AB = b$, $Ab = -b$, $AC = c$, $Ac = -c$. En effet, $y = 0$ donne $x^5 - (bb + cc)x^3 + bbccx = 0$, qui a ces cinq racines, $x = 0$, $x = b$, $x = -b$, $x = c$, $x = -c$. Fig. 122.

Si, dans cette équation, on fait $b = c$, ce qui la change en $y = x^5 - 2ccx^3 + c^4x$; les deux Points de ſection B & C ſe réuniſſent en un Point de contact, auſſi bien que les deux Points b & c. L'Axe des abſciſſes, qui coupe la Courbe en A & la touche en deux autres Points, eſt toûjours cenſé la rencontrer cinq fois. Fig. 122.

Si, au lieu de faire $b = c$, on eut fait $b = 0$, les deux Points de ſection B, b ſe ſeroient réunis au Point, de ſection A, l'Origine ſeroit devenuë un Point d'Inflexion touché par la Ligne des abſciſſes, & l'équation de la Courbe ſeroit $y = x^5 - ccx^3$. Fig. 123.

Mais, ſi l'on fait b & $c = 0$, les cinq Points de ſection ſe confondent en un ſeul Point de triple Inflexion à l'Origine, & la Courbe devient la Parabole quarré-cubique dAD, dont l'équation eſt $y = x^5$.

On

PL. XVI. On pourroit ſuivre à l'infini cette maniére de faire voir que la Tangente au Point d'Inflexion rencontrera la Courbe en deux Points de plus qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant du dégré de leur Inflexion. Et on trouvera généralement que la Parabole, dont l'équation eſt $y = x^t$, a à l'Origine une Inflexion du dégré $t - 2$, laquelle eſt viſible, ſi t eſt impair; inviſible, ſi t eſt pair : en quel cas, c'eſt un Serpentement du dégré $\frac{1}{2}t - 1$. CH. X. §. 168.

169. TELLES ſont les ſingularités des Points ſimples. Quant aux *Points multiples*, on a déja dit [§. 161] que le *Point double* eſt celui qui eſt commun à deux Branches de la Courbe, celui par où elle paſſe deux fois. Il y a donc cette différence entre le Point double & le Point ordinaire, c'eſt que, dans le Point ordinaire, la Tangente eſt la ſeule Droite qui ſoit cenſée y rencontrer deux fois la Courbe; au lieu que toute Droite qui paſſe par un Point double eſt cenſée y rencontrer la Courbe, au moins deux fois.

Le *Point triple* eſt celui qui eſt commun à trois Branches de la Courbe, celui par lequel la Courbe paſſe trois fois. Ainſi il différe du Point d'Inflexion, en ce que dans celui-ci la Tangente eſt la ſeule Droite qui ſoit cenſée y rencontrer trois fois la Courbe; au lieu que toute Droite qui paſſe par un Point triple eſt cenſée y rencontrer la Courbe, au moins trois fois.

De même, le *Point quadruple* eſt celui par lequel la Courbe paſſe quatre fois. Toute Droite qui traverſe un Point quadruple eſt donc cenſée y rencontrer la Courbe, au moins quatre fois : ce qui fait la différence du Point quadruple au Point de Serpentement, dont la Tangente ſeule eſt cenſée y rencontrer quatre fois la Courbe.

Ceci

Digitized by Google

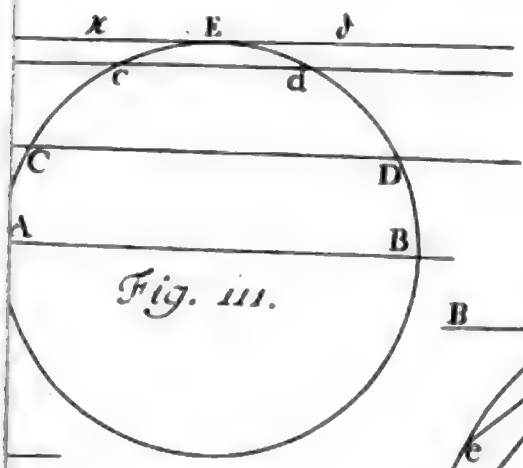


Fig. 111.

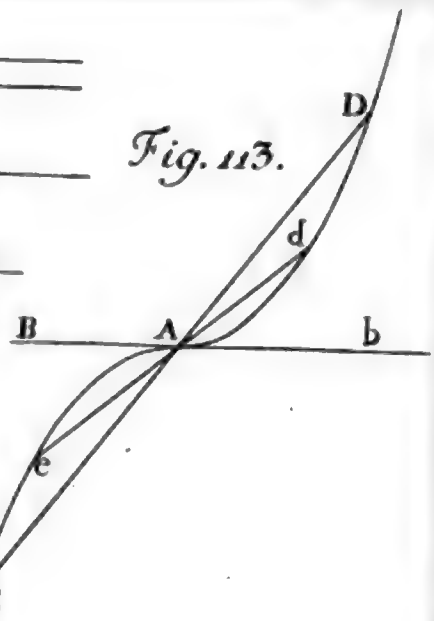


Fig. 113.

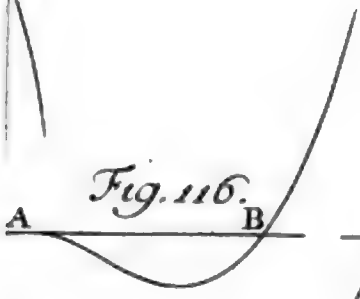


Fig. 116.

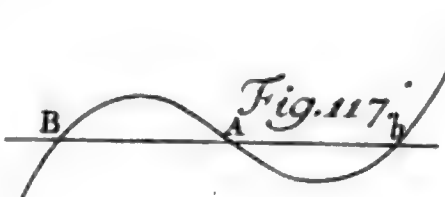


Fig. 117.

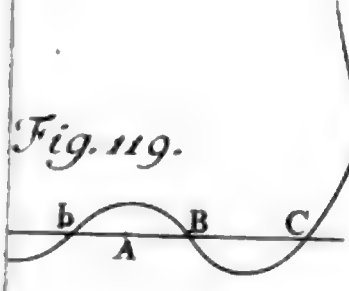


Fig. 119.

Fig. 120.

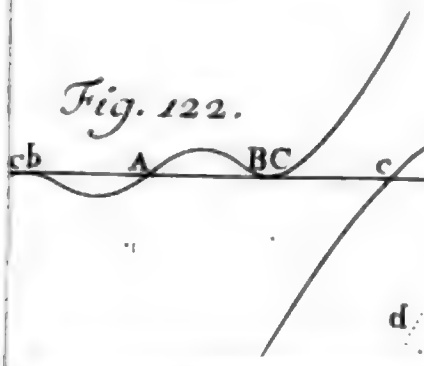


Fig. 122.

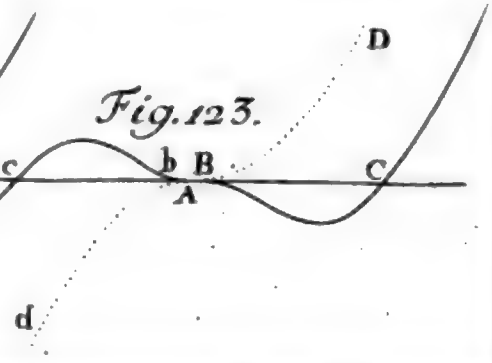


Fig. 123.

Digitized by Google

Digitized by Google

CH. X. §. 169. Ceci s'aplique ſans peine aux *Points quintuples*, & en général aux Points d'une multiplicité quelconque. PL. XVII.

Ainſi pour ſavoir ſi un Point aſſigné d'une Courbe eſt un Point multiple, & quel eſt le dégré de ſa multiplicité; il faut examiner combien de fois une Droite quelconque, menée par ce Point-là, y rencontre la Courbe *.

170. Pour cet effet, on ſuppoſera d'abord que l'Origine eſt priſe ſur le Point aſſigné, & conſervant la poſition de l'Axe des abſciſſes, on donnera à celui des ordonnées une poſition indéterminée. Cela ſe fait [§. 25. n°. 2] en ſubſtituant dans l'équation de la Courbe su à y & $z + ru$ à x; $s : r$ marquant ici une raiſon quelconque, c'eſt-à-dire, une raiſon indéterminée. Mais, comme on ne transforme l'équation que pour ſavoir en combien de points la prémiére ordonnée rencontre la Courbe, ce qui ſe trouve en faiſant $z = 0$ dans la transformée [§. 15.], on peut faire cette ſuppoſition, même avant la ſubſtitution, en écrivant ſimplement su pour y & ru pour x. Cette ſubſtitution ſe fera donc en écrivant ſeulement s pour y, & r pour x, & multipliant chaque terme par la puiſſance d'u dont l'expoſant eſt égal à la ſomme des expoſants de x & de y dans ce terme; c'eſt-à-dire, en multipliant les termes du prémier Rang par u, ceux du ſecond Rang par u^2, ceux du troiſiéme par u^3, &c. De cette maniére l'équat. générale $a + by + cx + dyy + exy + fxx + gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 + \&c = 0$, ſe change en $a + (bs + cr)u + (dss + esr + frr)uu + (gs^3 + hssr + isrr + lr^3)u^3 + \&c = 0$. Et cette derniére équation indique par le nombre de ſes racines en combien de points une Droite quelconque paſſant par l'Origine rencontre la Courbe †.

* M. DE GUA, *Uſage de l'Anal.* pag. 88, & ſ.

† *Uſage de l'Anal.* pag. 88.

Digitized by Google

PL. XVI. Comme on ne cherche ici qu'à ſavoir combien de fois cette Droite rencontre la Courbe à l'Origine ; ce n'eſt qu'aux racines $u = 0$ qu'il faut s'arrêter : car les autres indiquent bien des points où l'ordonnée primitive rencontre la Courbe ; mais ces points ſont hors de l'Origine [§. 15] ; au lieu que les racines égales à zéro marquant que la Droite dont nous parlons rencontre la Courbe à l'Origine, ſi l'équation n'en a aucune, la Droite ne rencontre point la Courbe à l'Origine : l'Origine n'eſt pas un Point de la Courbe. Si l'équation n'a qu'une ſeule racine égale à zéro, la Droite rencontre une ſeule fois la Courbe à l'Origine, qui eſt, par conſéquent, un Point de la Courbe, mais un Point ſimple. Si cette équation a deux, trois, quatre, ou pluſieurs racines égales à zéro, la Droite quelconque, menée par l'Origine, y rencontre la Courbe, deux, trois, quatre, ou pluſieurs fois : l'Origine eſt donc un Point double, triple, quadruple, multiple. CH. X. §. 170.

L'éq : $a + (bs + cr)u + (dss + esr + frr)uu + (gs^3 + hssr + isrr + kr^3)u^3$, &c $= 0$ a autant de racines égales à zéro qu'il lui manque de termes initiaux. Elle n'eſt pas diviſible par $u = 0$, elle n'a donc point de racines égales à zéro ; s'il ne lui manque le prémier terme a. Elle n'eſt diviſible qu'une fois par $u = 0$, elle n'a qu'une racine zéro ; ſi, le terme a manquant, elle conſerve le terme $(bs + cr)u$. Elle eſt diviſible par $uu = 0$, c'eſt-à-dire, deux fois par $u = 0$, & par conſéquent elle a deux racines zéro ; ſi les deux prémiers termes lui manquent. Elle a trois racines zéro, elle eſt diviſible par $u^3 = 0$; s'il lui manque ſes trois prémiers termes a, $(bs + cr)u$, $(dss + esr + frr)u^2$, &c.

Mais ces termes ſont juſtement les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe placée ſur le Triangle analytique, où l'on a changé x en r, & y en s. Donc, autant qu'il

CH. X. §. 170. qu'il manque de Rangs, y compris la Pointe, dans l'équation d'une Courbe, placée sur le Tr. anal : autant de fois une Droite quelconque tirée par l'Origine est-elle censée y rencontrer la Courbe. Ou, ce qui revient au même, le Rang le plus bas de l'équation exprime, par son dégré, quelle est la multiplicité du Point sur lequel est prise l'Origine. Ainsi la seule inspection de l'équation mise sur le Triangle anal : fait connoitre si la Courbe passe par l'Origine, si elle y a un Point multiple, & quel est le dégré de sa multiplicité *. PL. XVII.

Exemple I, d'un Point simple. Le Point P, la Droite AB, & la perpendiculaire PA abaissée de P sur AB, étant donnés de position ; on décrit par points la Courbe PAM de cette maniére. On méne du Point P une Droite quelconque PM, qui coupe en B la Droite donnée AB, & on prend sur cette Droite les parties BM, Bm, égales à AB comprise entre la perpendiculaire PA & l'oblique PB. Les Points M, m sont à une Courbe, dont on demande l'équation. Fig. 124.

Qu'on prenne P pour l'Origine, & PA pour l'Axe des ordonnées, sur lequel abaissant, d'un point quelconque M de la Courbe, la perpendiculaire MQ, elle sera l'abscisse x, PQ étant l'ordonnée y ; & soit $PA = a$. Les Triangles semblables PQM, PAB donnent cette proportion $PQ[y] : QM[x] = PA[a] : AB$. Donc AB, & BM, qui lui est égale, est $\frac{ax}{y}$. Ainsi PB^2 égal, à cause du triangle rectangle PAB, à $PA^2[aa] + AB^2[\frac{aaxx}{yy}]$, est $\frac{aa}{yy}(yy + xx)$. Les mêmes triangles semblables PAB, PQM

* *Usage de l'Anal.* pag. 91.

Digitized by Google

PL. XVII. PQM donnent la propoſition $PA^2 : AQ^2 = PB^2 : BM^2$, qui s'exprime analytiquement ainſi, $aa : yy - 2ay + aa = \frac{aa}{yy}(yy + xx) : \frac{aaxx}{yy}$, ou [diviſant les termes de la 2e. raiſon par $\frac{aa}{yy}$], $aa : yy - 2ay + aa = yy + xx : xx$, c'eſt-à-dire, en égalant le produit des extrémes à celui des moyens, $aaxx = y^4 - 2ay^3 + aayy + xxyy - 2axxy + aaxx$, ou [ôtant de part & d'autre $aaxx$ & diviſant le reſte par y] $y^3 - 2ayy + aay + xxy - 2axx = 0$. Ch. X. §. 170.

Si l'on place cette équation ſur le Tr: anal: on verra que la Pointe reſte vuide ; mais que, dans le prémier Rang, la Caſe y eſt remplie. Donc le Point P eſt un des points de la Courbe, mais un Point ſimple.

* o * o
* o *
* o
o

Exemple II, d'un Point double. Si, dans la même Courbe, on prend le point A pour l'Origine, & AB pour l'Axe des abſciſſes, ſur lequel la perpendiculaire MN, abaiſſée d'un point quelconque M de la Courbe, ſera l'ordonnée y, AN l'abſciſſe x, & $AP = a$; on aura, à cauſe des triangles ſemblables, qui donnent $PQ[a+y] : QM$ ou $AN[x] = PA[a] : AB$, on aura, dis-je, $AB = \frac{ax}{a+y}$, & menant AM, hypothenuſe du triang: rectang: AMN, [Eucl. I. 47] $AN^2 + NM^2 = AM^2 = AB^2 + BM^2 + 2AB \times BN$ [Eucl. II. 12] = [puiſque, par la conſtruction, AB eſt égal à BM] $2AB^2 + 2AB \times BN = 2AB \times (AB + BN) = 2AB \times AN$. Mettant dans cette éq: $AN^2 + NM^2 = 2AB \times AN$, au lieu de ces Lignes leurs valeurs analy-

CH. X. §. 170. PL. XVII.

analytiques, on aura $xx + yy = 2\frac{ax}{a+y}x$, ou [multipliant de part & d'autre par $a + y$], $axx + ayy + xxy + y^3 = 2axx$, ſoit $y^3 + xxy + ayy - axx = 0$.

Dans cette équation, miſe ſur le Tr: anal: on voit que la Pointe & le prémier Rang manquent, de ſorte que le ſecond Rang eſt le plus bas. Donc l'Origine A eſt un Point double. Et en effet, les deux Branches P A M, P m A ſe croiſent en A.

* o * o
* o *
o o
o

Exemple III, d'un Point triple. La Courbe AMmA*m*MA ſe conſtruit ainſi. Du Centre C, pris ſur l'Axe AB des ordonnées, on décrit par l'Origine A un demi-Cercle BQqA. La Tangente AP étant priſe pour l'Axe des abſciſſes, à chaque abſciſſe AP on donne les ordonnées perpendiculaires PM, P*M*, moyennes proportionelles entre AP & PQ prémiére ordonnée du Cercle, & auſſi Pm, P*m*, moyennes proportionelles entre AP & Pq ſeconde ordonnée du Cercle. Fig. 137.

Cette Courbe eſt compoſée de deux feuilles AMmA, & A*M*m*m*A, réunies à l'Origine par un Point triple, qui eſt le concours des trois Branches MA*M*, MmA, *Mm*A. Auſſi verra-t-on que dans l'équation de cette Courbe le plus bas Rang eſt le troiſiéme. Car, ſi l'on nomme CA $= r$, AP $= x$, PM, ou Pm $= y$; on aura, par la nature du Cercle, PQ $= \frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$. & Pq $= \frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$. Donc PM, ou Pm, [y], moyenne proportionelle entre AP [x] & PQ, ou Pq, [$\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$] eſt égale à $\sqrt{(\frac{1}{2}rx \pm x\sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)})}$:

PL. XVII. & , en quarrant , $yy = \frac{1}{2}rx \pm x\sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$, ou $yy - \frac{1}{2}rx = \pm x\sqrt{(\frac{1}{4}rr - xx)}$, & quarrant encore , $y^4 - rxyy + \frac{1}{4}rrxx = \frac{1}{4}rrxx - x^4$, ou $y^4 - rxyy + x^4 = 0$. C'eſt-là l'équation de la Courbe , dont le plus bas Rang , qui conſiſte dans le ſeul terme $rxyy$, eſt le troiſiéme Rang. CH. X §. 179.

Fig. 126. *Exemple IV, d'un Point quadruple.* Le Cercle BNRQO étant décrit avec un raïon AB $= a$, on déterminera tous les points de la Courbe AMNAOAQARA , en menant un raïon quelconque AC , & prenant ſur ce raïon la partie AM égale au Sinus DE de l'arc BD double de l'arc BC compris entre le raïon AC & le raïon AB donné de poſition *.

Pour en avoir l'équation , qu'on abaiſſe l'ordonnée perpendiculaire MP [y], qui détermine l'abſciſſe AP [x], & AM ſera $= \sqrt{(xx + yy)}$. Les triangles AMP , AFB , ſemblables à cauſe de l'angle commun A & des angles droits P , F , donnent AM [$\sqrt{(xx+yy)}$] : MP [y] = AB [a] : BF = $\frac{ay}{\sqrt{(xx+yy)}}$, & AM [$\sqrt{(xx+yy)}$] : AP [x] = AB [a] : AF = $\frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)}}$. Et les triangles ABF , BDE , ſemblables à cauſe de l'angle commun B & des angles droits F , E , donnent AB [a] : AF [$\frac{ax}{\sqrt{(xx+yy)}}$] = BD , ou 2BF , [$\frac{2ay}{\sqrt{(xx+yy)}}$] : DE égal , par conſtruction , à AM [$\sqrt{(xx+yy)}$]. Donc , égalant le produit des moyens à celui des extrémes , $a\sqrt{(xx+yy)} = \frac{2aaxy}{xx+yy}$, ou $(xx+yy)\sqrt{(xx+yy)} = 2axy$, & en quarrant , $x^6 + 3x^4y^2 + 3x^2y^4 + y^6 = 4aax^2y^2$.

* GUIDO GRANDI , *Flores Geometrici , &c.* Florent. 1728.

Digitized by Google

CH. X. § 170. $4aax^3y^2$. Dans cette équation, il n'y a que deux Rangs; le ſixiéme qui a quatre termes, & le quatriéme, qui n'en a qu'un ſeul $4aaxxyy$. Auſſi voit-on que les quatre feuilles, qui compoſent cette Courbe, ſe réuniſſent à l'Origine, & y forment un Point quadruple par le concours de quatre Branches. PL. XVII.

171. DEMANDE-T-ON d'un Point ſitué hors de l'Origine, s'il eſt ſimple ou multiple, & quel eſt le dégré de ſa multiplicité? On pourra le reconnoitre en tranſportant l'Origine ſur ce Point-là; cela ſe fait [§. 25, n°. 4] en menant par ce Point une abſciſſe & une ordonnée, qu'on nommera m & n, & ſubſtituant, dans l'équation de la Courbe, $m+z$ à x & $n+u$ à y. On jugera de la nature du Point en queſtion par le nombre des Rangs qui manquent à cette transformée [§. *préc.*].

Mais on s'épargnera beaucoup de Calcul, en ſuivant la voye abrégée qui a été indiquée au §. 29; parce qu'on pourra ne pouſſer le Calcul que juſqu'où il eſt néceſſaire de le faire pour s'aſſurer de ce qu'on cherche.

Car ſi l'on fait attention aux opérations preſcrites dans ce §. 29, on verra que x & y reſtant dans la transformée au lieu de m & n; ces lettres x & y ne déſignent plus des variables, mais des grandeurs données & déterminées, qui ſont l'abſciſſe & l'ordonnée du Point dont on cherche la nature; de ſorte qu'on ſubſtituë proprement $x+z$ à x & $y+u$ à y.

La prémiére Ligne, qui eſt l'équation même de la Courbe, ne renfermant aucune des deux variables z & u, qui déſignent maintenant les coordonnées, elle eſt donc le terme qui occuperoit la Caſe de la Pointe. Ainſi on ſubſtituera d'abord dans ce terme, au lieu de x & y, leurs valeurs données m & n; & ſi cette ſuppoſition ne réduit pas ce terme à zéro, la Pointe n'eſt pas vuide dans la trans-

PL. XVII. transformée : elle a, par conſéquent, un terme conſtant. Donc [§. 14] la Courbe ne paſſe pas par l'Origine à laquelle cette transformée eſt rélative ; le Point aſſigné n'eſt pas même un Point de la Courbe, & on ne peut pas demander s'il eſt ſimple ou multiple. CH. X. § 171.

Mais ſi, par cette ſubſtitution, l'équation de la Courbe, qui fait la prémiére Ligne de la transformée, eſt réduite à zéro ; le Point en queſtion apartient à la Courbe ; & pour ſavoir s'il eſt ſimple ou multiple, on fera le calcul de la ſeconde Ligne. Elle a une partie de ſes termes multipliés par u, & l'autre par z. Elle conſtituë donc le prémier Rang de la transformée, qui contient la Caſe u & la Caſe z. On ſubſtituera dans les coëfficients de u & de z, au lieu de x & y, leurs valeurs m & n. Si, après cette ſubſtitution, l'un ou l'autre de ces deux coëfficients ſubſiſte ; c'eſt une preuve que le prémier Rang de la transformée ne manque pas. Le Point de l'Origine de cette transmée eſt donc un Point ſimple [§. *préc.*], & il n'eſt pas néceſſaire de pouſſer le Calcul plus loin.

Que ſi la ſubſtitution fait évanouir les deux coëfficients de u & de z, le prémier Rang manque dans la transformée. Le Point, qui en eſt l'Origine, eſt donc multiple. Pour connoitre le dégré de ſa multiplicité, on procédera au calcul de la troiſiéme Ligne. Elle renferme les trois termes uu, uz, zz, qui rempliſſent les trois Caſes du ſecond Rang. On ſubſtituera donc, dans les coëfficients de ces trois termes, m & n à x & y : & ſi quelcun de ces coëfficients ſubſiſte, le ſecond Rang de la transformée n'eſt pas nul. Donc le Point en queſtion eſt un Point double & l'opération eſt terminée.

Mais ſi ces trois coëfficients ſont zéro, le Point eſt plus que double. On calculera donc la quatriéme ligne, qui, renfermant les termes u^3, u^2z, uzz & z^3, fait le troiſiéme Rang de la transformée, ſi par la ſubſtitution de

Digitized by Google

CH. X. §. 171. de m & n à x & y, ce Rang ne s'évanouït pas. Alors le Point dont on cherche la nature eſt un Point triple, & on peut s'arrêter là. PL. XVII.

Si par la ſubſtitution cette Ligne eſt réduite à zéro, le Point en queſtion eſt plus que triple ; & on continuera à procéder de la même maniére juſqu'à-ce qu'on ſoit venu à une Ligne ou un Rang, qui ne diſparoiſſe pas par la ſubſtitution de m, n à x, y. Le nombre, qui marque le quantiéme eſt ce Rang, marque auſſi le dégré de multiplicité du Point propoſé.

Exemple 1. Dans la Courbe * repréſentée par l'éq: $y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x = 0$, on demande la nature du Point, dont l'abſciſſe m & l'ordonnée n ſont l'une & l'autre égales à 2.

On poſera en prémiére Ligne l'équation même

$$y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x;$$

& ſubſtituant 2 pour x, & 2 pour y, on aura

$$16 - 64 - 96 + 64 + 192 + 16 - 128,$$

ce qui étant $= 0$, on conclura que le Point indiqué eſt un des Points de la Courbe.

Pour ſavoir s'il eſt ſimple ou multiple, on calculera le ſecond Rang. En voici l'opération [§. 29]

$$y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x$$

4:0 3:0 2:1 2:0 1:1 0:2 0:1

$$(4y^3 - 24y^2 - 24xy + 32y + 48x)\,n + (-12yy + 48y + 8x - 64)z$$

Subſtituant dans ce ſecond Rang 2 pour x & pour y, on aura

$$(32 - 96 - 96 + 64 + 96)\,u + (-48 + 96 + 16 - 64)z$$

c'eſt-à-dire $(0)\,n + (0)\,z$.

* SAURIN, *Mem. de l'Acad.* 1716. pag. 61.

Digitized by Google

PL. XVII. Puiſque ce ſecond Rang eſt zéro, le Point propoſé n'eſt pas ſimple, mais multiple. CH. X. §. 171.

Pour ſavoir s'il eſt double ou d'une multiplicité ſupérieure, on calculera le troiſiéme Rang, en continuant l'opération qui a été commencée.

$$(4y^3-24y^2-24xy+32y+48x)u+(-12yy+48y+8x-64)z$$
$$\tfrac{3}{2}:0\quad \tfrac{3}{2}:0\quad \tfrac{1}{2}:\tfrac{1}{2}\quad \tfrac{1}{2}:0\quad 0:\tfrac{1}{2}\qquad \tfrac{3}{2}:0\quad \tfrac{1}{2}:0\quad 0:\tfrac{1}{2}\quad 0:0$$
$$(6yy-24y-12x+16)uu+\begin{pmatrix}-12y+24\\-12y+24\end{pmatrix}uz+(4)zz$$

Il eſt inutile d'examiner ſi la ſubſtitution de 2 à x & y fera diſparoitre ce ſecond Rang, parce qu'on voit d'abord qu'elle ne peut anéantir le terme (4) zz, où il n'y a ni x, ni y.

Ainſi le Point cherché n'eſt qu'un Point double: &, ſi l'on n'a point d'autres vuës, il n'eſt pas néceſſaire de pouſſer le Calcul plus loin.

Mais ſi, par curioſité ou pour mieux connoitre cette Courbe, on achéve la transformation, le troiſiéme & quatriéme Rang ſeront

$$(4y-8)u^3+(-12)uuz+(0)uzz+(0)z^3$$
$$+(1)u^4+(0)u^3z+(0)u^2z^2+(0)uz^3+(0)z^4$$

qui par la ſubſtitution de 2 à y ſe réduiſent à $-12uuz+u^4$. Ainſi toute la transformée eſt $u^4-12uuz-32uu+4zz=0$.

Cette équation a quatre racines

$u=+\sqrt{(6z+16+4\sqrt{(2zz+12z+6)})}$, ou $+\sqrt{(4z+8)}+\sqrt{(2z+8)}$

$u=-\sqrt{(6z+16+4\sqrt{(2zz+12z+6)})}$, ou $-\sqrt{(4z+8)}-\sqrt{(2z+8)}$

$u=+\sqrt{(6z+16-4\sqrt{(2zz+12z+6)})}$, ou $+\sqrt{(4z+8)}-\sqrt{(2z+8)}$

$u=-\sqrt{(6z+16-4\sqrt{(2zz+12z+6)})}$, ou $-\sqrt{(4z+8)}+\sqrt{(2z+8)}$

chacune

CH. X. §. 171. chacune deſquelles indique une Branche parabolique. La racine $u = +\sqrt{(4z+8)}+\sqrt{(2z+8)}$ indique la Branche fD. La racine $u = -\sqrt{(4z+8)}-\sqrt{(2z+8)}$ marque la Branche Fd. La Branche FAE eſt repréſentée par la racine $u = +\sqrt{(4z+8)}-\sqrt{(2z+8)}$; & la Branche fAe par la racine $u = -\sqrt{(4z+8)}+\sqrt{(2z+8)}$. Ces deux derniéres paſſent par le Point A. Car $z = 0$ réduit les équations de ces deux Branches à $u = +\sqrt{8}-\sqrt{8} = 0$, & $u = -\sqrt{8}+\sqrt{8} = 0$. Elles ont pour Aſymptote courbe la Parabole EAe déſignée par l'éq: $uu = (6-4\sqrt{2})z$; & la Parabole DAd exprimée par l'éq: $uu = (6+4\sqrt{2})z$ eſt l'Aſymptote courbe des Branches fD, FD: comme on le trouve aiſément par le §. 142. L'équation propoſée $y^4 - 8y^3 - 12xyy + 16yy + 48xy + 4xx - 64x = 0$ repréſente la même Courbe, mais rélativement au point F, & alors le Point double A a ſon abſciſſe FG & ſon ordonnée GA égales l'une & l'autre à 2. PL. XVII. Fig. 117.

Exemple II. On propoſe la Courbe dont l'équation eſt $y^4 + x^4 - 4ay^3 + 2ayyx + 2ax^3 + 8aayy - 4aayx - 8a^3y + 2a^4 = 0$. Et d'abord on demande quelle eſt la nature du Point dont l'abſciſſe m eſt 0, & l'ordonnée n eſt a.

Pour le connoitre, on ſubſtituë 0 à x & a à y dans l'équation propoſée; ce qui la réduit à $a^4 * - 4a^4 * * + 8a^4 * - 8a^4 + 2a^4 = -a^4$. Donc dans la transformée qui repréſenteroit la Courbe rélativement à l'Origine priſe ſur le Point aſſigné, il y auroit un terme conſtant. Elle ne paſſe donc pas par ce Point-là [§. 14].

2°. On demande enſuite quel eſt le Point dont l'abſciſſe & l'ordonnée ſont chacune égale à a.

La ſubſtitution de a pour x & pour y réduiſant l'équation propoſée à $[a^4 + a^4 - 4a^4 + 2a^4 + 2a^4 + 8a^4 - 4a^4$

Pl. XVII. $-4a^4-8a^4+2a^4=]\ 0$, on eſt aſſuré que le Point propoſé eſt un de ceux de la Courbe. Ch. X. §. 172.

Mais eſt-il ſimple ou multiple? Pour répondre à cette queſtion, on cherchera le prémier Rang de la transformée qui réſulte en ſubſtituant $a+z$ à x & $a+u$ à y. Le ſecond Rang que donne la ſubſtitution de $x+z$ à x, & de $y+u$ à y eſt $(4y^3-12ay^2+4ayx+16a^2y-4a^2x-8a^3)u+(4x^3+2ay^2+6ax^2-4a^2y)z$, qui, ſubſtituant a pour x & pour y, ſe réduit à $(4a^3-12a^3+4a^3+16a^3-4a^3-8a^3)u+(4a^3+2a^3+6a^3-4a^3)z$, ou $(0)u+(2a^3)z$. Le prémier Rang ne s'évanouiſſant donc pas entiérement, on conclura que le Point, dont l'abſciſſe & l'ordonnée ſont a, eſt bien un Point de la Courbe, mais un Point ſimple.

3°. On demande la nature du Point dont l'abſciſſe eſt $-a$ & l'ordonnée a.

Ces valeurs ſubſtituées dans l'équation propoſée la réduiſent à $a^4+a^4-4a^4-2a^4-2a^4+8a^4+4a^4-8a^4+2a^4$, c'eſt-à-dire, à zéro. Donc ce Point eſt un de ceux de la Courbe.

Ces mêmes valeurs ſubſtituées dans le prémier Rang de la transformée le changent en $(4a^3-12a^3-4a^3+16a^3+4a^3-8a^3)u+(-4a^3+2a^3+6a^3-4a^3)z$, ou $(0)u+(0)z$. Ce Rang s'évanouiſſant fait voir que le Point, dont l'abſciſſe eſt $-a$ & l'ordonnée a, eſt un Point multiple.

On cherchera le dégré de ſa multiplicité en calculant le ſecond Rang. On trouve $(6yy-12ay+2ax+8a^2)uu+(4ay-4aa)uz+(6xx+6ax)zz$, ou, mettant toûjours $-a$ pour x & $+a$ pour y, $(6aa-12aa-2aa+8aa)uu+(4aa-4aa)uz+(6aa-6aa)zz$, c'eſt-à-dire, $(0)uu+(0)uz+(0)zz$.

Le Point propoſé eſt donc plus que double, & on cherchera le

Ch. X. §. 171. le troiſiéme Rang. C'eſt $(4y - 4a)u^3 + (2a)uuz$ PL. XVII. $+ (0)uzz + (4x + 2a)z^3$: dont aucune ſubſtitution ne peut faire diſparoitre le terme uuz, qui a pour coëfficient $2a$. Le troiſiéme Rang ne s'évanouït donc pas dans la transformée ; mais étant le plus bas Rang, il fait voir que le Point, ſur lequel on a porté l'Origine, eſt un Point triple.

On peut s'aſſurer de ceci en continuant le Calcul de la transformation. Le voici en entier

$$y^4 + x^4 - 4ay^3 + 2ay^2x + 2ax^3 + 8a^2y^2 - 4a^2yx - 8a^3y + 2a^4$$
$$4:0,\ 0:4,\quad 3:0,\quad 2:1,\quad 0:3,\quad 2:0,\quad 1:1,\quad 1:0,\ 0:0$$

$$+(4y^3 - 12ay^2 + 4ayx + 16a^2y - 4a^2x - 8a^3)u + (4x^3 + 2ay^2 + 6ax^2 - 4a^2y)z$$
$$\tfrac{3}{2}:0,\ \tfrac{3}{2}:0,\ \tfrac{1}{2}:\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2}:0\quad 0:\tfrac{1}{2},\ 0:0\qquad 0:\tfrac{3}{2},\ \tfrac{2}{2}:0,\ 0:\tfrac{2}{2},\ \tfrac{1}{2}:0$$

$$+(6yy - 12ay + 2ax + 8aa)uu + \begin{pmatrix} 2ay - 2aa \\ 2ay - 2aa \end{pmatrix} uz + (6xx + 6ax)zz$$
$$\tfrac{2}{3}:0,\ \tfrac{1}{3}:0,\ 0:\tfrac{1}{3},\ 0:0,\qquad \tfrac{1}{3}:0,\ 0:0\qquad 0:\tfrac{2}{3},\ 0:\tfrac{1}{3}$$

$$+(4y - 4a)u^3 + \begin{pmatrix} \frac{2}{3}a \\ \frac{4}{3}a \end{pmatrix} uuz + (0)uzz + (4x + 2a)z^3$$
$$\tfrac{1}{4}:0,\ 0:0,\qquad 0:0\qquad 0:\tfrac{1}{4},\ 0:0$$

$$(1)u^4 + (0)u^3z + (0)u^2z^2 + (0)uz^3 + (1)z^4$$

La ſubſtitution de $-a$ à x & de a à y, qui ne laiſſe, comme on a vû, ſubſiſter que les deux derniers Rangs, les réduit à $2auuz - 2az^3 + u^4 + z^4 = 0$, qui eſt l'équation de la Courbe rélative à l'Origine placée ſur le Point triple.

Cette équation, réſoluë comme une équation du ſecond dégré, manifeſte quatre racines $u = \pm\sqrt{(-ax \pm z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$, & donne cette Conſtruction. Du point C, avec un raïon $CA = a\sqrt{2}$, on décrira un Cercle : on ménera deux diamétres parallèles aux coordonnées ſuppoſées perpendiculaires l'une à l'autre, & on Fig. 128.

PL. XVII. prendra pour Origine le point A déterminé par le raïon CA, qui coupe en deux également les angles des coordonnées de différents ſignes. A chaque abſciſſe comme AP, on donnera des ordonnées PM, PM, moyennes proportionelles entre l'abſciſſe AP & l'ordonnée du Cercle PN. Puiſque AC $= a\sqrt{2}$, on aura AB $=$ BC $= a$. Nommant donc AP, z, & PM, u, on aura CO $=$ BP $=$ AP $-$ AB $=$ z $- a$, & ON $=\sqrt{(CN^2 - CO^2)} = \sqrt{(2aa - aa + 2az - zz)} = \sqrt{(aa + 2az - zz)}$, & PN $=$ ON $-$ PO $= -a + \sqrt{(aa + 2az - zz)}$. Donc PM [$u$], moyenne proportionelle entre AP [z] & PN [$-a + \sqrt{(aa + 2az - zz)}$], eſt égale à $\sqrt{(-az + z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$. CH. X. §. 171.

Du côté des abſciſſes poſitives, cette Courbe n'a que deux Branches AMD, AMD; parce que la moyenne proportionelle entre l'abſciſſe AP poſitive & l'ordonnée PN négative, eſt imaginaire. Et on le voit clairement dans l'équation : car les racines $\pm\sqrt{(-az - z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$ ne peuvent être qu'imaginaires ; ce qui eſt ſous le ſigne radical étant négatif, quand z eſt poſitive. Mais du côté des abſciſſes négatives, la Courbe a quatre Branches Ame, Ame, Ame, Ame; parce que, z étant négative, les racines $\pm\sqrt{(-az \pm z\sqrt{(aa + 2az - zz)})}$ qui deviennent $\pm\sqrt{(az \mp z\sqrt{(aa - 2az - zz)})}$, ſont toutes quatre réelles, tant que z $< a\sqrt{2} - a$ [$=$ BE $-$ BA $=$ AE].

Ainſi la Courbe repréſentée par l'éq : $u^4 + 2auuz + z^4 - 2az^3 = 0$ eſt une eſpèce de Trefle, qui a un Point triple en A. L'éq : $y^4 + x^4 - 4ay^3 + 2ayyx + 2ax^3 + 8aayy - 4aayx - 8a^3y + 2a^4 = 0$ repréſente la même Courbe, en prenant l'Origine ſur le centre C du Cercle générateur. Auſſi a-t-on trouvé que le Point A, qui a l'ordonnée CB $= a$, & l'abſciſſe BA $= -a$, eſt un Point triple : que le point D, qui a l'ordonnée CB $= a$, &

CH. X. §. 171. & l'abſciſſe BD = a, eſt un Point ſimple : & que le point B, qui a l'ordonnée CB = a, & l'abſciſſe = 0, n'eſt pas même un Point de la Courbe. PL. XVII.

172. Si le Point propoſé ſe trouve ſur l'Axe des abſciſſes ou des ordonnées, ailleurs qu'à l'Origine ; le calcul ſera plus abrégé, puiſqu'il s'agit ſeulement de ſubſtituer $m+z$ à x, ou $n+u$ à y, pour porter l'Origine ſur le Point aſſigné [§. 25] : ce qui ſe fait commodément par la voye indiquée au §. 28. Car ſi on ordonne l'équation par x, lorſqu'il faut ſubſtituer à y ; ou par y, lorſqu'il faut ſubſtituer à x ; les termes & les Rangs de la transformée ſe trouveront ſi bien rangés qu'il ſera facile de pouſſer le calcul ſeulement juſqu'au point qui eſt néceſſaire.

Exemple. On propoſe l'éq : $y^4 - 2x^2y^2 + x^4 + 6axy^2 - 7ax^3 - 4aayy + 18aaxx - 20a^3x + 8a^4 = 0$, & l'on demande la nature du Point qui eſt ſitué ſur l'Axe des abſciſſes à la diſtance $2a$ de l'Origine, c'eſt-à-dire, du Point dont l'abſciſſe eſt $2a$, & l'ordonnée 0.

Il s'agit, pour porter l'Origine ſur le Point propoſé de ſubſtituer $2a+z$ à x ; on ordonnera donc l'équation par y,

$$y^4+(-2x^2+6ax-4aa)yy+(x^4-7ax^3+18aaxx-20a^3x+8a^4)$$

Le dernier terme eſt celui qui, dans la transformée, occupera la Pointe. Il faut donc voir ce qu'il devient quand x devient $2a$. Comme il ſe réduit à $16a^4 - 56a^4 + 72a^4 - 40a^4 + 8a^4$, c'eſt-à-dire à 0 ; on voit déjà que le Point aſſigné eſt un des Points de la Courbe.

Enſuite puiſque le terme y manque dans la propoſée, il manquera auſſi dans la transformée. Il ſuffit donc, pour ſavoir ſi le prémier Rang ſubſiſte ou s'évanouit, de chercher le terme z. En voici le calcul

$y^4 +$ ..

Pl. XVII. $y^4+(-2x^2+6ax-4aa)yy+(x^4-7ax^3+18a^2x^2-20a^3x+8a^4)$ Ch. X. §. 172.
4 3 2 1 0

$+(4x^3-21ax^2+36a^2x-20a^3)z$

La ſubſtitution de $2a$ à x dans le coëfficient de z le réduit à $32a^3-84a^3+72a^3-20a^3$, ou 0. Donc le prémier Rang manque entiérement dans la transformée. Ainſi le Point propoſé eſt un Point multiple.

On cherchera le ſecond Rang, qui a les trois termes yy, yz, zz. Le coëfficient de yy eſt $-2x^2+6ax-4aa$, que la ſubſtitution de $2a$ à x rend $-8a^4+12a^4-4a^4=0$. Le coëfficient de yz eſt auſſi 0, puiſque le terme y, dont le coëfficient devroit produire celui de yz, manque dans la propoſée. Il ſuffit donc de chercher le coëfficient de zz en continuant le calcul commencé.

$+(4x^3-21ax^2+36a^2x-20a^3)z$
$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$ 0

$+(6xx-21ax+18aa)zz$

$2a$ écrit au lieu de x dans ce coëfficient $6xx-21ax+18aa$ le réduit à $24aa-42aa+18aa$, ou 0. Ainſi le ſecond Rang diſparoit, & par conſéquent le Point aſſigné eſt plus que double.

S'il eſt plus que triple, les coëfficients des termes y^3, yyz, yzz, z^3, du troiſiéme Rang ſeront tous zéro. Celui de y^3 eſt 0, puiſque ce terme manque dans la propoſée. Mais celui de y^2z, qui eſt $-4x+6a$, en écrivant $2a$ pour x, ſe réduit à $-2a$. Donc le troiſiéme Rang ſubſiſte, & ſans aller plus loin, on peut affirmer que le Point propoſé eſt un Point triple.

Mais ſi, par curioſité, on achéve la transformation,

y^4+

Ch. X. §. 172. Pl. XVII.

$$y^4 + (-2x^2 + 6ax - 4aa)yy + (x^4 - 7ax^3 + 18a^2x^2 - 20a^3x + 8a^4)$$
$$2 \quad 1 \quad 0 \qquad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$$

$$+ (-4x + 6a)yyz + (4x^3 - 21ax^2 + 36a^2x - 20a^3)z$$
$$\tfrac{1}{1} \quad 0 \qquad \tfrac{1}{2} \quad \tfrac{2}{2} \quad \tfrac{1}{2} \quad 0$$

$$-2yyzz + (6xx - 21ax + 18aa)zz$$
$$0 \qquad \tfrac{1}{3} \quad \tfrac{1}{3} \quad 0$$

$$+ (4x - 7a)z^3$$
$$\tfrac{1}{4} \quad 0$$

$$+ z^4$$

on trouvera que l'équation de la Courbe, l'Origine étant portée sur le Point triple, est $y^4 - 2ayyz - 2y^2z^2 + az^3 + z^4 = 0$. Cette équation a quatre racines $y = \pm\sqrt{(az + zz \pm z\sqrt{(aa + az)})}$ qu'on peut construire ainsi. Avec un Paramétre $= a$, on décrira la Parabole NB*N*, dont BA soit la derniére direction : & prenant l'abscisse BA égale au Paramétre, on aura les ordonnées Ac, AC aussi égales au Paramétre. On ménera la Droite BC qui achéve le triangle isoscèle BAC, & prenant le point A pour l'Origine, on donnera à chaque abscisse AP [z] des ordonnées PM, P*M* [y] & PM, P*M* [$-y$] égales aux moyennes proportionelles entre l'abscisse AP & les parties QN, Q*N*, compriſes entre la Droite BCQ, & la Parabole NB*N*. Fig. 129.

Car, puisque AP $= z$, BP [$=$ AB $+$ AP] $= a + z$, &, par la nature de la Parabole, PN $= \sqrt{(aa + az)}$. De plus PQ [$=$ BP] $= a + z$. Donc QN $= a + z + \sqrt{(aa + az)}$, & Q*N* $= a + z - \sqrt{(aa + az)}$. Ainsi PM, ou P*M* [y], moyenne proportionelle entre AP & QN, ou Q*N*, est $= \pm\sqrt{(az + zz \pm z\sqrt{(aa + az)})}$.

Il paroit, par cette construction, que la Courbe, du

PL. XVII. côté des abſciſſes négatives, n'a que deux Branches AmB, AmB, qui ſont une Feuille, & dont les ordonnées p m, p m ſont moyennes proportionelles entre l'abſciſſe négative A p, & la partie q n interceptée négative entre la Droite BC & la Parabole B n C. Ces Branches ſont repréſentées par les racines $\pm\sqrt{(az+zz-z\sqrt{(aa+zz)})}$, ou, z étant négative, $\pm\sqrt{(-az+zz+z\sqrt{(aa+zz)})}$. Les deux autres Branches, que repréſenteroient les racines $\pm\sqrt{(az+zz+z\sqrt{(aa+zz)})}$, ou, z étant négative, $\pm\sqrt{(-az+zz-z\sqrt{(aa+zz)})}$ ſont imaginaires; le Calcul démontrant aiſément que la grandeur ſous le ſigne radical eſt négative ou imaginaire: d'ailleurs la moyenne proportionelle entre une abſciſſe négative A p, & une interceptée poſitive q n, ne peut être qu'imaginaire. Mais, du côté des abſciſſes poſitives, la Courbe a quatre Branches, dont deux AM, AM ſont la continuation des deux Branches A m, A m, exprimées par les racines $\pm\sqrt{(az+zz-z\sqrt{(aa+az)})}$, & dont les ordonnées PM, PM ſont moyennes proportionelles entre AP & QN. Les deux autres Branches AM, AM ſont repréſentées par les racines $\pm\sqrt{(az+zz+z\sqrt{(aa+az)})}$, qui, du côté négatif, ſont imaginaires, & leurs ordonnées PM, PM ſont moyennes proportionelles entre AP & QN. Le Point A, où ſe coupent les trois Branches mAM, mAM, MAM eſt donc un Point triple, comme le Calcul l'a fait voir. CH. X. §. 172.

173. LES PRINCIPES établis dans les §§. précéd. donnent la Solution de ce Problême: L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver ſi cette Courbe a des Points multiples, quels ils ſont, & où ils ſont*?

Pour trouver les Points doubles, on procédera comme ſi on

* *Uſage de l'Anal.* pag. 238.

CH. X. §. 173. si on vouloit transformer l'équation en substituant [§. 171] PL. XVII. $x+z$ à x, & $y+u$ à y: mais on n'ira pas plus loin que la seconde Ligne, qui donne les termes u & z. On égalera leurs coëfficients à zéro, ce qui, avec l'équation proposée, fait trois équations.

Pour connoitre les Points triples, on joindra aux trois équations, qui donnent les Points doubles, celles qui naissent en égalant à zéro les coëfficients de uu, uz, & zz. Et pour cet effet, il faudra pousser le Calcul de la transformation jusqu'à la troisiéme Ligne.

On trouvera de même les Points quadruples, en formant, outre les six équations précédentes, les quatre que donnent les coëfficients de u^3, u^2z, uzz, z^3 égalés à zéro. Et ainsi de suite.

De sorte que comme on a 3, 6, 10, 15, ou &c. équations pour déterminer deux inconnuës x, y, le Problême est plus que déterminé; & sera souvent impossible: parce qu'il se peut fort bien que la Courbe proposée n'ait aucun Point multiple, ou du moins aucun Point de la multiplicité qu'on suppose.

L'Analyse fournit les Régles nécessaires pour déterminer ces inconnuës au moyen de tant d'équations, lorsque leurs valeurs sont réelles. Ce qu'il y a de plus simple, c'est de voir d'abord si la Courbe a quelques Points multiples. On les trouvera en combinant trois équations, sç. la proposée & les deux que donnent les coëfficients de u & de z égalés à zéro. S'il paroit par-là que la Courbe a des Points multiples, on cherchera le dégré de leur multiplicité par les Régles des §§. 170, ou 171.

Or pour combiner ensemble les trois équations indiquées, on cherchera la valeur d'x ou d'y par l'équation la plus commode des trois; on substituera cette valeur dans les deux autres; & on cherchera les racines communes à ces deux équations. Elles donneront les valeurs d'x

Pl. XVII. ou d'y qui répondent aux Points multiples. Mais si ces équations n'ont aucune racine commune, ou si elles mènent à quelque absurdité, le Problême est impossible, & la Courbe n'a aucun Point multiple. Ch. X. §. 173.

Exemple I. On demande si la Courbe représentée par l'éq : $xxy + xyy - a^3 = 0$ a quelques Points multiples ? Fig. 130.

On calculera le prémier Rang de la transformée qui nait de la substitution de $x + z$ à x, & de $y + u$ à y. Ce Rang est $(xx + 2xy)u + (2xy + yy)z$. On aura donc trois équations à remplir, 1°. la proposée, 2°. le coëfficient d'u égalé à zéro, 3°. le coëfficient de z égalé aussi à zéro.

1°. $xxy + xyy - a^3 = 0$. 2°. $xx + 2xy = 0$. 3°. $2xy + yy = 0$.

La 3e. donne $y = 0$, ou $y = -2x$. Zéro substitué pour y dans la 1e. donne $-a^3 = 0$: ce qui est absurde, puisque a est une grandeur donnée. Et $-2x$ substitué pour y dans la 2e, la réduit à $xx - 4xx = 0$, ou $-3xx = 0$, c'est-à-dire, $x = 0$, valeur qui substituée dans la 1e. donne aussi $-a^3 = 0$: ce qui est absurde. Il est donc impossible de trouver des valeurs d'y & d'x, qui satisfassent aux 3 équations à remplir. Ainsi la Courbe n'a aucun Point multiple.

Exemple II. On propose l'éq : $x^2y^2 - 2axy^2 + aayy + aaxy - a^3y + aaxx = 0$: & l'on demande si la Courbe qu'elle représente a quelques Points multiples.

Le prémier Rang de la transformée étant $(2x^2y - 4axy + 2aay + aax - a^3)u + (2xyy - 2ayy + aay + 2aax)z$, on a ces trois équations à remplir.

1°. $x^2y^2 - 2axyy + aayy + aaxy - a^3y + aaxx$
ou $(x - a)^2yy + (x - a)a^2y + a^2x^2 = 0$.

2°. $2x^2y$

CH. X. § 173. PL. XVII.

$2°.\ 2x^2y - 4axy + 2aay + aax - a^3$,
ou $(x-a)^2\,2y + (x-a)\,aa = 0$

$3°.\ 2xyy - 2ayy + aay + 2aax = 0$.

La ſeconde ſe peut diviſer par $x-a$, & le quotient eſt $2xy - 2ay + aa$. Elle a donc ces deux racines $x = a$, & $y = \frac{aa}{2(a-x)}$. En ſubſtituant a pour x dans la propoſée on la réduit à $a^4 = 0$, ce qui eſt abſurde : cette racine ne donne donc aucun Point multiple. De même, ſubſtituant $\frac{aa}{2(a-x)}$ pour y dans la propoſée, elle ſe réduit à $\frac{1}{4}a^4 - \frac{1}{2}a^4 + aaxx = 0$, ou $x = \frac{1}{2}a$. Donc y $[= \frac{aa}{2(a-x)}] = a$. Mais ces valeurs ſubſtituées dans la 3e. équation, donnent $a^3 - 2a^3 + a^3 + a^3 = 0$, ou $a^3 = 0$, ce qui eſt encore abſurde. Cette racine auſſi ne donne donc aucun Point multiple. Ainſi la Courbe n'en a aucun.

Et c'eſt ce que fait voir ſa conſtruction. Ayant décrit du centre C, avec un raïon $CA = \frac{1}{2}a$, un Cercle dont on méne la Tangente $AB = a$; on prendra ſur cette Tangente une abſciſſe $AP = x$, & on lui donnera l'ordonnée $PM\ [y]$, égale à la droite AQ retranchée de l'Axe des ordonnées par la droite BQ, qui, partant du Point fixe B, paſſe par le Point N où PM rencontre la circonférence du Cercle. Car les triangles ſemblables BAQ, BPN donnent $BA\ [a] : AQ$ ou $PM\ [y] = BP\ [a-x] : PN\ [\frac{1}{2}a - \sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)}$ par la nature du Cercle$]$. Donc $\frac{1}{2}aa - a\sqrt{(\frac{1}{4}aa - xx)} = ay - xy$; ce qui, tranſpoſant, quarrant, &c. revient à l'équation propoſée $x^2y^2 - 2axy^2 + aayy - aaxy + aaxx - a^3y = 0$. Fig. 131.

Pl. XVII. *Exemple III.* Il s'agit de la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4 + 4ay^3 + 2y^2x^2 + 4ayxx - 3a^2y + x^4 - 4a^2x^2 + 8a^3x - 8a^4 = 0$. On demande ſi elle a quelque Point multiple ? Ch. X. §. 173.

On commencera le Calcul de la transformation néceſſaire pour porter l'Origine ſur un point quelconque. Le prémier Rang ſera

$$(4y^3 + 12ay^2 + 4yxx + 4axx - 8a^3)u + (4yyx + 8ayx + 4x^3 - 8aax + 8a^3)z,$$

de ſorte que les trois équations qu'on a à remplir, ſont

1°. $y^4+4ay^3+2yyxx+4ayxx-8a^3y+x^4-4aaxx+8a^3x-8a^4=0$

2°. $4y^3+12ay^2+4yxx+4axx-8a^3=0$, ou prenant le quart, $y^3+3ayy+yxx+axx-2a^3=0$

3°. $4yyx+8ayx+4x^3-8aax+8a^3=0$, ou prenant auſſi le quart, $yyx+2ayx+x^3-2aax+2a^3=0$.

La 2e. de ces équations ſe diviſe par $y+a$, & donne au quotient $yy+2ay-2aa+xx$. Elle a donc ces deux racines $y=-a$, & $xx=2aa-2ay-yy$. Cette valeur d'xx, ſubſtituée dans la 3e. équation, la réduit à $yyx+2ayx+2aax-2ayx-yyx-2aax+2a^3=0$, ou $2a^3=0$, ce qui eſt abſurde. Ainſi cette racine ne donne aucun Point multiple. Il n'en eſt pas de même de la racine $y=-a$. Cette valeur ſubſtituée dans la 1e. & dans la 3e. équation, les réduit à $x^4-6aaxx+8a^3x-3a^4=0$, & $x^3-3aax+2a^3=0$. Pour avoir les racines communes à ces deux équations, on diviſera l'une par l'autre, & le reſte $-3aa(xx-2ax+aa)$, diviſant la ſeconde, ſera le diviſeur commun. Sa racine unique eſt $x-a=0$. On examinera donc, ſi les valeurs $x=a$, $y=-a$ ſatisfont aux trois équations qu'on a à remplir. Et comme elles ſatisfont, on eſt ſûr que la Courbe a un Point multiple, ſç. celui dont l'abſciſſe eſt a & l'ordonnée $-a$.

Ce

Digitized by Google

Fig. 125.

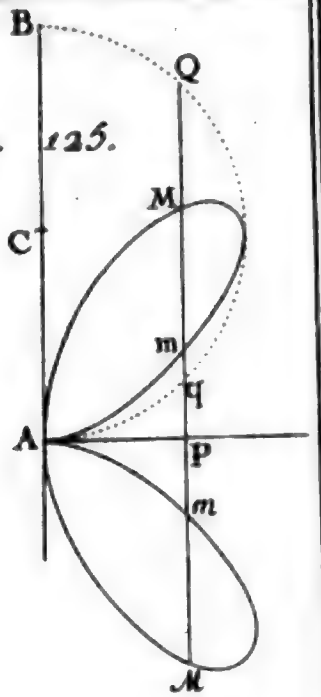


Fig. 126.

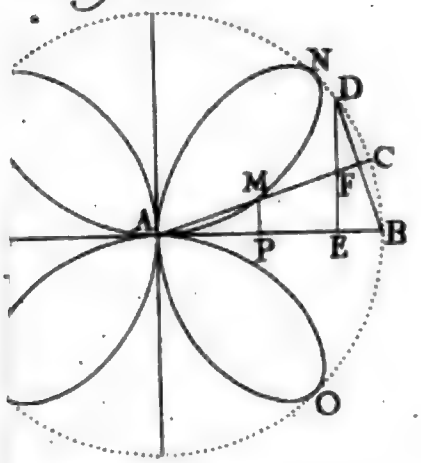


Fig. 128.

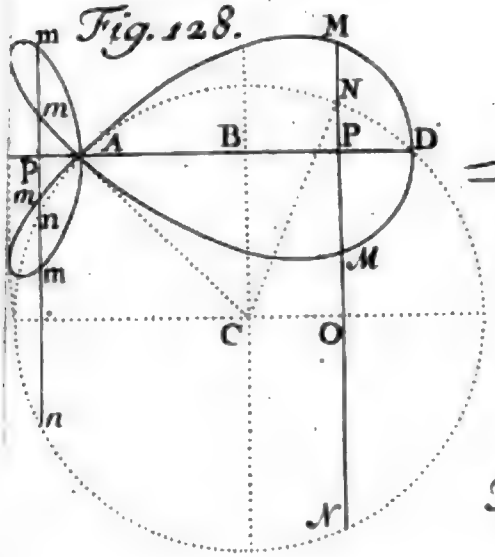


Fig. 130.

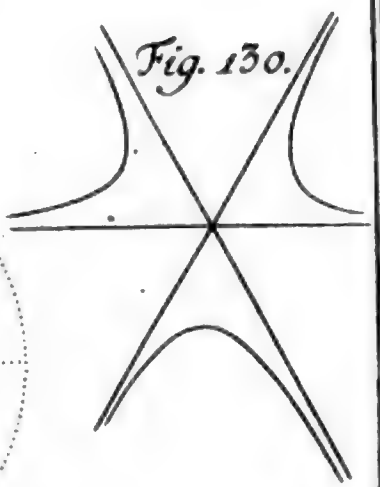
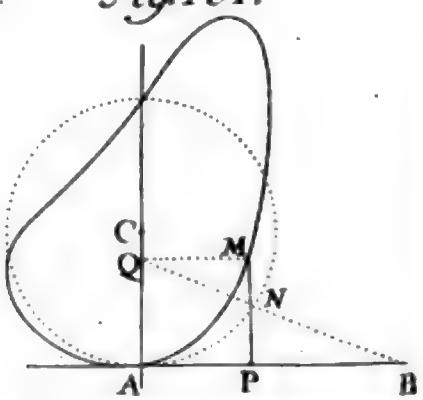


Fig. 131.



Digitized by Google

CH. X. Ce Point n'eſt que double. Car ſi on paſſe à calculer le ſecond Rang, on trouve d'abord $(6yy + 12ay + 2xx)uu$, ou, mettant $-a$ pour y & a pour x, $(-4aa)uu$: ce qui fait voir que le ſecond Rang ne diſparoit pas. PL. XVII. §. 173.

Mais ſi on achéve le Calcul, on trouvera pour l'équation de la Courbe, rélative à l'Origine portée ſur le Point double, $u^4 - 4aauu + 4auuz + 2uuzz + 4az^3 + z^4 = 0$.

Cette Courbe ſe peut décrire en faiſant rouler un Cercle autour d'un autre Cercle égal. Soit AEA un Cercle décrit du centre C, avec le raïon $CA = a$. Si l'on fait rouler autour de lui un Cercle égal MEM; chaque Point de ſa circonférence, comme M, décrira une Courbe AM*M*A. Soit A le point de la circonférence fixe ſur lequel étoit appliqué le point M, dans la prémiére poſition du Cercle mobile. De là, ſuppoſons qu'en roulant il ait paſſé dans la poſition MEM. Donc l'arc EM, qui a été appliqué ſur l'arc EA, lui ſera égal. Ainſi les angles ACE, MDE ſont égaux, & le Triangle CDF eſt iſoſcèle, auſſi bien que AFM. Par conſéquent AM & CD ſont parallèles. Donc AH, perpendiculaire ſur CD, eſt parallèle à EG, qui lui eſt auſſi perpendiculaire, & EH eſt égale à AG, moitié de AM. De plus, les triangles rectangles ACH, CEI ſont ſemblables, & même égaux, leurs hypothénuſes AC, CE étant égales. Donc CH & CI ſont égales. Cela poſé, ſoit l'abſciſſe $AP = z$, l'ordonnée $PM = u$. Donc $AM = \sqrt{(AP^2 + PM^2)} = \sqrt{(zz + uu)}$. Le raïon CA eſt $= a$. Soit $CI = CH = s$. Donc $EH = AG = a - s$, & $2AG\,[2a - 2s] = AM\,[\sqrt{(zz + uu)}]$. Ainſi $s = a - \frac{1}{2}\sqrt{(zz + uu)}$. De plus, les triangles ſemblables CEI, AMP donnent $CE\,[a] : CI\,[s \text{ ou } a - \frac{1}{2}\sqrt{(zz + uu)}] = AM\,[\sqrt{(zz+uu)}] : AP\,[z]$. Donc $az = a\sqrt{(zz + uu)} - \frac{1}{2}(zz + uu)$, Fig. 132,

ou

PL.XVII. ou $2az + zz + uu = 2a\sqrt{(zz + uu)}$, & quarrant $4aazz$ CH. X. $+ 4az^3 + z^4 + 4azuu + 2zzuu + u^4 = 4aazz + 4aauu$, §. 178 ſoit $u^4 + 2zzuu + z^4 + 4auuz + 4az^3 - 4aauu = 0$.

Exemple IV. On demande quels Points multiples a la Courbe repréſentée par l'éq: $x^4 - ay^3 + 2ax^2y + 4ax^3 + 3aayy + 4aaxy + 4aaxx - a^3y = 0$.

Le prémier Rang de la transformée qui réſulte de la ſubſtitution de $y + u$ à y & de $x + z$ à x, eſt $(-3ayy + 2ax^2 + 6aay + 4aax - a^3)u + (4x^3 + 4axy + 12axx + 4aay + 8aax)z$. On a donc à remplir ces trois équations,

$1^e. x^4 - ay^3 + 2axxy + 4ax^3 + 3aayy + 4aaxy + 4aaxx - a^3y = 0$
$2^e. -3ayy + 2axx + 6aay + 4aax - a^3 = 0$
$3^e. 4x^3 + 4axy + 12axx + 4aay + 8aax = 0$

La 3e. eſt diviſible par $4x + 4a$, & donne au quotient $xx + 2ax + ay$. Elle a donc deux racines $4x + 4a = 0$, ou $x = -a$, & $xx + 2ax + ay = 0$, ou $y = -\frac{xx+2ax}{a}$.

Si on ſubſtitue $-a$ pour x dans la 2e. on aura $-3ayy + 6aay - 3a^3 = 0$, ou $-3a(a-y)^2 = 0$, ſoit $y = a$. Ces valeurs de x, & de y, miſes dans la 1e. équation rendent ſon prémier membre égal à zéro. Donc la Courbe a un Point multiple, qui a pour abſciſſe $-a$ & pour ordonnée $+a$. Mais il faut examiner ſi l'autre racine $y = -\frac{xx+2ax}{a}$ n'en fournit point d'autres. Cette valeur d'y ſubſtituée dans la 1e. & 2e. équations les change en $(x^6 + 6ax^5 + 14a^2x^4 + 16a^3x^3 + 9a^4x^2 + 2a^5x) : aa = 0$ & $(3x^4 + 12ax^3 + 16aaxx + 8a^3x + a^4) : a = 0$. Diviſant celle-là par celle-ci, le reſte eſt $-\frac{1}{3}a^4(xx + 2ax + aa)$, qui, égalé à zéro, donne $x = -a$. C'eſt la même valeur qu'on a déja trouvée, & qui, ſubſtituée dans

Ch. X. §. 173. dans $y = -\frac{xx + 2ax}{a}$ donne $y = a$. Ainſi cette ſeconde racine de la 3e. équation ne donne pas d'autre Points multiples que la prémiére. Planche XVIII.

On connoitra le dégré de ſa multiplicité en continuant le calcul de la transformation. Le ſecond Rang eſt $(-3ay + 3aa)uu + (4ax + 2aa)uz + (6xx + 2ay + 12ax + 4aa)zz$, où, mettant $-a$ pour x & $+a$ pour y, tous les termes s'évanouiſſent. Donc le Point eſt plus que double. Mais ſi on cherche le troiſiéme Rang, on aura d'abord $(-a)u^3$; ce qui montre que ce Rang ſubſiſte, & que, par conſéquent, le Point cherché eſt un Point triple.

L'Origine étant portée ſur ce Point, l'équation de la Courbe ſe réduit à $z^4 + 2auzz - au^3 = 0$, qui a quatre racines $z = \pm\sqrt{(-au \pm u\sqrt{(aa + au)})}$, &, qui ſe peut conſtruire ainſi. Ayant décrit, avec un Paramétre $= a$, la Parabole NCN, dont l'Axe des ordonnées eſt CQ; on prendra ſur cette Courbe le point A, dont l'ordonnée CB & l'abſciſſe BA ſont toutes deux égales à a. Ce Point A étant pris pour l'Origine, on ménera la Ligne des ordonnées PAp parallèle à CB, & on donnera à chaque ordonnée AP $[u]$ des abſciſſes PM $[z]$ & PM $[-z]$, moyennes proportionelles entre AP & PN. Car, puiſque AP $[u] =$ BQ, CQ $=$ CB $+$ BQ $= a + u$, & QN, par la nature de la Parabole, $= \sqrt{(aa + au)}$. Donc PN $= -a \pm \sqrt{(aa + au)}$. Ainſi PM, moyenne proportionelle entre AP & PN eſt $= \pm\sqrt{(-au \pm u\sqrt{(aa + au)})}$. Fig. 133.

Du côté des ordonnées poſitives, la Courbe n'a que deux Branches infinies AM, AM, parce que des quatre racines $\pm\sqrt{(-au \pm u\sqrt{(aa + au)})}$ les deux $\pm\sqrt{(-au - u\sqrt{(aa + au)})}$ ſont imaginaires, & parce, auſſi, qu'on ne prend pas une moyenne proportionelle

PLANCHE XVIII. tionelle entre une grandeur positive AP & une négative PN. Mais du côté des ordonnées négatives, la Courbe a deux feuilles Amm, A*mm*, qui se nouent en A & y font un Point triple. CH. X. §. 173.

Exemple V. On demande si la Courbe représentée par l'éq: 1e. a quelque Point multiple?

En substituant dans cette équation $y+u$ à y & $x+z$ à x, on trouvera que les coëfficients de u & de z dans le prémier Rang, égalés à zéro, donnent les équations 2e, & 3e.

1e. $y^4+yyxx-8ay^3-4ayyx-4ayxx+19aayy+16aayx+5aaxx-12a^3y-14a^3x-3a^4=0$.

2e. $4y^3+2yxx-24ayy-8ayx-4axx+38aay+16aax-12a^3=0$.

3e. $2yyx-4ayy-8ayx+16aay+10aax-14a^3=0$.

Cette 3e. équation donne $x=\frac{2yy-8ay+7aa}{yy-4ay+5aa}a$, & cette valeur substituée dans les deux autres transforme la 1e. en $y^8-16ay^7+105a^2y^6-364a^3y^5+692a^4y^4-608a^5y^3-80a^6y^2+576a^7y-320a^8=0$, & la 2e. en $2y^7-28ay^6+163a^2y^5-510a^3y^4+904a^4y^3-848a^5y^2+304a^6y+32a^7=0$. On cherchera les racines communes à ces deux équations, en cherchant leur commun diviseur. Si on divise la 1e. par la 2e. on trouvera pour le reste $-9(y^6-12ay^5+6aay^4-160a^3y^3+240a^4y^2-192a^5y+64a^6)$, & ce prémier reste divisant la 2e. équation donne un second reste $-(5y^5-50ay^4+216a^2y^3-496a^3y^2+592a^4y-288a^5)$, par lequel divisant le prémier reste multiplié par 5, on aura un troisiéme reste $-16(y^4-8ay^3+24a^2y^2-32a^3y+16a^4)$. Ce troisiéme reste divisant le second donnera le quatriéme

16(y^3

CH. X. §. 173. $16(y^3 - 6ay^2 + 12a^2y - 8a^3)$ qui diviſe exactement le troiſiéme. C'eſt donc ce quatriéme reſte qui contient les racines communes aux trois équations à remplir. L'équation qu'il fournit $y^3 - 6ayy + 12a^2y - 8a^3 = 0$, quoique du troiſiéme dégré, n'a qu'une racine $y - 2a = 0$, dont cette équation eſt le cube. Donc ſi la Courbe a quelque Point multiple, ce ne peut être que ſur l'abſciſſe de l'ordonnée $y = 2a$. PLANCHE XVIII.

Et pour s'aſſurer de ſa juſte poſition, on ſubſtituera $2a$ pour y dans l'éq : $x = \frac{2yy - 8ay + 7aa}{yy - 4ay + 5aa} a$ & on trouvera $x = -a$. Comme ces valeurs $-a$ & $2a$, de x & de y, ſubſtituées dans les trois équations à remplir, font évanouïr leur prémier membre, on peut conclure aſſurément que le Point, dont l'abſciſſe eſt $-a$ & l'ordonnée $2a$, eſt un Point multiple.

On trouvera le dégré de ſa multiplicité en continuant le Calcul de la transformation. Le ſecond Rang eſt $(6yy + xx - 24ay - 4ax + 19aa)uu + (4yx - 8ay - 8ax + 16aa)uz + (yy - 4ay + 5aa)zz$, que la ſubſtitution de $-a$ à x & de $2a$ à y réduit à $(0)uu + (0)uz + (aa)zz$. Ainſi, ce ſecond Rang ne diſparoiſſant pas, on ſait que le Point en queſtion n'eſt qu'un Point double.

En effet, ſi on pouſſe juſqu'au bout le calcul de la transformation, on réduira l'équation de la Courbe à $u^4 + uuzz - 6auuz + aazz = 0$, qui ſe conſtruit ainſi. On décrira du centre C, avec un raïon $CA = 4a$, le Cercle ANDN, & ſur le raïon CA, comme diamétre, le Cercle $ANCN$. On prendra le point A, où ces Cercles ſe touchent, pour Origine, & ayant mené NN perpendiculaire à l'abſciſſe AP [z], on partagera en deux également en M & M, les parties NN, NN interceptées entre les deux circonférences. Les points M, M, ſont Fig. 134.

PLANCHE XVIII. ceux de la Courbe. Car $PN = \sqrt{(AP \times PD)} = \sqrt{(8az - zz)}$, & $PN = \sqrt{(AP \times PC)} = \sqrt{(4az - zz)}$. Donc, du côté positif, $PM = +\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} + \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$, & $PM = +\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} - \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$; &, du côté négatif, $PM = -\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} - \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$, & $PM = -\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} + \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$: en général $u = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(8az - zz)} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(4az - zz)}$. Donc $uu = \frac{1}{4}(8az - zz) + \frac{1}{4}(4az - zz) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(32aazz - 12az^3 + z^4)}$, ou $uu - 3az + \frac{1}{2}zz = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(32aazz - 12az^3 + z^4)}$. soit $u^4 - 6auuz + 9aazz + zzuu - 3az^3 + \frac{1}{4}z^4 = 8aazz - 3az^3 + \frac{1}{4}z^4$, & enfin $u^4 - 6auuz + aazz + zzuu = 0$. Il eſt manifeſte, par cette équation & par la conſtruction qu'on vient d'en donner, que la Courbe a un Point double à l'Origine A, où les Branches MAM, MAM viennent ſe toucher. CH. X. §. 173.

Exemple VI. On propoſe la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4 + x^4 - 2aayy - 2bbxx + b^4 = 0$. Et on demande ſi elle a des Points multiples?

Le prémier Rang de la transformée étant $(4y^3 - 4aay)u + (4x^3 - 4bbx)z$, on a ces trois équations à remplir,

1e. $y^4 + x^4 - 2aayy - 2bbxx + b^4 = 0$
2e. $4y^3 - 4aay = 0$
3e. $4x^3 - 4bbx = 0$

La 2e. a les trois racines $y = 0$, $y = a$, $y = -a$. Et la 3e. auſſi les trois racines $x = 0$, $x = b$, $x = -b$. On combinera donc les trois valeurs d'y avec les trois valeurs d'x: ce qui fait neuf combinaiſons.

$x = 0$, y

CH. X. §. 173.

$x=0, y=0$	Ces valeurs d'x & d'y substituées dans l'équation proposée la changent en	$0+0-0-0+b^4=0$; ce qui est absurde.
$x=0, y=a$		$a^4+0-2a^4-0+b^4=0$ } ce qui est absurde, à moins que a ne soit $=b$.
$x=0, y=-a$		$a^4+0-2a^4-0+b^4=0$ }
$x=b, y=0$		$0+b^4-0-2b^4+b^4=0$
$x=b, y=a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$ } ce qui est absurde.
$x=b, y=-a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$ }
$x=-b, y=0$		$0+b^4-0-2b^4+b^4=0$.
$x=-b\ y=a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$ } ce qui est absurde.
$x=-b, y=-a$		$a^4+b^4-2a^4-2b^4+b^4=0$ }

Il paroit donc que, hors le cas où $a=b$, la Courbe n'a que deux Points multiples, qui répondent à l'ordonnée $y=0$, & aux abscisses $x=b$, $x=-b$. C'est aussi ce que confirme l'examen de la Courbe. Son équation marque que ses Axes sont en même tems Diamétres & Contrediamétres [§. 76]. Elle se peut réduire à $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{(a^4-(xx-bb)^2)})}$. Chaque abscisse x aura donc quatre ordonnées, tant que $x<\sqrt{(aa+bb)}$. Si l'on fait $x=0$, on aura $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{(a^4-b^4)})}$. Ainsi prenant sur l'Axe des ordonnées, AC & AC, égales à $\pm\sqrt{(aa+\sqrt{(a^4-b^4)})}$, & Ac, A$c$, égales à $\pm\sqrt{(aa-\sqrt{(a^4-b^4)})}$, les Points C, C, c, c, seront des Points de la Courbe. Si on fait $x=\pm b$, on aura $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{a^4})}=\pm\sqrt{(aa\pm aa)}=\pm a\sqrt{2}$ & 0. Prenant donc AB & Ab égales à $\pm b$, les Points B & b sont les Points doubles de la Courbe. Mais ces abscisses AB & Ab ont encore les ordonnées BD, bd, BD, bd, égales à $\pm a\sqrt{2}$. Si l'on fait $x=\pm\sqrt{(aa+bb)}$, on aura $y=\pm\sqrt{(aa\pm\sqrt{(a^4-a^4)})}=\pm a$. Donc, prenant les abscisses AE, Ae égales à $\pm\sqrt{(aa+bb)}$, & leur appliquant les ordonnées EF, EF, ef, ef, égales à $\pm a$, les Points F, F, f, f sont encore des Points de la Courbe, & même des limites. Car si $x>\sqrt{(aa+bb)}$, y est imaginaire. On voit par-là, & on verroit encore

PLANCHE XVIII. Fig. 138

PLANCHE XVIII. plus clairement par un détail, mais un peu long, que la Courbe a la figure de deux cœurs qui se pénétrent l'un l'autre par la pointe, & se croisent en B & b qui sont les deux Points doubles que nous a donné le calcul. CH. X. §. 171.

Ce même calcul fait voir que quand $a = b$, les points Fig. 136. C, C extrémités des ordonnées $AC = a$, $AC = -a$, sont encore des Points doubles. Dans ce cas, la Courbe en a quatre ; & elle est composée de deux Ovales qui se croisent en B, C, b, C. Mais il faut remarquer que cette Courbe n'est pas, comme la précedente, une Courbe simple : c'est l'assemblage de deux Courbes, chaque Ovale étant une Ligne du second Ordre. Car l'équation proposée, réduite, par la supposition de $a = b$, à $y^4 + x^4 - 2aayy - 2aaxx + a^4 = 0$, se décompose en ces deux $yy + xy\sqrt{2} + xx - aa = 0$, & $yy - xy\sqrt{2} + xx - aa = 0$. Donc [§. 21], la Courbe qu'elle représente est composée de deux autres.

Exemple VII. On demande les Points multiples de la Courbe représentée par l'éq : $x^4 - 2ay^3 - 3aayy - 2aaxx + a^4 = 0$?

Les trois équations à remplir sont

1°. $x^4 - 2ay^3 - 3aayy - 2aaxx + a^4 = 0$

2°. $-6ayy - 6aay = 0$

3°. $4x^3 - 4aax = 0$.

La 2°. a deux racines $y = 0$ & $y = -a$, & la 3°. trois $x = 0$, $x = a$, $x = -a$, qu'on combinera les unes avec les autres.

$x = 0$,

Digitized by Google

Ch. X. §. 173.

$x=0, y=0$	Ces valeurs de dx & dy substituées dans la proposée la changent en	$0-0-0-0+a^4=0$, ce qui est absurde.
$x=0, y=-a$		$0+2a^4-3a^4-0+a^4=0$
$x=a, y=0$		$a^4-0-0-2a^4+a^4=0$
$x=a, y=-a$		$a^4+2a^4-3a^4-2a^4+a^4=0$, ce qui est absurde.
$x=-a, y=0$		$a^4-0-0-2a^4+a^4=0$
$x=-a, y=-a$		$a^4+2a^4-3a^4-2a^4+a^4=0$, ce qui est absurde.

Il ne peut donc y avoir que trois Points multiples ; un, dont l'abscisse est 0, & l'ordonnée $-a$; un, dont l'abscisse est a & l'ordonnée 0 ; & un, dont l'abscisse est $-a$ & l'ordonnée 0. PLANCHE XVIII.

Ces Points ne sont que doubles. Car le second Rang de la transformée est $(-6ay-3aa)uu+(0)uz+(6ax-2aa)zz$; que la substitution de 0 pour x & $-a$ pour y réduit à $3aauu-2aazz$; que la substitution de a pour x & de 0 pour y change en $-3aauu+4aazz$; & que la substitution de $-a$ pour x & de 0 pour y transforme encore en $-3aauu+4aazz$. Donc aucune de ces suppositions ne faisant disparoitre le second Rang, les trois Points multiples de la Courbe ne sont que des Points doubles.

L'équation de la Courbe $x^4-2aaxx+a^4=2ay^3+3aayy$ se résout en ces quatre racines $x=\pm\sqrt{(aa\pm y\sqrt{(2ay+3aa)})}$. Si on fait $y=0$, on aura $x=\pm\sqrt{aa}=\pm a$. Qu'on prenne donc les abscisses $AB=a$, $Ab=-a$; B, b seront des Points de la Courbe, & mêdes Points doubles. Si on fait $y=\frac{1}{2}a$, on aura $x=\pm\sqrt{(aa\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(aa+3aa)})}=\pm a\sqrt{2}$ & 0. Ainsi prenant l'ordonnée $AC=\frac{1}{2}a$, le Point C est un de ceux de la Courbe, aussi bien que les Points D, d, extrémités des abscisses $CD=+a\sqrt{2}$, & $Cd=-a\sqrt{2}$. Les racines $\pm\sqrt{(aa-y\sqrt{(2ay+3aa)})}$ désignent les Branches BC, bC, qui se terminent au Point C ; ces racines Fig. 137.

deve-

PLANCHE XVIII. devenant imaginaires, quand $y > \frac{1}{4}a$. Mais les racines $\pm\sqrt{(aa + y\sqrt{(2ay + 3aa)})}$ désignent les Branches B D, b d, qui sont paraboliques & vont à l'infini. Du côté des ordonnées négatives, si l'on prend $y = -a$, on aura $x = \pm\sqrt{(aa \pm a\sqrt{(3aa - 2aa)})} = \pm a\sqrt{2}$ & o. Prenant donc l'ordonnée A E $= -a$, le Point E apartient à la Courbe ; il en est même un Point double. Et si à cette ordonnée A E on donne les deux abscisses E F $= +a\sqrt{2}$, E f $= -a\sqrt{2}$, on aura encore deux Points de la Courbe, F, f. Enfin, si l'on fait $y = -\frac{1}{4}a$, on aura $x = \pm\sqrt{(aa \pm \frac{3}{4}a\sqrt{(3aa - 3aa)})} = \pm a$, de sorte que l'ordonnée A G $= -\frac{1}{4}a$ n'a que deux abscisses G H $= +a$, G h $= -a$, & ces abscisses sont des limites ; car les ordonnées plus négatives que A G n'ont que des abscisses imaginaires. On voit par-là que la Courbe est composée de deux Branches paraboliques, qui se nouent aux Points B, b, E, qui ont été assignés par le calcul. Ch. X. §. 173.

174. C'est encore par le Principe du §. 170, qu'on peut résoudre ce Problême *. L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver les conditions qui donnent des Points multiples à la Courbe ?

Ce Problême n'a lieu que quand l'équation renferme plusieurs lettres qui désignent des grandeurs constantes. Lorsqu'elle n'en a qu'une, comme dans presque tous les Exemples précédents, l'augmentation ou diminution de ce Paramêtre ne produit que des Courbes semblables, qui toutes, ou n'ont aucun Point multiple, ou en ont le même nombre.

Mais quand l'équation renferme plusieurs constantes, il arrive souvent que certains raports de ces constantes don-

† *Usage de l'Anal.* pag. 240.

Digitized by Google

CH. X. §. 174. donnent à la Courbe des Points multiples que d'autres raports leur refuſent. PLANCHE XVIII.

Pour déterminer ces raports, on fera les mêmes équations qui ont été indiquées au §. préc. Mais les opérations qu'on fera ſur ces équations, au lieu d'aller à déterminer les variables x & y, iront à les exterminer; afin qu'il reſte des équations entre les quantités conſtantes, qui expriment leurs raports propres à donner des Points multiples, ou qui manifeſtent l'impoſſibilité des Points multiples dans cette Courbe.

Ainſi, puiſque l'exiſtence des Points doubles donne trois équations [§. préc.], deſquelles il n'en reſte qu'une quand on a éliminé x & y; l'exiſtence des Points doubles dépend en général d'une ſeule condition.

Celle des Points triples fournit ſix équations, qui ſe réduiſent à quatre quand on a éliminé x & y: l'exiſtence d'un Point triple dépend donc en général de quatre conditions.

De même, celle d'un Point quadruple dépend de huit conditions; celle d'un Point quintuple de treize conditions; &c. Celle d'un Point d'une multiplicité du dégré t, de $\frac{1}{2}tt+\frac{1}{2}t-2$ conditions.

Cela n'eſt ainſi qu'en général, & n'empêche pas que, dans pluſieurs Cas particuliers, des équations qui renferment pluſieurs conſtantes ne puiſſent être telles que, quelque ſuppoſition qu'on faſſe, les Courbes qu'elles repréſentent auront toûjours des Points multiples, ou n'en auront jamais.

Exemple I. On demande, ſi la Courbe CMBm a des Points multiples, où ils ſont, & ce qu'ils ſont? Sa conſtruction eſt telle. Fig. 138.

Sur le diamétre AB du Cercle ANBn, on prend à volonté un Point C, & menant une infinité de perpen-

PLANCHE XVIII. diculaires à ce diamétre, comme NPn, qui coupe le diamétre en P & la circonférence en N, n; on tire par C les droites CM, Cm parallèles à AN, An. Les Points M, m ſont des Points de la Courbe. CH. X. §. 174.

Si on nomme l'abſciſſe AP, x; l'ordonnée PM, y; le diamétre AB, a; ſa partie AC, b; on aura $CP = x - b$, &, par la nature du Cercle, $PN = \sqrt{AP \times PB} = \sqrt{(ax - xx)}$. Les triang: ſembl: APN, CPM, donnent $AP^2 [xx] : PN^2 [ax - xx] = CP^2 [xx - 2bx + bb] : PM^2 [y^2]$. Donc, multipliant les extrêmes & les moyennes, & diviſant par x, $xyy + x^3 - (2b + a)xx + (bb + 2ab)x - abb = 0$.

Pour ſavoir en quel cas cette Courbe peut avoir des Points multiples, on cherchera le prémier Rang de la transformée qui réſulte de la ſubſtitution de $y + u$ à y, & de $x + z$ à x. Ce Rang eſt $(2xy)u + (yy + 3xx - 2(2b + a)x + (bb + 2ab))z$.

On aura donc, y compris la propoſée, ces trois équations à remplir,

$1^e. xyy + x^3 - (2b + a)xx + (bb + 2ab)x - abb = 0$
$2^e. yy + 3xx - 2(2b + a)x + (bb + 2ab) = 0$
$3^e. 2xy = 0.$

La 3e. donne, ou $x = 0$, ou $y = 0$, c'eſt-à-dire, que les Points multiples de la Courbe, ſi elle en a, ſe trouvent ou ſur l'Axe des ordonnées ou ſur celui des abſciſſes.

Qu'on faſſe d'abord $x = 0$, & l'on aura les Points multiples qui ſe peuvent trouver ſur la Ligne des ordonnées. En ſubſtituant 0 pour x dans les équations 1e & 2e, on les réduit à $-abb = 0$ & $bb + 2ab = 0$, qui ne peuvent s'accorder qu'autant que b eſt $= 0$. Mais cette valeur de b, ſubſtituée dans la propoſée, la change en $xyy + x^3 - axx = 0$, réductible en ces deux-cy $x = 0$, & $yy + xx - ax = 0$. La prémiére déſigne l'Axe

CH. X. §. 174. l'Axe des ordonnées [§. 40, III, 2] & la ſeconde le Cercle ANBn. Le ſyſtême de ces deux Lignes, qui ſe touchent en A, y forme un Point double. Mais c'eſt-là un Cas particulier, qui n'eſt compris qu'incidemment dans l'équation de la Courbe propoſée. On peut donc aſſurer que, hors ce Cas-là, la Courbe n'a aucun Point multiple ſur l'Axe des ordonnées. PLANCHE XVIII.

Voyons ſi elle en a ſur l'Axe des abſciſſes. C'eſt la ſeconde racine $y = o$ de l'équation 3e, qui les indique. Cette valeur d'y ſubſtituée dans les équat : 1e. & 2e. les change en $x^3 - (2b + a)x^2 + (bb + 2ab)x - abb = o$, & en $3xx - (4b + 2a)x + bb + 2ab = o$. La Courbe aura donc quelque Point multiple, ſi on peut trouver une valeur d'x, qui ſatisfaſſe en même tems à ces deux équations. Que ſi elle n'y ſatisfait qu'au cas que a & b ayent certain raport, ce raport eſt la condition qui donne à la Courbe un ou pluſieurs Points multiples. Il faut donc chercher le diviſeur commun de ces deux équations. On trouvera, par les régles ordinaires, que l'une & l'autre eſt diviſible par $x - b$, qui, égalé à zéro, donne $x = b$.

Donc, quelque ſuppoſition qu'on faſſe touchant le raport d'a & b, la Courbe a un Point multiple à l'extrémité de l'abſciſſe b, c'eſt-à-dire en C. Et on verra aiſément que ce Point eſt un Point double: ce que la Conſtruction géométrique de la Courbe rend auſſi fort ſenſible.

Exemple II. On propoſe l'équation ſemblable, mais plus générale, $xyy + ax^3 + bxx + cx + d = o$, & l'on demande quel doit être le raport des quantités conſtantes a, b, c, d, afin que la Courbe repréſentée par cette équation ait quelque Point multiple?

PLANCHE XVIII. Les trois équations à remplir ſeront CH. X. §. 174.

$1^{e}.\ xyy + ax^{3} + bx^{2} + cx + d = 0$

$2^{e}.\ yy + 3axx + 2bx + c = 0$

$3^{e}.\ 2xy = 0.$

Cette derniére donne $x = 0$, ou $y = 0$, c'eſt-à-dire, que les Points multiples, ſi la Courbe en a, ne peuvent ſe trouver que ſur l'Axe des ordonnées ou ſur celui des abſciſſes.

La ſuppoſition de $x = 0$ change la propoſée en $d = 0$. Donc, ſi la Courbe a des Points multiples ſur l'Axe des ordonnées, il faut que d ſoit $= 0$. Alors l'équation de la Courbe eſt $xyy + ax^{3} + bx^{2} + cx = 0$, qui ſe réſoud en ces deux $x = 0$, & $yy + ax^{2} + bx + c = 0$. Elle exprime donc l'Axe des ordonnées avec une Courbe du ſecond Ordre. Ces deux Lignes ſe coupent en deux points ſitués aux extrémités des ordonnées $+\sqrt{-c}$ & $-\sqrt{-c}$; grandeurs qui ne ſeront pas imaginaires, ſi c eſt négative: & ces deux interſections peuvent être regardées comme des Points doubles du Syſtéme de ces deux Lignes.

La ſuppoſition de $y = 0$, qui donne les Points multiples ſur l'Axe des abſciſſes, change la propoſée en $ax^{3} + bx^{2} + cx + d = 0$, & l'équation $2^{e}.$ en $3ax^{2} + 2bx + c = 0$. La Courbe aura donc des Points multiples, ſi ces deux équations ont quelque racine commune. Ainſi il faut voir quelle rélation de a, b, c, d, peut leur donner une racine commune. On la trouvera en diviſant la $1^{e}.$ par la $2^{e}.$ & celle-ci par le reſte $\frac{6ac - 2bb}{9a}x + \frac{9ad - bc}{9a}$, ou $x + \frac{9ad - bc}{6ac - 2bb}$. Le reſte de cette ſeconde diviſion eſt $36aac^{3} - 9abbcc - 162aabcd + 36ab^{3}d + 243a^{3}dd$, ou, diviſant

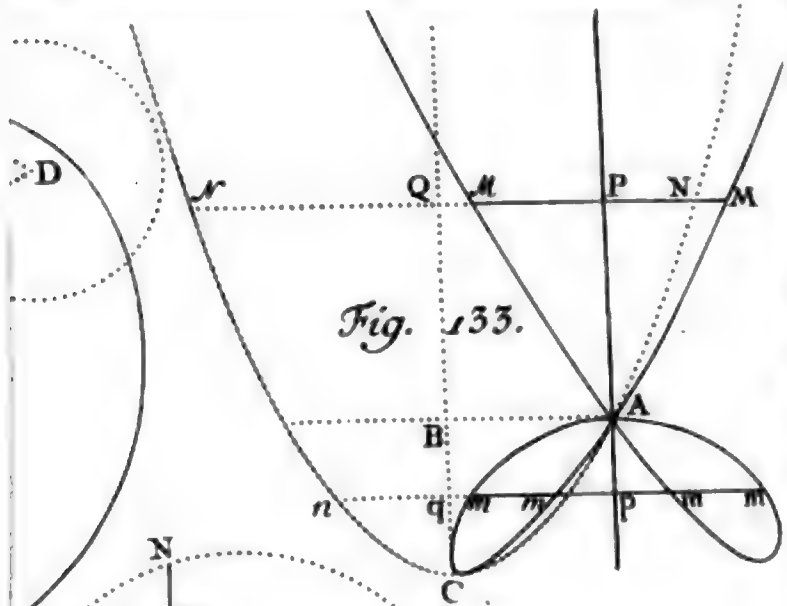


Fig. 133.

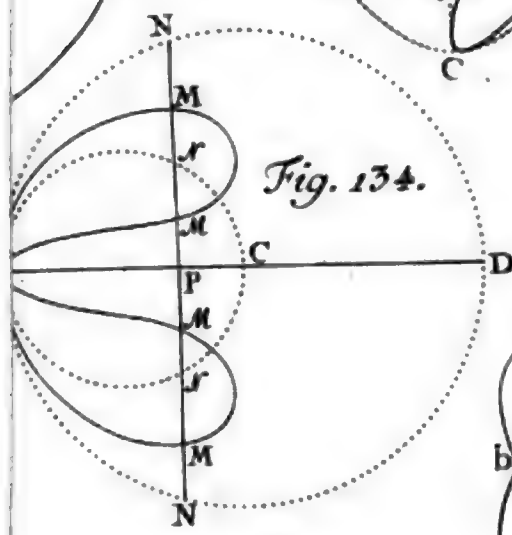


Fig. 134.

Fig. 136.

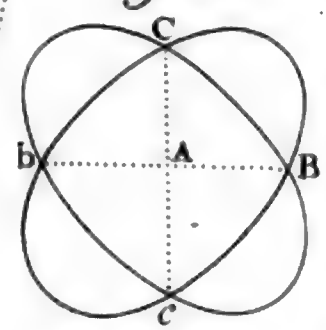
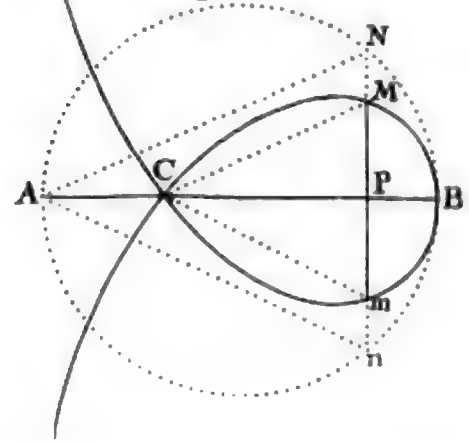


Fig. 138.



Digitized by Google

CH. X. divisant par $9a$, $4ac^3 - bbcc - 18abcd + 4b^3d + 27aadd$ PLANCHE
§. 174 Si les équat: 1e. & 2e. ont quelque racine commune, y XVIII.
étant $= o$, ce reste doit être $= o$. C'est donc l'équat: $4ac^3 - bbcc - 18abcd + 4b^3d + 27aadd = o$, qui exprime la rélation des coëfficients a, b, c, d, propre à donner à la Courbe un Point multiple. Ce Point sera sur l'Axe des abscisses, à l'extrémité de l'abscisse $\frac{bc - 9ad}{6ad - 2bb}$, qui se déduit de l'éq: $x + \frac{9ad - bc}{6ac - 2bb} = o$, racine commune des équations 1e. & 2e.

Ce n'est qu'un Point double; car si on cherche le second Rang de la transformée, on trouvera d'abord $(-x)uu$, qui ne s'évanouit que par la supposition de $x = o$; supposition qui, comme on l'a vû, change la Courbe en une Ligne du second Ordre combinée avec une Droite.

Si on fait attention que la supposition $y = o$ marque que les Points multiples, si la Courbe en a, se trouvent sur l'Axe des abscisses, & qu'elle change la proposée en $ax^3 + bx^2 + cx + d = o$, dont les racines marquent les abscisses par l'extrémité desquelles passe la Courbe; on conclura d'abord que la Courbe n'a de Points doubles qu'autant que l'éq: $ax^3 + bx^2 + cx + d = o$ a des racines égales; puisque pour former un Point double, il faut le concours de deux Points simples.

Et c'est aussi justement ce qu'exprime l'équation 2e, transformée par la supposition de $y = o$ en $3ax^2 + 2bx + c = o$. Celle-ci se forme de l'éq: $ax^3 + bx^2 + cx + d = o$, en multipliant ses termes par la progression arithmétique 3, 2, 1, o. Et la Régle de Mr. HUDDE montre que quand une équation a deux racines égales; si on multiplie ses termes par ceux d'une progression arithmétique, le produit est une équation qui aura une de ces racines égales. [*V. Append. N°.* 3].

PLANCHE XVIII.

Exemple III. Mais ſi l'équation de la Courbe avoit été $xyy + ey + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, * les trois équations à remplir ſeroient CH. X. §. 174.

$1^e.\ xyy + ey + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
$2^e.\ 2xy + e = 0$
$3^e.\ yy + 3ax^2 + 2bx + c = 0.$

La $2^e.$ donne $y = -\frac{e}{2x}$, qui eſt une équation à l'Hyperbole. C'eſt donc ſur une Hyperbole que ſe doivent trouver tous les Points multiples que la Courbe peut avoir. Cette valeur d'y ſubſtituée dans les équations $1^e.$ & $3^e.$ les transforme en $\frac{ee}{4x} - \frac{ee}{2x} + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, ou, multipliant par x, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx - \frac{1}{4}ee = 0$, & $\frac{ee}{4xx} + 3ax^2 + 2bx + c = 0$, ou, multipliant par xx, $3ax^4 + 2bx^3 + cxx + \frac{1}{4}ee = 0$. Il faudroit donc chercher quels ſont les raports de a, b, c, d, e, qui donnent à ces deux équations des racines communes; & ces racines détermineroient la valeur de l'abſciſſe, ou des abſciſſes, qui répondent aux Points multiples de la Courbe.

Mais ſans s'engager dans ce Calcul, qui ſeroit un peu long, on voit que la ſeconde de ces équations eſt juſtement celle qui réſulte quand on multiplie ſucceſſivement les termes de la prémiére par la progr: arith: $3, 2, 1, 0, -1$. D'où l'on peut conclure que la propoſée a des Points doubles, quand l'équation $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + \frac{1}{4}ee = 0$ a des racines égales.

Je dis des Points doubles. Car ſi l'on cherche le ſecond Rang de la transformée, on trouvera $(x)uu + (2y)uz + (3ax + b)zz$, dont les coëfficients égalés à zéro,

* Voyez NEWTON, *Enumer. lin. tert. Ord.* §. IV.

CH. X §. 174. zéro, donnent $x = 0$, $y = 0$, $3ax + b = 0$. Donc $b = 0$; & ces valeurs, ſubſtituées dans les équations à remplir, donnent $d = 0$, $e = 0$, & $c = 0$; ce qui réduit la propoſée à $xyy + ax^3 = 0$, réductible en ces trois équations $x = 0$, $y - x\sqrt{-a} = 0$, $y + x\sqrt{-a} = 0$. La prémiére repréſente l'Axe des ordonnées : les deux autres ſont imaginaires, quand a eſt poſitive; mais quand a eſt négative, elles repréſentent deux Droites paſſant par l'Origine. Dans ce cas, le Point triple eſt à l'Origine ſur le concours des trois Droites que repréſente l'éq : $xyy - ax^3 = 0$. PL. XIX.

Exemple IV. On demande en quels Cas la *Conchoïde* a des Points multiples ?

La Conchoïde ſe conſtruit ainſi. Hors de la Droite AB, qui ſe nomme la *Régle*, on a pris un Point fixe P, apellé le *Pole*, duquel on mène à la Régle une infinité de Droites, comme PC, PE, &c. qu'on prolonge toutes également, enſorte que CD = EF = &c. La Courbe FDH, qui paſſe par les extrémités de tous ces prolongements, eſt la *Conchoïde ſupérieure.* Si on avoit pris, de l'autre côté de la Régle, des parties Cd, Ef, &c. égales à CD, EF; les Points d, f, &c. auroient été à la *Conchoïde inférieure.* Fig. 139.

Ces deux Courbes n'en ſont qu'une ſeule, exprimée par l'équation qui ſe forme en conſidérant la reſſemblance des triangles PCE, PFQ : elle donne cette proportion QC: CP = FE : EP. Donc, en nommant CP, abaiſſée perpendiculairement du Pole ſur la Régle, a; CD, ou EF, b; l'abſciſſe CQ, x; & l'ordonnée QF, y; on aura $x : a = b : \frac{ab}{x} = EP$. Ainſi $PF = PE + EF = \frac{ab}{x} + b = \frac{b}{x}(a + x)$.

Pl. XIX. $+x$). Mais $PF^2 = PQ^2 + QF^2$. Donc $\frac{bb}{xx}(aa + 2ax$ Ch. X. §. 174 $+ xx) = aa + 2ax + xx + yy$, ou $yyxx + x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2abbx - aabb = 0$. C'eſt dans cette équation qu'il faut chercher ſi la Conchoïde a des Points multiples.

On aura ces trois équations à remplir

1e. $yyxx + x^4 + 2ax^3 + (aa - bb)xx - 2abbx - aabb = 0$

2e. $2xxy = 0$

3e. $2xyy + 4x^3 + 6ax^2 + 2(aa - bb)x - 2abb = 0$

dont la 2e. donne $x = 0$, ou $y = 0$.

La ſuppoſition de $x = 0$ change la 1e. en $-aabb = 0$, & la 2e en $-2abb = 0$. De l'une & de l'autre il réſulte $a = 0$, ou $b = 0$.

Si on fait $a = 0$, le Pole tombe ſur la Régle, & l'équation ſe réduit à $y^2x^2 + x^4 - bbxx = 0$, qui ſe décompoſe en $x = 0$, $x = 0$, & $yy + xx - bb = 0$. Les deux prémiéres expriment l'Axe des ordonnées, & la troiſiéme un Cercle décrit du centre C avec un raïon CD $= b$. Il coupe l'Axe des ordonnées en deux Points qui ſont des Points doubles. Mais ce Cas n'apartient pas à la Conchoïde.

Si on fait $b = 0$, on change la propoſée en $yyxx + x^4 + 2ax^3 + aaxx = 0$, qui ſe décompoſe en $x = 0$, $x = 0$, $yy + xx + 2ax + aa = 0$. Les deux prémiéres indiquent l'Axe des ordonnées, & la troiſiéme n'exprime que deux Droites imaginaires $y\sqrt{-1} + x + a = 0$, $y\sqrt{-1} - x - a = 0$.

Ainſi la ſuppoſition de $x = 0$ ne nous aprend rien touchant la Conchoïde, ſinon que cette Courbe n'a aucun Point multiple ſur l'Axe des ordonnées.

La ſuppoſition de $y = 0$ réduit l'éq: 1e. à $x^4 + 2ax^3 + (aa - bb)xx - 2abbx - aabb = 0$, & l'éq: 3e. à

$4x^3 +$

Ch. X. §. 174. $4x^3 + 6ax^2 + 2(aa - bb)x - 2abb = 0$. Cette ſeconde étant celle qui réſulte de la prémiére multipliée, terme à terme, par la progr: arith: 4, 3, 2, 1, 0, & diviſée par x, marque que la Courbe aura quelque Point multiple quand l'éq: $x^4 + 2ax^3 + (aa - bb)xx - 2abbx - aabb = 0$ aura deux racines égales. Or elle les a toûjours, puiſqu'elle eſt diviſible par $xx + 2ax + aa = 0$, ou $(x + a)^2 = 0$. Donc la Courbe a un Point multiple à l'extrémité de l'abſciſſe négative $x = -a$, c'eſt-à-dire, au Pole, & cela quelque raport qu'il y ait entre a & b. On trouve la même choſe en cherchant la racine commune des deux équations que donne la ſuppoſition d'$y = 0$. Et on prouve ſans peine que ce Point eſt un Point double. Pl. XIX.

On le voit auſſi par la Conſtruction de la Courbe. Mais ſi le prolongement CD étoit pris plus petit que la diſtance PC du Pole à la Régle; on pourra être ſurpris de voir que le Point P, où eſt le Pole, ſoit un des Points de la Courbe, quoiqu'il ne paſſe aucune Branche par ce Point-là. Il apartient pourtant à la Courbe par ſon équation. Car ſi l'on fait $y = 0$, pour avoir les Points où la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes PD, on aura $x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2ab^2x - a^2b^2 = 0$, ſoit $(xx + 2ax + aa)(xx - bb) = 0$, qui a quatre racines $x - b = 0$, $x + b = 0$, $x + a = 0$, $x + a = 0$. La racine $x - b = 0$, ou $x = b = CD$, marque le Point D. La racine $x + b = 0$, ou $x = -b = Cd$, déſigne le Point d, & la racine double $x + a = 0$, ou $x = -a = CP$, indique le Point P, qui eſt par conſéquent un des Points de la Courbe. On verra dans les Chapp. ſuivants, aſſez d'Exemples de ces Points iſolés & détachés du reſte du contour de la Courbe, à laquelle pourtant l'équation démontre qu'ils apartiennent. On y parlera de leur origine, de la maniére de les reconnoi- Fig. 140.

Digitized by Google

Pl. XIX. tre, d'assigner leur place & le dégré de leur multiplicité. Ch. X. §. 174.

Exemple V. On propose la Courbe dont voici la Construction, & on demande en quel Cas elle a des Points multiples?

Fig. 141. Sur le plan d'un Cercle décrit du centre C, avec le raïon CN, on a tracé la Droite AB. D'un Point fixe A pris sur cette Droite, on méne des Droites AN à la circonférence, & abaissant NP perpendiculaire sur AB, on donne à l'abscisse AP des ordonnées PM, PM égales à AN.

On aura l'équation de cette Courbe en nommant a, la perpendiculaire CF abaissée du centre C sur la Droite AB; b, la portion AF de cette Droite, comprise entre le Point F & le Point fixe A; r, le raïon CN; x, l'abscisse AP; y, l'ordonnée PM = AN. Car on aura $PN = \sqrt{(AN^2 - AP^2)} = \sqrt{(yy - xx)}$; $EN = PN - PE = \sqrt{(yy - xx)} - a$; $CE = AP - PF = x - b$; & le triang. rect. CEN donnera $CN^2\,[rr] = CE^2\,[xx - 2bx + bb] + EN^2\,[yy - xx - 2a\sqrt{(yy - xx)} + aa]$. Soit, pour abréger, $cc = aa + bb - rr$, & l'on aura $yy - 2bx + cc = 2a\sqrt{(yy - xx)}$, ou, quarrant & transposant, $y^4 - 4bxyy + (4bb + 4aa)xx + (2cc - 4aa)yy - 4bccx + c^4 = 0$.

On aura donc, pour l'existence des Points multiples, ces trois équations à remplir.

1°. $y^4 - 4bxyy + (4bb + 4aa)xx + (2cc - 4aa)yy - 4bccx + c^4 = 0$

2°. $4y^3 - 8bxy + (4cc - 8aa)y = 0$

3°. $-4byy + (8bb + 8aa)x - 4bcc = 0$.

La 3°. donne $x = \frac{4byy + 4bcc}{8bb + 8aa} = \frac{byy + bcc}{2bb + 2aa}$, & cette

CH. X. §. 174. te valeur d'x ſubſtituée dans la 2e. la transforme en $4y^4$ PL. XIX. $- \frac{8bby^3 + 8bbccy}{2bb+2aa} + (4cc - 8aa)y = 0$, ſoit $\frac{8aay^3 - 16aabby + 8aacty - 16a^4y}{2bb+2aa} = 0$, ou $y^3 - 2bby + ccy - 2aay = 0$, qui a trois racines, $y = 0$, $y = +\sqrt{(2bb + 2aa - cc)}$, & $y = -\sqrt{(2bb + 2aa - cc)}$, ſoit $y = 0$, $y = +\sqrt{(aa + bb + rr)}$, $y = -\sqrt{(aa + bb + rr)}$, en mettant pour cc ſa valeur $aa + bb - rr$.

La prémiére racine $y = 0$, donne $x\left[= \frac{byy + bcc}{2bb+2aa}\right] = \frac{\frac{1}{2}bcc}{bb+aa}$, & ces valeurs d'$x$ & d'y miſes dans la propoſée, la changent en $\frac{4(bb+aa)\times\frac{1}{4}bbc^4}{(bb+aa)^2} - \frac{4bc^2\times\frac{1}{2}bcc}{bb+aa} + c^4 = c^4 - \frac{bbc^4}{bb+aa} = 0$, ſoit $aac^4 = 0$. Il y aura donc quelque Point multiple ſur l'Axe des abſciſſes AB, lorſque a, ou c, ſeront égaux à zéro.

Si $c = 0$, & par conſéquent $cc\,[= aa + bb - rr] = 0$, ou $aa + bb = rr$, ce qui revient à dire, ſi le Point A eſt pris ſur la circonférence du Cercle, [& pour cela il faut que la Droite AB coupe le Cercle, que CF ſoit moindre que le raïon CN;] alors l'équation ſera réduite à $y^4 - 4bxyy + 4rrxx - 4ayy = 0$. La Courbe repréſente en Fig. 148. quelque ſorte une beſace, les deux Ovales, dont elle étoit compoſée, venant ſe réunir à l'Origine A, où elles forment un Point double; ce que l'équation même de la Courbe manifeſte [§. 170].

Mais ſi $a = 0$, ſi la Droite AB paſſe par le centre C, l'équation propoſée ſe réduit à $y^4 - 4bxyy + 4bbxx + 2ccyy - 4bccx + c^4 = 0$. Cette grandeur eſt le quarré de $yy - 2bx + cc = 0$, qui repréſente une Courbe du

Pl. XIX. Fig. 143. ſecond Ordre, ſçavoir une Parabole MIM, dont l'ordonnée PM = AN [y] a ſon quarré égal au rectangle du Paramétre $2b$ [Aa] & de l'abſciſſe IP = AP — IA = $x - \frac{cc}{2b}$; en prenant AI moitié de AH [$\frac{cc}{b}$] troiſiéme proportionelle de AC [b] & de AG [c] = $\sqrt{(AC^2 - CG^2)} = \sqrt{(bb - rr)}$. Ch. X. §. 174.

Donc, à proprement parler, la ſuppoſition de $a = o$ ne donne pas de Points multiples : mais comme, au lieu de la ſimple équation à la Parabole, $yy - 2bx + cc = o$, elle préſente le quarré de cette équation ; on peut dire qu'elle exprime deux Paraboles égales & ſemblables, exactement couchées l'une ſur l'autre, & dont tous les Points ſont, en quelque ſorte, Points doubles. En effet, ſi on cherche le prémier Rang de l'équation transformée de $y^4 - 4bxyy + 4bbxx + 2ccyy - 4bccx + c^4 = o$, on trouvera $(4y^3 - 8bxy + 4ccy)u + (-4byy + 8bbx - 4bcc)z$, dont les deux termes s'évanouiſſent dès qu'on prend des valeurs de x & de y qui font évanouïr le terme de la Pointe, c'eſt-à-dire, la propoſée. Car la propoſée eſt le quarré de $yy - 2bx + cc$, le coëfficient d'u eſt cette même grandeur multipliée par $4y$, & le coëfficient de z, cette même grandeur multipliée par $-4b$. Donc ces trois termes s'évanouiſſent en même tems ; c'eſt-à-dire, que tout Point de cette Courbe eſt un Point double [§. 171].

Les deux autres racines $y = \pm\sqrt{(2aa + 2bb - cc)}$ de l'éq : $y^3 - 2bby - 2aay + ccy = o$, donnent, l'une & l'autre, $x \left[= \frac{byy + bcc}{2aa + 2bb}\right] = \frac{2aab + 2b^3}{2aa + 2bb} = b$. Ces valeurs d'$x$ & d'y, ſubſtituées dans la propoſée, la réduiſent à $-4a^4 - 4aabb + 4aacc = o$, ou $-4aarr = o$. Il y aura donc, lorſque a ou r ſeront $= o$, des Points multi-

CH. X. §. 174. multiples ſur la Droite indéfinie CF abaiſſée perpendiculairement ſur AB du centre C. PL. XIX. Fig. 141.

La ſuppoſition d'$a = 0$ donne, comme on vient de le voir, l'équation quarrée d'une Parabole, dont tous les Points, & par conſéquent ceux qui ſe trouvent ſur la Droite CF, ſont Points doubles.

Mais la ſuppoſition de $r = 0$, ne change rien à l'équation de la Courbe. Seulement cc, qui étoit $= aa + bb - rr$, vaut préſentement $aa + bb$. Si on met cette valeur au lieu de cc, l'équation ſera $y^4 - 4bxyy - 2(aa - bb)yy + 4(aa + bb)x^2 - 4(aa + bb)bx + (aa + bb)^2 = 0$.

Cette équation ſemble repréſenter une Courbe. Il eſt pourtant clair par la Conſtruction, qu'elle n'exprime que deux Points détachez M, m. Car, quand le raïon $r = 0$, le Cercle ſe réduit au Point C, qui étoit ſon centre, & toute la Courbe ſe réduit aux Points M, m, déterminez en prenant FM = AC = Fm. Et c'eſt auſſi ce qu'on peut déduire de l'éq : $y^4 - 4bxyy - 2(aa - bb)yy + 4(aa + bb)xx - 4(aa + bb)bx + (aa + bb)^2 = 0$. Si on la réſout comme une équation du 2e. dégré, on trouvera $yy - 2bx - aa + bb = \pm 2a(x - b)\sqrt{-1}$: ce qui marque que toutes les abſciſſes ont des ordonnées imaginaires, hors l'abſciſſe $x = b$; parce que celle-là ſeule rend zéro la grandeur $x - b$, qui multiplie la quantité imaginaire $\sqrt{-1}$. Fig. 144.

On peut donc regarder l'éq : $y^4 - 4bxyy - 2(aa - bb)yy + 4(aa + bb)xx - 4(aa + bb)bx + (aa + bb)^2 = 0$ comme réductible en ces deux $yy - 2(b + a\sqrt{-1})x + (b + a\sqrt{-1})^2 = 0$ & $yy - 2(b - a\sqrt{-1})x + (b - a\sqrt{-1})^2 = 0$, ou $yy - 2fx + ff = 0$, & $yy - 2gx + gg = 0$, en faiſant $f = b + a\sqrt{-1}$ & $g = b - a\sqrt{-1}$. Ces équations déſignent deux Paraboles, qui ſont, à la vérité, imaginaires, puiſque les grandeurs f & g ſont

Pl. XIX. Fig. 144. g ſont imaginaires ; mais qui ſont pourtant cenſées ſe couper en M & m. Car elles ſont cenſées ſe couper aux Points où elles ont une même abſciſſe & une même ordonnée. Or à l'abſciſſe commune $x = b$, les ordonnées de l'une ſont $\pm\sqrt{(2bf - ff)} = \pm\sqrt{(f(2b - f))} = \pm\sqrt{((b + a\sqrt{-1})(b - a\sqrt{-1}))} = \sqrt{(bb + aa)}$, celles de l'autre ſont $\pm\sqrt{(2bg - gg)} = \pm\sqrt{(g(2b - g))} = \pm\sqrt{((b - a\sqrt{-1})(b + a\sqrt{-1}))} = \sqrt{(bb + aa)}$. Ainſi ces deux Paraboles imaginaires ſont cenſées ſe rencontrer aux Points M, m, où elles ont une même abſciſſe $AF = b$, & des ordonnées égales $FM = +\sqrt{(bb + aa)}$, $Fm = -\sqrt{(bb + aa)}$. De cette maniére, à ces Points M, m, ce qu'il y a d'imaginaire dans une de ces Paraboles eſt rendu réel par ce qu'il y a d'imaginaire dans l'autre. Ch. X. §. 174.

Exemple VI. On demande quelles ſont les Lignes du ſecond Ordre qui ont des Points doubles ?

L'équation générale des Lignes du 2e. Ordre eſt $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$. Si on ſubſtituë $x + z$ à x & $y + u$ à y, la transformée ſera

$$\left.\begin{array}{c} a + by + cx + dyy + exy + fxx \\ + (b + 2dy + ex)u + (c + ey + 2fx)z \\ + (d)uu + (e)uz + (f)zz \end{array}\right\} = 0$$

Si le Point de l'Origine eſt un Point double, les deux prémiéres lignes de cette équation s'évanouiſſent [§. 170]. Donc toute l'équation eſt réduite à $duu + euz + fzz = 0$, qui ſe peut décompoſer en ces deux, $u\sqrt{d} + z\sqrt{\alpha} = 0$, $u\sqrt{d} + z\sqrt{\beta} = 0$ [où $\sqrt{\alpha} = \frac{e + \sqrt{(ee - 4df)}}{2\sqrt{d}}$ & $\sqrt{\beta} = \frac{e - \sqrt{(ee - 4df)}}{2\sqrt{d}}$]. Ces deux équations, ſi $\sqrt{\alpha}$ & $\sqrt{\beta}$

ne

CH. X. §. 174. ne ſont pas imaginaires, repréſentent deux Droites qui paſſent par l'Origine. Donc la ſeule Ligne du ſecond Ordre qui ait un Point double eſt le Syſtême de deux Droites qui ſe coupent en un Point, auquel on prend l'Origine des z & des u. Aucune Courbe du ſecond Ordre ne peut donc avoir de Points doubles; mais tous leurs Points ſont ſimples. PL. XIX.

De même, ſi l'on cherche quelles Lignes du 3e. Ordre ont des Points triples; on trouvera, qu'après la ſubſtitution de $x+z$ à x, & de $y+u$ à y, & ſuppoſant que les trois prémiéres lignes de la transformée diſparoiſſent [§. 171], elle eſt réduite au ſeul troiſiéme Rang, qui fait une équation, $gu^3+huuz+iuzz+lz^3=0$, réductible en trois autres de cette forme $u\sqrt{g}+z\sqrt{\alpha}=0$, $u\sqrt{g}+z\sqrt{\beta}=0$, $u\sqrt{g}+z\sqrt{\gamma}=0$, qui repréſente trois Droites qui ſe coupent en un même Point, ſur lequel on a porté l'Origine des u & des z. Donc la ſeule Ligne du 3e Ordre qui puiſſe avoir un Point triple eſt le Syſtême de trois Droites qui ſe croiſent en un Point. Les Courbes de cet Ordre ne peuvent donc avoir aucun Point triple.

On prouvera de même que les Courbes du 4e. Ordre ne peuvent avoir aucun Point quadruple; & en général qu'une Courbe d'un Ordre quelconque ne ſauroit avoir des Points dont la multiplicité ait le même expoſant que l'Ordre de la Courbe.

175. CELA ſe prouve auſſi par ce Principe [§. 39], Qu'une Droite ne peut rencontrer une Courbe en plus de Points qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de ſon Ordre. Car ſi une Courbe de l'Ordre v avoit un Point dont la multiplicité fut du dégré v, toute Droite qui paſſeroit par ce Point-là ſeroit cenſée rencontrer la Courbe en v points [§. 169]. Donc une Droite, qui paſſeroit par ce Point-là & par un autre Point quelconque de la Courbe, ſeroit cenſée

PL. XIX. censée la rencontrer au moins en $v+1$ points; ce qui est impossible. Il est donc impossible qu'une Courbe de l'Ordre v ait un Point multiple du dégré v. CH. X. §. 175.

176. Il suit de ce même Principe, Qu'une Courbe du 3e. Ordre qui a un Point double, ou une Courbe du 4e. Ordre qui a un Point triple, ou, en général, une Courbe de l'ordre v qui a un Point multiple du dégré $v-1$, ne peut avoir aucun autre Point multiple; pas même double. Car si elle l'avoit, la Droite menée par ces deux Points, seroit censée rencontrer la Courbe, au moins, en $(v-1)+2=v+1$ Points [§. 169]: ce qui est impossible, la Courbe n'étant que de l'Ordre v [§. 39].

177. Il suit encore, Qu'une Courbe du 5e. Ordre ne peut avoir deux Points triples; ni une Courbe du 6e. ou du 7e. Ordre, deux Points quadruples, &c. ni en général, une Courbe de l'ordre $2v-1$ deux Points multiples du dégré v. Car la Droite qui passeroit par ces deux Points seroit censée rencontrer la Courbe en $2v$ Points au moins [§. 169]; ce qui ne se peut, la Courbe n'étant que de l'Ordre $2v-1$ [§. 39]. Plus généralement, une Courbe de l'Ordre v, ou d'un Ordre inférieur, ne peut avoir deux Points multiples, de dégrés tels que leurs exposants ensemble fassent un nombre plus grand que v.

178. Si l'on considére, Qu'on peut toûjours faire passer une Courbe du 2e. Ordre par cinq Points donnés [§. 38], & qu'une Courbe du 2e Ordre ne peut rencontrer une Courbe de l'Ordre v en plus de $2v$ Points, [§. 46], on conclura, Qu'une Courbe de l'Ordre v ne peut avoir cinq Points, dont les dégrés de multiplicité fassent ensemble plus de $2v$ unités.

D'où

Digitized by Google

CH. X. §. 178. PL. XIX.

D'où il ſuit, Qu'une Courbe du 4e. Ordre ne peut avoir quatre Points doubles. Car la Courbe du 2e. Ordre, qui paſſeroit par ces quatre Points doubles & par un cinquiéme Point ſimple de la Courbe du 4e. Ordre, ſeroit cenſée la rencontrer neuf fois ; ce qui eſt impoſſible, puiſqu'elle ne la peut rencontrer qu'en huit Points.

Et par la même raiſon, Qu'une Courbe du 5e. Ordre, qui ne peut avoir qu'un Point triple [§. 176], ne peut avoir avec ce Point triple plus de trois Points doubles.

Qu'une Courbe du 6e. Ordre ne peut avoir quatre Points triples, ni même trois Points triples & deux doubles.

Qu'une Courbe du 7e. Ordre ne peut avoir cinq Points triples, ni un Point quadruple avec trois triples & quelque autre multiple, &c.

179. De ce qu'on peut toûjours faire paſſer une Ligne du 3e. Ordre par neuf Points donnés [§. 38], & de ce qu'une Courbe du 3e. Ordre ne peut rencontrer une Courbe de l'Ordre v en plus de $3v$ Points [§. 46] : il ſuit qu'une Courbe de l'Ordre v ne peut avoir neuf Points, dont les dégrés de multiplicité faſſent enſemble un nombre plus grand que $3v$. D'où l'on déduira,

Qu'une Courbe du 5e. Ordre ne peut avoir plus de ſix Points doubles.

Qu'une Courbe du 6e. Ordre, qui ne peut avoir deux Points quadruples, ne peut avoir, avec un Point quadruple, plus de ſix Points doubles ; ni, avec deux Points triples, plus de cinq Points doubles ; ni même, avec un Point triple, plus de ſept doubles.

Qu'une Courbe du 7^e^. Ordre ne peut avoir, avec un Point quadruple & deux Points triples, plus de quatre Points doubles ; ni avec quatre Points triples, plus de quatre Points doubles ; &c.

Pl. XIX. 180. On tirera des Concluſions ſemblables de ce qu'une Ligne du 4^e^. Ordre, qu'on peut toûjours faire paſſer par quatorze Points [§. 38], ne peut rencontrer une Ligne de l'Ordre v qu'en $4v$ Points [§. 46]; de ce qu'une Ligne du 5e. Ordre, qu'on peut toûjours faire paſſer par vingt Points, ne ſauroit rencontrer une Ligne de l'Ordre v, qu'en $5v$ Points, &c. Ch. X. §. 180.

Le réſultat de toutes ces Concluſions, pour les huit prémiers Ordres des Courbes, ſe trouve dans la Table ſuivante, où chaque colomne marque le plus grand nombre de différens Points multiples qu'une Courbe puiſſe avoir. On y voit, par ex. qu'une Courbe du 5e. Ordre ne peut avoir que, ou 1 Point quadruple, ou 1 Point triple & 3 doubles, ou 6 Points doubles. Mais il faut remarquer qu'abſolument parlant, ces Concluſions ne ſont que négatives. Ainſi la derniére colomne indiquant qu'une Courbe du 8e. Ordre ne peut avoir plus de 21 Points doubles, il ne s'enſuit pas qu'elle en puiſſe avoir ce nombre. Car la preuve que nous employons ne prouve que l'impoſſibilité d'aller au-delà, & non la poſſibilité d'aller juſques-là. Cependant, comme l'expérience fait voir, dans les Ordres inférieurs, que les Points multiples des Courbes peuvent aller juſqu'aux bornes qui leur ſont aſſignées dans cette Table; il en réſulte un Préjugé bien légitime pour conclure qu'il en eſt de même dans les Ordres ſupérieurs.

Les Courbes du ſecond Ordre
ne peuvent avoir que des Points ſimples.
Les Courbes du troiſiéme Ordre
ne peuvent avoir que 1 ſeul Point double.

Les

Ch. X. §. 180.

Les Courbes du quatriéme Ordre peuvent avoir Pl. XIX.

1	Point triple
. 3	Points doubles.

Les Courbes du cinquiéme Ordre peuvent avoir

1	.	Point quadruple
. 1	.	—— triple
. 3	6	—— doubles.

Les Courbes du ſixiéme Ordre peuvent avoir

1	.	.	.	.	Point quintuple
. 1	.	.	.	.	—— quadruple
. . 3	2	1	.	—— triples	
. 6 1	5	7	10	—— doubles.	

Les Courbes du ſeptiéme Ordre peuvent avoir

1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Point ſextuple
. 1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	—— quintuple
. . 1	1	1	1	.	.	.	.	.	—— quadruple	
. . 3	2	1	.	4	3	2	1	.	—— triples	
. 10 .	4	9	11	4	8	10	12	15	—— doubles.	

Les Courbes du huitiéme Ordre peuvent avoir

1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	Point ſeptuple
. 1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— ſextuple
. . 1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— quintuple
. . .	.	.	3	3	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	— quadruples
. . 3	2	1	.	1	.	2	1	.	6	5	4	3	2	1	.	7	6	5	4	3	2	1	.	— triples
. 15	8	10	14	16	.	9	8	10	14	.	2	7	9	13	15	17	1	6	8	12	14	16	18	21	— doubles.

CHAPITRE XI.

De la Méthode des Tangentes. Des Points d'Inflexion &c. Des plus grandes & des plus petites abſciſſes ou ordonnées, &c.

PL. XIX. 181. VENONS maintenant aux moyens de diſtinguer les différentes eſpèces de Points, ſimples ou multiples, qui peuvent ſe trouver ſur une Courbe dont l'équation eſt donnée. C'eſt prémiérement par leurs Tangentes qu'on les diſcerne; parce que la Tangente indique la direction d'une Courbe dans le point où elle la touche. Le caractére propre de la Tangente c'eſt de rencontrer la Branche qu'elle touche en deux ou pluſieurs Points coïncidens, ou infiniment proches l'un de l'autre [§. 162]. Ainſi la Tangente d'un Point ſimple y rencontre la Courbe deux fois, ſi ce Point eſt ſans Inflexion; trois fois, ſi c'eſt un Point d'Inflexion ſimple; quatre fois, ſi c'eſt un Point d'Inflexion double, ou de Serpentement; cinq fois, ſi c'eſt un Point de triple Inflexion, &c. [§. 163 & ſuiv.].

La Tangente d'un Point double eſt cenſée y rencontrer la Courbe, au moins trois fois; ſçav. deux fois la Branche qu'elle touche, & une fois la Branche qu'elle coupe. Elle peut être cenſée y rencontrer la Courbe plus ſouvent, 1°. Quand la Branche touchée ſubit une Inflexion ſimple, ou multiple, au point d'attouchement. Si le dégré de cette Inflexion eſt t, $t+2$ eſt le nombre de fois que la Tangente eſt cenſée rencontrer cette Branche, & comme elle rencontre une fois la Branche qu'elle ne touche pas, la Tangente eſt cenſée rencontrer $t+3$ fois

CH. XI. §. 181. fois la Courbe au Point double. 2°. Quand les deux Branches ſe touchent l'une l'autre. Alors la Tangente de l'une eſt auſſi Tangente de l'autre : elle eſt donc cenſée rencontrer la Courbe au moins quatre fois. PL. XIX.

La Tangente d'un Point triple eſt cenſée y rencontrer la Courbe au moins quatre fois : deux fois, la Branche qu'elle touche, & une fois chaque Branche qu'elle coupe. Mais ſi la Branche touchée ſubit, au Point de contact, une Inflexion ; ou ſi les Branches qui paſſent par le Point triple s'y touchent les unes les autres, la Tangente du Point triple eſt cenſée y rencontrer la Courbe plus de quatre fois.

Et il en eſt de même, en général, des Tangentes des Points multiples.

182. Un Point d'une Courbe étant pris pour l'Origine, & l'équation de la Courbe étant donnée rélativement à cette Origine, on trouvera la Tangente, ou les Tangentes de ce Point, [car s'il eſt multiple, il en a pluſieurs, & réguliérement il en a autant qu'il y a de Branches qui paſſent par ce Point-là], en donnant à l'Axe des ordonnées une poſition indéterminée, comme on l'a fait au §. 170 ; c'eſt-à-dire, en ſubſtituant dans l'équation de la Courbe, ru pour x & su pour y. Alors le terme de l'éq : $a+(bs+cr)u+(ds^2+esr+fr^2)u^2+(gs^3+hssr+isrr+lr^3)u^3$ &c. $=0$, qui reſte le prémier, marque par l'expoſant de u, combien de fois une Droite quelconque, paſſant par l'Origine, rencontre la Courbe en ce Point-là ; ce qui fait connoître la ſimplicité ou multiplicité de ce Point [§. 170]. Mais la Tangente rencontre la Courbe en ce Point au moins une fois de plus qu'une Droite quelconque [§. *préc.*]. Donc lorſque la Droite indéterminée, qui paſſe par l'Origine, eſt déterminée à être Tangente, l'éq : $a+(bs+cr)u+$ &c. $=0$, aura,

Pl. XIX. au moins, une racine $u = 0$ de plus que pour toute autre position de cette Droite. Il manquera donc à l'équation $a + (bs + cr)u \&c = 0$, un terme de plus au commencement. Ainſi, pour déterminer la Tangente, on égalera à zéro le terme de l'éq: $a + (bs + cr)u \&c = 0$, qui par l'évanouiſſement des autres ſe trouve le prémier; & cette Egalité déterminera le raport, ou les raports, de s à r, qui fixent la poſition de la Tangente, ou des Tangentes. Ch. XI. §. 181.

Les termes de l'éq: $a + (bs + cr)u \&c = 0$ ne ſont autre choſe que les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe miſe ſur le Triangle analytique, dans laquelle on a changé x en r & y en s. On peut donc dire, en conſervant x pour r & y pour s, que pour avoir la Tangente, ou les Tangentes, du Point qui eſt l'Origine, il faut égaler à zéro le plus bas des Rangs horizontaux de l'équation miſe ſur le Triangle analytique, & conſtruire la Droite, ou les Droites, repréſentées par cette équation. Elles ſeront la Tangente, ou les Tangentes requiſes *.

183. On voit, en général, qu'on aura autant de Tangentes qu'il y a de Branches qui paſſent par l'Origine, c'eſt-à-dire, autant qu'il y a d'unités dans le dégré de la multiplicité de ce Point. Si le Point, qui eſt à l'Origine, eſt un Point ſimple, le plus bas Rang de l'équation ſera le prémier Rang [§. 170], & ce Rang égalé à zéro donne, pour déterminer la Tangente, l'éq: $by + cx = 0$, qui ne repréſente qu'une ſeule Droite. Auſſi un Point ſimple n'a qu'une ſeule Tangente. Si le Point de l'Origine eſt un Point double, le ſecond Rang eſt le plus bas de l'équation. Egalé à zéro, il donne l'éq: du ſecond dégré

* *Uſage de l'Anal.* pag. 93.

Digitized by Google

CH. XI. §. 183. PL. XIX.

gré $dyy+exy+fxx=0$, qui a deux racines $y\sqrt{d}+\frac{e+\sqrt{(ee-4df)}}{2\sqrt{d}}x=0$, & $y\sqrt{d}+\frac{e-\sqrt{(ee-4df)}}{2\sqrt{d}}x=0$.

Ces racines peuvent exprimer deux Droites qui paſſent par l'Origine, & qui ſeront les deux Tangentes du Point double. En général, le Point qui eſt à l'Origine étant d'une multiplicité dont le dégré eſt t, les Rangs inférieurs manquent dans l'équation juſqu'au Rang t, qui égalé à zéro, donne une éq: $gy^t+hxy^{t-1}+\ldots.+lx^t=0$, du dégré t, qui peut ſe réſoudre en t racines du prémier dégré, telles que $Ay+\alpha x=0$, $By+\beta x=0$, $Cy+\gamma x=0$, &c. Chacune de ces équations repréſente une Droite qui paſſe par l'Origine [§. 40]. Et ces Droites ſont autant de Tangentes du Point multiple. Il en doit avoir ce nombre-là, parce qu'il eſt le concours de t Branches qui peuvent avoir chacune ſa Tangente. On verra, dans la ſuite, les exceptions que font à cette Régle les racines égales & les racines imaginaires.

184. On remarquera en paſſant, parce que c'eſt un Cas fort commun, que quand l'équation qui détermine les Tangentes a une racine $y=0$, l'Axe des abſciſſes touche la Courbe, cet Axe étant repréſenté par l'éq: $y=0$ [§. 40, 111.], & qu'au contraire la Courbe eſt touchée par l'Axe des ordonnées, quand l'*équation tangentielle* a une racine $x=0$, qui repréſente cet Axe. Or l'équation tangentielle a une racine $y=0$, quand il manque au plus bas Rang le terme ſans y, & elle a une racine $x=0$, quand il manque à ce Rang le terme ſans x. Donc l'abſence du terme ſans y, ou du terme ſans x, dans le plus bas Rang de l'équation, fait voir qne la Courbe touche l'Axe des abſciſſes, ou celui des ordonnées, à ſon Origine.

185. Les

PL. XIX. 185. Les autres racines, telles que $Ay + \alpha x = 0$, de l'équation tangentielle, ſe conſtruiſent, 1°. Ou en donnant à l'abſciſſe A une ordonnée $-\alpha$, & menant par l'Origine & l'extrémité de cette ordonnée, une Droite, qui ſera la Tangente déſignée par l'éq : $Ay + \alpha x = 0$. [§. 40. 11]. CH. XI. §. 185.

2°. Ou en donnant à l'ordonnée α une abſciſſe $-A$, & menant une Droite par l'Origine & par l'extrémité de cette abſciſſe.

3°. Ou en prenant une abſciſſe égale à A, & une ordonnée égale à α, ou ſeulement une abſciſſe & une ordonnée proportionelles à A & α, joignant leurs extrémités par une Droite, & lui menant par l'Origine une parallèle.

On peut auſſi, ſi l'on aime mieux, ou ſi cela fournit une équation plus commode, mener la perpendiculaire à la Courbe, c'eſt-à-dire, à la Tangente de la Courbe, en conſtruiſant l'éq : $\alpha y + Ax = 0$. Car il eſt aiſé de voir que, ſuppoſant les coordonnées perpendiculaires l'une à l'autre, les Droites repréſentées par les éq : $Ay + \alpha x = 0$, & $\alpha y + Ax = 0$ ſont auſſi perpendiculaires l'une à l'autre. Or cette éq : $\alpha y + Ax = 0$ ſe conſtruit, 1°. ou en donnant à l'abſciſſe α l'ordonnée $-A$. 2°. Ou en donnant à l'ordonnée A l'abſciſſe $-\alpha$. 3°. Ou en menant par l'Origine une parallèle à la Droite qui paſſe par l'extrémité de l'abſciſſe α & de l'ordonnée A [§. 40, 11].

Exemple I. On demande quelle eſt la poſition de la Droite, qui touche à l'Origine la Courbe repréſentée par l'éq : $yy + xx + by - cx = 0$.

Cette équation étant miſe ſur le Tr : anal : ſon plus bas Rang eſt le prémier, qui égalé à zéro donne $by - cx = 0$.

Digitized by Google

CH. XI §. 185. $= o$. On prendra donc l'abſciſſe $AE = b$, & on lui donnera l'ordonnée $EF = c$; ou bien on donnera à l'ordonnée $AG = -c$, l'abſciſſe $GH = -b$, & la Droite FAH menée par l'Origine A, & par le Point F, ou par le Point H, ſera la Tangente requiſe. On peut auſſi prendre l'abſciſſe $AE = b$, & l'ordonnée $AG = -c$, & la Droite AF, menée par l'Origine A parallèlement à EG, eſt la Tangente requiſe. PL. XIX. Fig. 145.

La Courbe ABDA repréſentée par l'éq : $yy + xx + by - cx = o$ eſt un Cercle décrit ſur la chorde $AB = c$, du centre C éloigné de cette chorde de l'intervalle $CK = \frac{1}{2}b$. Car l'éq : $uu + zz = \frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb$, qui exprime le raport des coordonnées CP [u], PM [z], & du raïon $CA = \sqrt{(CK^2 + KA^2)} = \sqrt{(\frac{1}{4}cc + \frac{1}{4}bb)}$, ſe transforme en $yy + xx + by - cx = o$, par la ſubſtitution de $x - \frac{1}{2}c$ [AE — AK = EK] au lieu de z [CP], & de $y + \frac{1}{2}b$ [ME + CK = ME + EP] au lieu de u [MP]. Il eſt donc aiſé de voir, dans cet Exemple, que la Conſtruction s'acorde avec ce qu'on démontre dans les Elemens de la Géométrie, que la Tangente du Cercle eſt perpendiculaire au raïon. Car $CK [\frac{1}{2}b] : KA [\frac{1}{2}c] = AE [b] : EF [c]$. Donc les triangles rectangles CAK, FAE ſont ſemblables, & les angles CAK, AFE ſont égaux. Mais AFE & FAE valent enſemble un angle droit. Donc les angles CAK, FAE enſemble, ou l'angle CAF ſeul, eſt un angle droit. La Tangente AF eſt donc perpendiculaire au raïon AC.

Cela s'acorde auſſi très bien avec la Conſtruction indiquée [§. *préc.*] pour mener la Perpendiculaire à la Courbe. Elle veut qu'à l'abſciſſe $AB = c$ on donne l'ordonnée $BD = -b$, & qu'on mène la Droite AD. Les triangles ſemblables AKC, ABD font voir que AD eſt un Diamétre.

Pl. XIX. *Exemple II.* On demande quelle eſt la poſition de la Tangente de la Courbe repréſentée par l'éq : $yyxx + x^4 - 2ax^3 - 2axyy + aayy + (aa - bb)xx = 0$. Ch. XI. §. 185.

Fig. 139. Cette Courbe eſt la Conchoïde, l'Origine ayant été priſe au Pole P. Si on la place ſur le Tr : anal : on verra que la Pointe & le prémier Rang reſtent vuides. Le ſecond, qui eſt le plus bas, étant donc égalé à zéro,

o o * o *
o * o *
* o *
o o
o

donne l'éq : $aayy + (aa - bb)xx = 0$, qui ſe réſoud en ces deux $ay + x\sqrt{(bb - aa)} = 0$, & $ay - x\sqrt{(bb - aa)} = 0$, leſquelles ſe conſtruiſent en donnant à l'abſciſſe PC $= a$ les ordonnées $CG = +\sqrt{(bb - aa)}$ & $Cg = -\sqrt{(bb - aa)}$. Or cela s'exécute ſans peine, en décrivant du centre P, avec un raïon $PG = Pg = b = CD$, une circonférence qui coupe la Règle en G & g. Les Droites PG, Pg ſont les Tangentes des deux Branches qui ſe croiſent au Pole P.

Exemple III. Quelles ſont, à l'Origine, les Tangentes de la Courbe dont l'équation eſt $y^4 - 2y^2x^2 + x^4 + 2ay^2x - 5ax^3 = 0$? C'eſt celle dont nous avons déterminé les Aſymptotes au §. 143, *Ex. III.*

Le plus bas Rang de cette équation miſe ſur le Triang:

* o * o *
o * o *
o o o
o o
o

anal:

Digitized by Google

Ch. XI. anal: eſt le troiſiéme, qui, étant égalé à zéro, donne Pl. XIX.
§. 185. $2ay^2x - 5ax^3 = 0$. Cette équation tangentielle a trois racines $x = 0$, $y\sqrt{2} - x\sqrt{5} = 0$, $y\sqrt{2} + x\sqrt{5} = 0$. Le Point triple de l'Origine a donc trois Tangentes différentes. La prémiére eſt l'Axe des ordonnées indiqué par la racine $x = 0$. Les deux autres, marquées par les deux autres racines, ſe déterminent en donnant à l'abſciſſe $\sqrt{2}$ les ordonnées $+\sqrt{5}$ & $-\sqrt{5}$, & menant dès l'Origine des Droites aux extrémités de ces ordonnées.

186. Si le raport de x à y, ou plûtôt de r à s, qui détermine la poſition d'une Tangente, fait évanouir, dans l'éq: $a + (bs + cr)u + (dss + esr + frr)uu$ &c $= 0$, non ſeulement le terme qui ſe trouve être le prémier [§. 182], mais encore un ou pluſieurs des termes ſuivants: c'eſt une marque que la Tangente rencontre la Courbe à l'Origine en deux, ou un plus grand nombre de Points, qu'une Droite quelconque. Donc, ſi le Point eſt ſimple, la Courbe y ſubit une Inflexion, ſimple ou multiple. Si le Point eſt multiple; il ſe peut faire que la Branche touchée y ſubiſſe quelque Inflexion: mais il ſe peut bien auſſi que deux ou pluſieurs Branches ſe touchent en ce Point-là [§. 181]. Mais ces Cas ſont faciles à diſcerner, parce que pluſieurs Branches qui ſe touchent n'ont qu'une Tangente commune. Donc, lors que l'équation tangentielle donne autant de Tangentes qu'il y a de Branches qui paſſent par un Point multiple, on voit que ces Branches ne ſe touchent pas. Si une de ces Tangentes rencontre ſa Branche plus de deux fois à l'Origine, il faut que cette Branche ait quelque Inflexion au point de contact.

Le dégré de cette Inflexion ſe connoit par le nombre des termes au-delà du prémier, que fait évanouir le raport de r à s, déterminé en égalant ce prémier terme à zéro. S'il n'en fait évanouir qu'un, c'eſt une Inflexion

Pl. XIX. ſimple, & la Tangente eſt en même tems Sécante [§. 163]. Ch. XI. §. 116. S'il diſparoit deux termes après le prémier, le Point touché eſt un Point de Serpentement [§. 163], & ainſi de ſuite. De ſorte que la Tangente coupe la Courbe, ſi le nombre des termes, qui s'évanouiſſent au-delà du prémier, eſt impair; elle ne la coupe pas, ſi ce nombre eſt pair.

On voit ici, comme au §. 182, que les termes de l'éq : $a + (bs + cr)u + \&c = 0$ ſont les Rangs horizontaux de l'équation de la Courbe miſe ſur le Tr: anal: & transformée par la ſubſtitution de r à x & de s à y. C'eſt donc par le nombre des Rangs ſupérieurs au plus bas Rang, que fait évanouir la ſubſtitution d'une des racines de l'équation tangentielle, qu'on juge du dégré d'Inflexion que ſubit, au Point d'attouchement, la Branche touchée par la Droite que déſigne cette racine. Les Rangs, que la ſubſtitution d'une racine fait évanouir étant diviſibles par cette racine; on examinera, en remontant de Rang en Rang, combien de Rangs, ſupérieurs au plus bas, peut diviſer chaque racine de l'équation tangentielle; & par le nombre de ces Rangs on connoitra le dégré de l'Inflexion de chaque Branche de la Courbe, à l'Origine *.

Exemple I. On demande la nature du Point ſitué à l'Origine de la Courbe repréſentée par l'éq : $x^3 - axy - bby = 0$. C'eſt une des eſpèces du *Trident* défini au §. 155, *Cas* IV, 2. Fig. 146.

Cette équation a trois Rangs, chacun d'un ſeul Terme. Le plus bas eſt le prémier Rang. Donc l'Origine eſt un Point ſimple [§. 170]. Egalé à zéro, il donne l'éq : $-bby = 0$, qui n'a qu'une ſeule racine $y = 0$. Donc la Tangente eſt l'Axe des abſciſſes [§. 184]. Cette racine ſubſtituée dans le ſecond Rang, $-axy$, le fait diſparoitre.

* *Uſage de l'Anal.* pag. 116.

Digitized by Google

Ch. XI. §. 186. paroitre. Donc le Point, qui eſt à l'Origine, eſt un Point d'Inflexion. Mais le troiſiéme Rang, x^3, ne diſparoit pas. C'eſt donc un Point d'Inflexion ſimple. Pl. XIX.

Exemple II. On propoſe l'éq : $x^2y + bxy - ax^2 + aby - aax = 0$, & l'on demande la nature du Point qui eſt à l'Origine de la Courbe qu'elle repréſente. Fig. 147.

Le Rang le plus bas eſt le prémier Rang, $aby - aax$, qui égalé à zéro, donne $by - ax = 0$; ce qui fait voir que le Point de l'Origine eſt un Point ſimple, dont la Tangente eſt la Droite, qui fait, avec les abſciſſes & les ordonnées, des angles dont les Sinus ſont entr'eux comme a & b. Si l'on ſubſtituë, dans le ſecond Rang $bxy - ax^2$, au lieu d'y ſa valeur $\frac{ax}{b}$, priſe dans l'éq : $by - ax = 0$, on le réduira à $axx - axx$, ou zéro. Ou, ce qui revient au même, on voit que le ſecond Rang $bxy - axx$ eſt diviſible par le prémier $aby - aax$, le quotient étant $\frac{x}{a}$. Donc la Courbe a un Point d'Inflexion à l'Origine. Mais c'eſt une Inflexion ſimple. Car le prémier Rang $aby - aax$, qui diviſe le ſecond $bxy - axx$, ne diviſe pas le troiſiéme xyy.

Exemple III. Il s'agit de la Courbe repréſentée par l'éq : $xxy - aby + a^2x = 0$. Pl. XX. Fig. 148.

Le prémier Rang, qui eſt le plus bas, égalé à zéro, donne $aby - aax = 0$, ou $by - ax = 0$: ce qui détermine la Tangente [§. 185]. Et comme, indépendamment de toute ſubſtitution, le ſecond Rang manque ; le Point de l'Origine eſt un Point d'Inflexion, mais d'Inflexion ſimple, puiſque le troiſiéme Rang n'eſt pas diviſible par la racine $by - ax = 0$ du prémier.

Digitized by Google

Pl. XX. Fig. 149. *Exemple IV.* On propoſe la Courbe exprimée par l'éq : $y^4 + 2xxyy + x^4 - 4ay^3 - 4axxy + 8aayy - 8a^3y = 0$. Ch. XI. §. 186.

Le prémier Rang, $-8a^3y$, égalé à zéro, donne $y = 0$. Donc l'Axe des abſciſſes touche la Courbe à l'Origine [§. 184], qui eſt un Point ſimple [§. 170]. Cette valeur d'y, ſubſtituée dans les Rangs ſupérieurs, fait diſparoitre le ſecond, $+8aayy$, & le troiſiéme, $-4ay^3 - 4axxy$, mais non le quatriéme $y^4 + 2xxyy + x^4$. Le Point en queſtion eſt donc un Point de double Inflexion, ou de Serpentement.

Exemple V. Quel eſt le Point ſitué à l'Origine de
Fig. 150. la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4 - aayy + aaxx = 0$?

Le plus bas Rang eſt le ſecond. L'Origine eſt donc un Point double. Egalé à zéro, il donne $yy - xx = 0$, réductible en ces deux équations $y - x = 0$, $y + x = 0$. Il y a donc deux Tangentes qui partagent chacune en deux également l'angle des coordonnées. Le troiſiéme Rang manque, indépendamment de toute ſubſtitution. Mais les valeurs d'y, ſç. $+x$, ou $-x$, ſubſtituées dans le quatriéme Rang, ne le font pas diſparoitre. Donc l'une & l'autre des deux Branches, qui ſe croiſent à l'Origine, y ſubit une Inflexion ſimple.

Exemple VI. On propoſe l'éq : $x^4 - 2ax^3\sqrt{2} + 2aaxx - ay^3 - aayy = 0$, & l'on demande la nature du
Fig. 151. Point qui eſt à l'Origine de la Courbe qu'elle repréſente.

Puiſque le plus bas Rang eſt le ſecond, ce Point eſt un Point double. L'éq : $2aaxx - aayy = 0$, qui détermine ſes Tangentes, eſt réductible en ces deux, $x\sqrt{2} - y = 0$, $x\sqrt{2} + y = 0$. On aura donc les Tangentes AM, AN des deux Branches, en donnant à l'ordonnée AQ $= \sqrt{2}$, les abſciſſes QM $= 1$, QN $= -1$. La prémié-

re

Digitized by Google

Fig. 140.

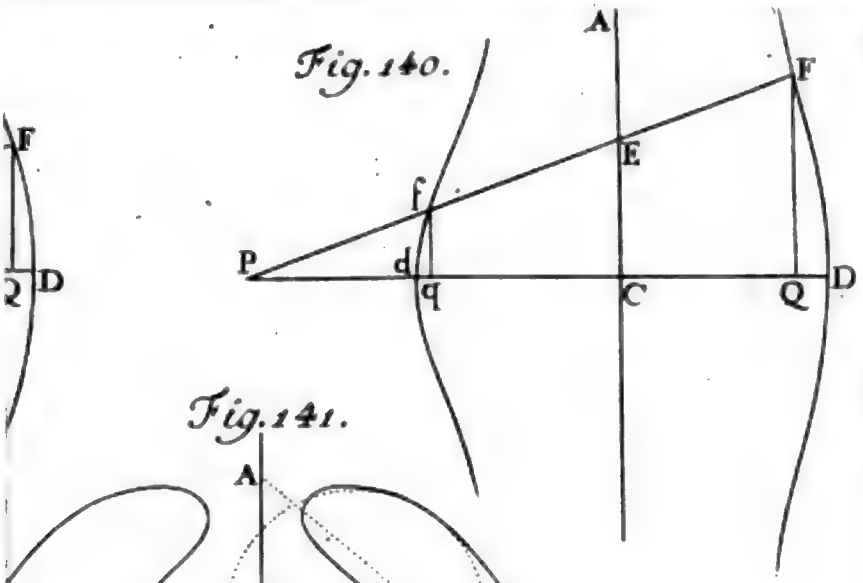


Fig. 141.

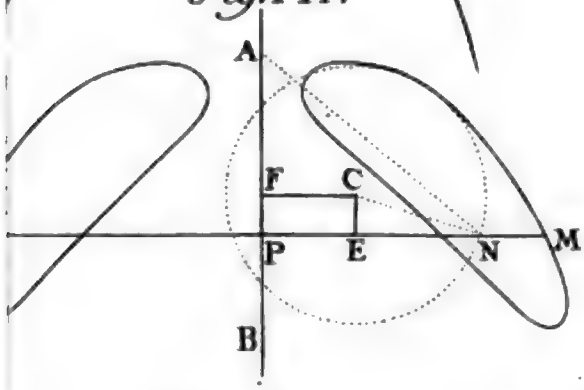


Fig. 142

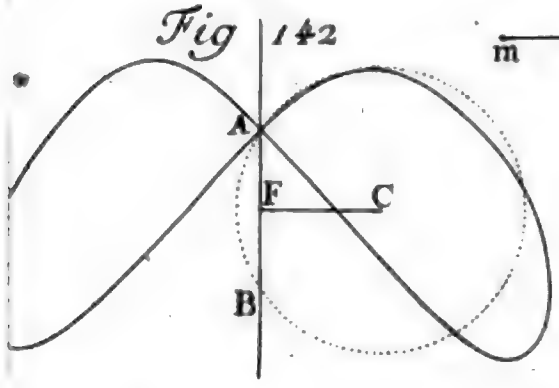


Fig. 144.

Fig. 146.

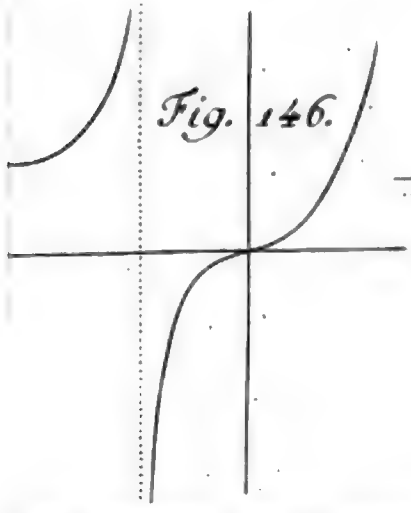
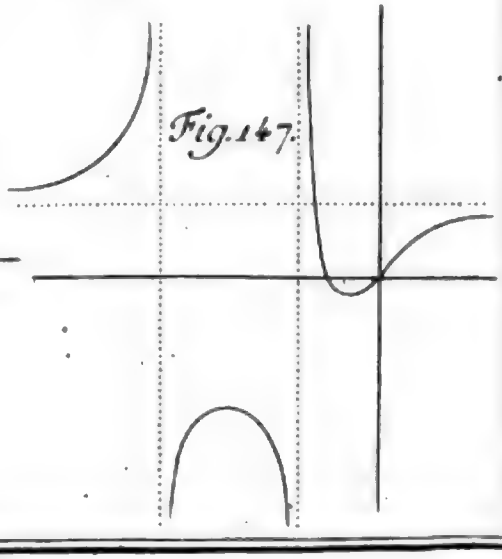


Fig. 147.



Digitized by Google

Digitized by Google

Ch. XI. §. 186. re valeur d'y, qui eſt $x\sqrt{2}$, ſubſtituée dans le ſecond Rang, $-2ax^3\sqrt{2}-ay^3$, ne le fait pas diſparoitre. Ainſi la Branche touchée par AM ne ſubit aucune Inflexion au Point A. Mais la ſeconde valeur d'y, qui eſt $-x\sqrt{2}$, fait diſparoitre le ſecond Rang, quand elle y eſt ſubſtituée. Donc la Branche, que touche AN, eſt *infléchie* au Point A. Pl. XX.

Exemple VII. On demande ſi la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4+x^2y^2-6axyy+aaxx=0$, ſubit quelque Inflexion à ſon Origine. Planche XVIII. Fig. 134.

Le ſecond Rang étant le plus bas, le Point de l'Origine eſt un Point double. Ses Tangentes ſont déterminées par l'éq : $aaxx=0$, qui a deux racines égales $x=0$, $x=0$. Donc les deux Branches qui paſſent par l'Origine, y ont une Tangente commune, qui eſt l'Axe des ordonnées. Elle s'y touchent donc l'une l'autre : & cette Tangente commune eſt cenſée y rencontrer quatre fois la Courbe [§. 181]. En effet, la valeur 0 d'x réduit toute l'équation à $y^4=0$, qui a quatre racines égales à $y=0$. Donc, de ce que cette valeur d'x fait diſparoitre le troiſiéme Rang, $-6axyy$, on ne doit pas conclure qu'il y a une Inflexion à l'Origine, mais ſeulement que deux Branches s'y touchent. Ce qui eſt aſſez évident par la Conſtruction de la Courbe donnée au §. 173, *Exemp.* V.

187. Si le Point, dont on cherche les Tangentes & les Inflexions, n'eſt pas l'Origine ; on l'y tranſportera, en ſubſtituant $y+u$ à y, & $x+z$ à x, dans l'équation propoſée, comme il a été pratiqué au §. 171. C'eſt-à-dire, qu'ayant poſé l'équation donnée en prémiére ligne, on calculera la ſeconde, qui contient les termes u & z. Et ſi la ſubſtitution des valeurs de x & y dans les coëfficients de

Pl. XX. de ces termes ne les fait pas évanouir tous deux, ce prémier Rang donnera l'équation tangentielle. Ch. XI. §. 187.

Exemple. On demande la Tangente d'un Point quelconque d'une Courbe du ſecond Ordre, exprimée par l'éq : $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$.

On a vu [§. 174, *Ex. VI*] que le prémier Rang de la Transformée de cette équation, eſt $(b + 2dy + ex)u + (c + ey + 2fx)z$. Ce Rang égalé à zéro eſt l'équation tangentielle, d'où réſulte [§. 185] cette Conſtruction.

Fig. 152. AP étant l'abſciſſe x, & PM l'ordonnée y, on prolongera celle-ci en Q, deſorte que MQ ſoit égal à $c + ey + 2fx$, & on ménera par le Point M, la Droite MN parallèle à AP, & égale à $b + ex + 2dy$. On tirera la Droite QN, & par le point M ſa parallèle MR, qui ſera la Tangente.

188. En général, pour mener la Tangente d'un Point ſimple quelconque M d'une Courbe, dont l'équation eſt donnée : On prolongera, au-delà du Point M, l'ordonnée PM & l'abſciſſe pM. On multipliera chaque terme de l'équation par l'expoſant de la puiſſance de l'abſciſſe, & on diviſera tous ces produits par l'abſciſſe même : puis on prendra MQ égale à ce quotient, ſur le prolongement de l'ordonnée ſi le quotient eſt poſitif, ſur l'ordonnée même s'il eſt négatif. De même, on multipliera chaque terme de l'équation de la Courbe par l'expoſant de la puiſſance de l'ordonnée, & on diviſera tous ces produits par l'ordonnée : puis on prendra MN égale à ce quotient, ſur le prolongement de l'abſciſſe ſi le quotient eſt poſitif, ſur l'abſciſſe même s'il eſt négatif. Enfin on ménera la Droite QN, & ſa parallèle MR, qui ſera la Tangente requiſe.

Ainſi, l'équation donnée étant l'équation générale des Lignes

CH. XI. §. 188. Lignes du 3e. Ordre, $a+by+cx+dyy+exy+fxx+$ PL. XX. $gy^3+hxyy+ixxy+lx^3=0$, on doit prendre $MQ=c+ey+2fx+hyy+2ixy+3lxx$, & $MN=b+2dy+ex+3gyy+2hxy+ixx$. Dont la raiſon eſt, que ſi on porte l'Origine du Point A au Point M, en ſubſtituant, dans l'équation, $y+u$ à y & $x+z$ à x, le prémier Rang de la transformée ſera [§. 29] $(b+2dy+ex+3gyy+2hxy+ixx)u+(c+ey+2fx+hyy+2ixy+3lxx)z$. Ce prémier Rang eſt l'équation de la Droite qui touche la Courbe au Point M [§. 182], u & z étant les coordonnées. Mais MR, parallèle à QN, eſt la Droite que repréſente cette équation [§. 185, ou §. 40, II]. Donc MR eſt la Tangente de la Courbe au Point M.

189. Si on prolonge la Tangente MR juſqu'à-ce qu'elle rencontre en R la Ligne des abſciſſes, ou en r la Ligne des ordonnées; la partie PR, ou pr, de ces Lignes qui eſt interceptée entre la Tangente rMR, & l'ordonnée MP, ou l'abſciſſe Mp, ſe nomme la *Soûtangente*. C'eſt l'uſage des Geométres de déterminer les Tangentes par la grandeur des Soûtangentes. On voit, en effet, que le Point M étant donné, la poſition de la Tangente eſt donnée par celle du point R, ou du point r, c'eſt-à-dire, par la grandeur de PR, ou de pr. Or la Soûtangente PR eſt la quatriéme proportionelle à MQ, MN & MP, & la Soûtangente pr eſt la quatriéme proportionelle à MN, MQ & Mp. Donc, pour avoir PR, on multipliera la fraction $\frac{MN}{MQ}$ par MP, & pour avoir pr, on multipliera la fraction $\frac{MQ}{MN}$ par Mp. Le Numérateur MN de la prémiére fraction eſt l'équation même de la Courbe, diviſée par l'ordonnée MP, après que chaque terme aura été multiplié

Pl. XX. par l'expoſant de l'ordonnée. Mais comme il faut enſuite multiplier cette fraction $\frac{MN}{MQ}$, ou ſon numérateur MN, par l'ordonnée MP ; la diviſion par MP eſt compenſée par cette multiplication. On peut donc omettre l'une & l'autre, & diviſer ſimplement par MQ ce qui réſulte quand on multiplie chaque terme de l'équation par l'expoſant de l'ordonnée. De même, puiſque MQ eſt l'équation diviſée par l'abſciſſe AP, après que tous ſes termes auront été multipliés par l'expoſant de l'abſciſſe ; on peut, & cela ſera ordinairement plus commode, au lieu de diviſer par l'abſciſſe le dénominateur de la fraction, multiplier par cette même abſciſſe le numérateur, ou, ce qui eſt la même choſe, la fraction. Ch. XI §. 119.

On aura donc la Soûtangente ſur l'Axe des abſciſſes, en multipliant, par l'abſciſſe, la fraction qui a pour numérateur la ſomme des produits qui ſe font quand on multiplie chaque terme de l'équation de la Courbe par l'expoſant de l'ordonnée dans ce terme-là, & pour dénominateur la ſomme des produits qui réſultent quand on multiplie chaque terme de l'équation par l'expoſant de l'abſciſſe dans ce terme-là.

Mais ſi on renverſe cette même fraction, en mettant le numérateur à la place du dénominateur & réciproquement ; on aura, en la multipliant par l'ordonnée, la Soûtangente ſur l'Axe des ordonnées.

Ainſi, dans les Lignes du 2e. Ordre, PR $= \frac{by + exy + 2dyy}{cx + exy + 2fxx} x = \frac{b + ex + 2dy}{c + ey + 2fx} y$, & pr $= \frac{cx + exy + 2fxx}{by + exy + 2dyy} y = \frac{c + ey + 2fx}{b + ex + 2dy} x$; & dans celles du 3e. Ordre, PR $= \frac{by + exy + 2dyy + 3gy^3 + 2hxy^2 + ix^2y}{cx + exy + 2fxx + bxy^2 + 2ix^2y + 3lx^3} x$

$= b$

Ch. XI. §. 189. $= \frac{b + ex + 2dy + 3gyy + 2hxy + ix^2}{c + ey + 2fx + hyy + 2ixy + 3lx^2} y$, & pr $= \frac{cx + exy + 2fxx + hxyy + 2ix^2y + 3lx^3}{by + exy + 2dyy + 3gy^3 + 2hxyy + ix^2y} y = \frac{c + ey + 2fx + hyy + 2ixy + 3lxx}{b + ex + 2dy + 3gyy + 2hxy + ixx} x$, & de même dans les Ordres ſupérieurs. Pl. XX.

190. On peut auſſi, ſans s'aſtreindre à multiplier les termes de l'équation de la Courbe, d'abord par les expoſants de l'ordonnée, enſuite par ceux de l'abſciſſe, les multiplier ſucceſſivement par deux progreſſions arithmétiques quelconques, dont la différence ſera l'unité. Ainſi la Régle pour calculer la Soûtangente ſoit celle-ci.

On ordonnera l'équation de la Courbe ſelon les dimenſions de l'ordonnée, & on multipliera ſes termes par une progreſſion arithmétique, dont les termes croiſſent ou décroiſſent de l'unité, comme les expoſants des puiſſances de l'ordonnée. On diſpoſera enſuite la même équation ſelon les puiſſances de l'abſciſſe, & on multipliera ſes termes par une progr: arithm: dont les termes croiſſent ou décroiſſent de l'unité, comme les expoſants des puiſſances de l'abſciſſe. On diviſera le prémier de ces deux produits par le ſecond, & on multipliera cette fraction par l'abſciſſe, pour avoir la Soûtangente ſur l'Axe des abſciſſes. Ou bien, on diviſera le ſecond de ces produits par le prémier, & on multipliera cette fraction par l'ordonnée, pour avoir la Soûtangente ſur l'Axe des ordonnées.

Cette Régle, par la variété des progreſſions arithmétiques qu'on peut choiſir, fournit une infinité d'expreſſions pour les Soûtangentes, entre leſquelles il eſt bien difficile qu'il ne s'en trouve quelcune qui ſoit ſimple, & d'une

Pl. XX. conſtruction commode ; parce que le zéro peut être un des termes de ces progreſſions, qu'on fera tomber ſur le terme qu'on voudra de l'équation. Ch. XI. §. 190.

Il ſuffira, pour la démontrer, d'en faire l'application à un Exemple. Choiſiſſons l'équation générale, $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$, des Lignes du 2e. Ordre. Si on l'ordonne par y, on aura $a + cx + fxx$, $+ by + exy$, $+ dyy = 0$, dont les termes étant multipliés par la progreſſion m, $m+1$, $m+2$, il vient $ma + mcx + mfxx + (m+1)by + (m+1)exy + (m+2)dyy$. Qu'on l'ordonne enſuite par x, & qu'on multiplie ſes termes par la progreſſion n, $n+1$, $n+2$, on aura $na + nby + ndy^2 + (n+1)cx + (n+1)exy + (n+2)fxx$. Je dis que la Soûtangente ſur l'Axe des abſciſſes ſera $\frac{ma+mcx+mfxx+(m+1)by+(m+1)exy+(m+2)dyy}{na+nby+ndyy+(n+1)cx+(n+1)exy+(n+2)fxx}x$, & que $\frac{na+nby+ndyy+(n+1)cx+(n+1)exy+(n+2)fxx}{ma+mcx+mfxx+(m+1)by+(m+1)exy+(m+2)dyy}y$ exprime la Soûtangente ſur l'Axe des ordonnées.

Car ſi on multiplie l'équation propoſée par $x^n y^m$, on aura $ax^n y^m + bx^n y^{m+1} + cx^{n+1} y^m + dx^n y^{m+2} + ex^{n+1} y^{m+1} + fx^{n+2} y^m = 0$ qui repréſente la même Courbe avec les deux Axes [§. 20]. Si on cherche la Soûtangente par cette équation, ſelon la Régle du §. préc. on aura pour celle de l'Axe des abſciſſes

$$\frac{max^n y^m + (m+1)bx^n y^{m+1} + mcx^{n+1} y^m + (m+2)dx^n y^{m+2} + (m+1)ex^{n+1} y^{m+1} + mfx^{n+2} y^m}{nax^n y^m + nbx^n y^{m+1} + (n+1)cx^{n+1} y^m + ndx^n y^{m+2} + (n+1)ex^{n+1} y^{m+1} + (n+2)fx^{n+2} y^m} x$$

qui, diviſant le numérateur & le dénominateur par $x^n y^m$, ſe réduit à $\frac{ma + (m+1)by + mcx + (m+2)dyy + (m+1)exy + mfxx}{na + nby + (n+1)cx + ndyy + (n+1)exy + (n+2)fxx}x$ préciſément comme on la trouve par la Régle du préſent §.

On.

CH. XI. On trouvera le même accord, en cherchant la Soûtangen- PL. XX.
§. 190. te ſur l'Axe des ordonnées.

191. Cette Régle, ou celle du §. 188, donnera toûjours la Tangente d'un Point ſimple quelconque d'une Courbe dont l'équation eſt donnée. Mais ſi le Numérateur & le Dénominateur de la fraction $\frac{MN}{MQ}$, ſe trouvent devenir égaux à zéro, par la ſubſtitution des valeurs de x & de y pour un Point donné; ces deux termes, qui ſont les coëfficients de u & de z dans le prémier Rang de la Transformée qui nait de la ſubſtitution de $y+u$ à y & de $x+z$ à z, étant zéro, ce prémier Rang diſparoit, & par conſéquent, le Point aſſigné eſt un Point multiple [§. 171]. Ses Tangentes, car il en a au moins deux qui peuvent à la vérité coïncider, ne ſauroient être déterminées par une équation du prémier dégré [§. 183]. Il faut donc proceder à chercher le ſecond Rang de la Transformée; lequel égalé à zéro donne une équation du ſecond dégré, compoſée des termes uu, uz, zz; dont, à moins que les trois coëfficients ne ſoient zéro, on déduira deux valeurs de $\frac{u}{z}$, ou $\frac{MQ}{MN}$, par leſquelles on détermine les deux Tangentes.

Exemple I. On propoſe de trouver les Tangentes de la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4 - 6ay^3 + 14aayy - 16a^3y - x^4 + 4aaxx\sqrt{2} = 0$. Fig. 153.

Si on ſubſtituë $y+u$ à y & $x+z$ à x dans cette équation, le prémier Rang de la Transformée ſera $(4y^3 - 18ayy + 28aay - 16a^3)u + (4x^3 + 8aax\sqrt{2})z$, lequel, égalé à zéro, détermine la Tangente de chaque Point de la Courbe, qui ſera un Point ſimple. En ſup-

Pl. XX. posant $y = 2a$, l'équation proposée se réduit à $-8a^4$ Ch. XI. $-x^4 + 4aaxx\sqrt{2} = 0$, qui a deux racines $x = +a\sqrt{2}\sqrt{2}$, $x = -a\sqrt{2}\sqrt{2}$. D'où il paroit que l'ordonnée $AB = 2a$ a deux abscisses $BC = +a\sqrt{2}\sqrt{2}$ & $Bc = -a\sqrt{2}\sqrt{2}$, moyennes proportionelles entre $AB\,[2a]$ & $BD\,[a\sqrt{2}]$. Si on cherche les Tangentes de la Courbe en ces Points C, c, on substituera $2a$ à y & $\pm a\sqrt{2}\sqrt{2}$ à x, dans le prémier Rang de la Transformée, ce qui le réduit à $(32a^3 - 72a^3 + 56a^3 - 16a^3)u + (\mp 16a^3\sqrt{\sqrt{2}} \pm 16a^3\sqrt{\sqrt{2}})z$, ou $(0)u + (0)z$. Ainsi les Points C & c sont des Points multiples. Pour en avoir les Tangentes, il faut donc chercher le second Rang de la Transformée [§. 183], qui sera $(6yy - 18ay + 14aa)uu + (0)uz + (-6xx + 4aa\sqrt{2})zz$, ou, mettant pour y & x leurs valeurs $2a$ & $\pm a\sqrt{2}\sqrt{2}$, $(2aa)uu - (8aa\sqrt{2})zz$. Ce Rang, égalé à zéro, a deux racines $u = +2z\sqrt{\sqrt{2}}$, & $u = -2z\sqrt{\sqrt{2}}$. On déterminera donc les Tangentes des Points C, c, en donnant aux ordonnées des prolongements CE, ce, égaux à $2a\sqrt{\sqrt{2}}$, ou moyens proportionels entre $2AB\,[4a]$ & $BD\,[a\sqrt{2}]$, & prenant, sur les Droites FG, fg parallèles aux abscisses, les parties EF, ef, égales à a, & les parties EG, eg égales à $-a$. Les Droites CF, cf, CG, cg sont les Tangentes cherchées. §. 191.

Exemple II. Si on cherche les Tangentes de la Fig. 154. Courbe dont la nature s'exprime par l'éq : $xyy + 2aay - axx - 3aax - 3a^3 = 0$; on trouvera pour le prémier Rang de la Transformée, $(2xy + 2aa)u + (yy - 2ax - 3aa)z$, lequel, égalé à zéro, donne l'équation qui détermine les Tangentes de tous les Points simples de la Courbe. Mais si l'on cherche la Tangente du Point M, qui a l'abscisse $AP = -a$ & l'ordonnée $PM = a$, [ce Point est un de ceux de la Courbe, puisque, mettant,

CH. XI. §. 191. tant, dans ſon équation, $-a$ pour x & a pour y, on la réduit à $0=0$], on trouvera pour le prémier Rang, $(-2aa+2aa)u+(aa+2aa-3aa)z$, ou $(0)u+(0)z$; ce qui n'aprend autre choſe ſinon que le Point M eſt un Point multiple. On calculera donc le ſecond Rang de la Transformée, & on trouvera $(x)uu+(2y)uz+(-a)zz$, ou, mettant $-a$ pour x & a pour y, $-auu+2auz-azz$. Ce qui étant égalé à zéro donne $uu-2uz+zz=0$, ſoit $u-z=0$. D'où l'on voit que les deux Tangentes du Point double M coïncident, & que cette double Tangente coupe en deux également l'Angle des coordonnées. PL. XXV.

Exemple III. Les Tangentes de la Courbe déſignée par l'éq: $x^4-2aaxx-4ay^3+a^4=0$ ſe déterminent par l'équat: $\frac{u}{z}=\frac{4x^3-4aax}{12aay}$, qui ſe forme en égalant à zéro le prémier Rang $(-12ayy)u+(4x^3-4aax)z$ de la Transformée. Mais ſi l'on fait $y=0$, on réduit l'équation de la Courbe à $x^4-2aaxx+a^4=0$, qui n'a que deux racines, mais chacune double, $x-a=0$, $x+a=0$. Donc les abſciſſes $AP=a$ & $Ap=-a$ ont des ordonnées zéro. Si on cherche les Tangentes de ces Points P, p, en mettant 0 pour y & $\pm a$ pour x, dans l'équation $\frac{u}{z}=\frac{4x^3-4aax}{12aay}$, on la réduit à $\frac{u}{z}=\frac{0}{0}$. La valeur de cette fraction étant indéterminée, on n'en ſauroit conclure autre choſe ſi ce n'eſt que le prémier Rang $(-12ayy)u+(4x^3-4aax)z$ de la Transformée diſparoit, ou ſe réduit à $(0)u+(0)z$; & que par conſéquent P, p ſont des Points doubles. On cherchera donc le ſecond Rang, qui ſera $(-12ay)uu+(0)uz$ Fig. 151.

Pl. XX. $+(0)uz+(6xx-2aa)zz$, ou mettant $=a$ pour x & 0 pour y, $(0)uu+(0)uz+(4aa)zz$. Ce Rang, égalé à zéro, donne $z=0$. D'où l'on conclura que les Tangentes des Points doubles P, p ſont les ordonnées mêmes PM, pm. Ch. XI. § 191.

192. Si l'évanouiſſement des coëfficients de u, z, & de uu, uz, zz, fait diſparoitre le prémier & ſecond Rang de la transformée ; c'eſt une preuve que le Point dont on cherche les Tangentes eſt un Point triple. On calculera donc le troiſiéme Rang, & ce Rang, égalé à zéro, donne une équation du 3e. dégré, dont les trois racines déterminent les trois Tangentes du Point triple. Mais ſi les coëfficients des termes u^3, uuz, uzz, z^3, qui compoſent le troiſiéme Rang, déviennent tous zéro par la ſubſtitution des valeurs de x & de y qui conviennent au Point aſſigné ; ce Point eſt quadruple, & pour avoir ſes Tangentes, il faut égaler à zéro le quatriéme Rang, qui contient les termes u^4, u^3z, $uuzz$, uz^3, z^4 ; & ainſi de ſuite.

Fig. 156. *Exemple.* On propoſe la Courbe repréſentée par l'éq : $y^4-4ay^3\sqrt{2}+8aayy-2xxyy+4axxy\sqrt{2}+6axyy-12aaxy\sqrt{2}+2x^4-10ax^3+14aaxx-2a^3x=0$.

Si l'on cherche en général la Tangente de cette Courbe pour un Point quelconque, on trouvera que le prémier Rang de la Transformée donne cette équation $(4y^3-12ayy\sqrt{2}+16aay-4xxy+4axx\sqrt{2}+12axy-12aax\sqrt{2})u+(-4xyy+8axy\sqrt{2}+6ayy-12aay\sqrt{2}+8x^3-30ax^2+28aax-2a^3)z$. Mais ſi l'on demande en particulier la Tangente du Point qui répond à l'abſciſſe a & à l'ordonnée $a\sqrt{2}$, [car a ſubſtitué pour x dans l'équation propoſée la change en $y^4-4a^3y\sqrt{2}+12aayy-8a^3y\sqrt{2}+4a^4=0$, qui n'a qu'une ſeule racine,

Ch. XI. §. 192. ne, mais quadruple, $y - a\sqrt{2} = 0$] on ſubſtituera ces valeurs d'x & d'y dans l'équation tangentielle qu'a donné le prémier Rang. Comme cette ſubſtitution la réduit à $(0)u + (0)z$, on conclura que le Point aſſigné eſt multiple. On calculera donc le ſecond Rang de la Transformée, qui ſera $(6yy - 12ay\sqrt{2} + 8aa - 2xx + 6ax)uu + (\begin{matrix}-4xy + 4ax\sqrt{2} + 6ay - 6aa\sqrt{2} \\ -4xy + 4ax\sqrt{2} + 6ay - 6aa\sqrt{2}\end{matrix})uz + (-2yy + 4ay\sqrt{2} + 12xx - 30ax + 14aa)zz$. Et en ſubſtituant dans ce Rang a pour x & $a\sqrt{2}$ pour y, on le réduit à $(0)uu + (0)uz + (0)zz$; ce qui montre que le Point propoſé eſt plus que double ; mais qui n'indique point encore la poſition de ſes Tangentes. Il faut donc pouſſer le Calcul juſqu'au 3e. Rang $(4y - 4a\sqrt{2})u^3 + (\begin{matrix}-\frac{4}{3}x + 2a \\ -\frac{8}{3}x + 4a\end{matrix})uuz + (\begin{matrix}-\frac{8}{3}y + \frac{8}{3}a\sqrt{2} \\ -\frac{4}{3}y + \frac{4}{3}a\sqrt{2}\end{matrix})uzz + (8x - 10a)z^3$, ou, ſubſtituant à x & y leurs valeurs a & $a\sqrt{2}$, $(0)u^3 + (2a)uuz + (0)uzz + (-2a)z^3$. Ce Rang égalé à zéro donne, en diviſant par $-2a$, $z^3 - uuz = 0$, qui a trois racines $z = 0$, $z = u$, $z = -u$, dont la prémiére fait connoitre que l'Axe des ordonnées eſt une Tangente, & les deux autres indiquent des Tangentes qui coupent en deux également les angles des coordonnées.

Pl. XX.

193. Il seroit inutile de multiplier les Exemples. Mais il eſt à propos de remarquer, que, ſelon le Principe du §. 186, ce même Calcul nous met en état de juger ſi un Point, aſſigné ailleurs qu'à l'Origine, eſt un Point d'Inflexion ſimple, double, triple, ou &c. par le nombre des Rangs ſupérieurs à celui qui a donné l'équation tangentielle, leſquels s'évanouiſſent par la ſubſtitution des valeurs de u & z; ou ce qui revient au même, par le nom-

PL. XX. bre des Rangs que cette équation peut diviſer. CH. XI. §. 191.

Fig. 157. *Exemple I.* La Courbe déſignée par l'éq : $x^3 - 3axx - ayy = 0$ porte à l'extrémité de l'abſciſſe $x = 4a$ deux ordonnées, égales l'une à $4a$, l'autre à $-4a$. On demande ſi ces Points ſont Points d'Inflexion ? On cherchera d'abord l'équation tangentielle générale, qui eſt $-(2ay)u + (3xx - 6ax)z = 0$, qu'on rendra particuliére à ces Points, en mettant pour x ſa valeur $4a$, & pour y ſes valeurs $\pm 4a$. Par cette ſubſtitution elle ſe réduit à $\mp 8aau + 24aaz = 0$, ou $u \mp 3z = 0$. Donc, en ces Points, la poſition de la Tangente eſt telle que le Sinus de l'angle qu'elle fait avec les abſciſſes eſt triple du Sinus de l'angle qu'elle fait avec les ordonnées. Enſuite, pour ſavoir ſi ces Points ſont Points d'Inflexion, on calculera le ſecond Rang de la Transformée, qui eſt $-(a)uu + (0)uz + (3x - 3a)zz$, ou, mettant $4a$ pour x, $-auu + 9azz$. Or ce Rang eſt diviſible par l'équation tangentielle $u \mp 3z = 0$, ou, ce qui eſt la même choſe, il diſparoit ſi au lieu de u on ſubſtituë ſa valeur $\pm 3z$, priſe de l'équation tangentielle. Donc les Points dont il s'agit ont une Inflexion. Mais c'eſt une Inflexion ſimple, puiſque le troiſiéme Rang de la Transformée ne conſiſte que dans le ſeul terme z^3, qui n'eſt pas diviſible par $u \mp 3z = 0$.

Fig. 158. *Exemple II.* Soit la Courbe exprimée par l'équat. $xxy - bbx - a^3 = 0$. On en détermine la Tangente en général par l'éq : $(xx)u + (2xy - bb)z = 0$, que fournit le prémier Rang de la Transformée. Mais ſi on prend l'abſciſſe $x = -\frac{3a^3}{bb}$, à laquelle répond l'ordonnée $y = [\frac{bbx + a^3}{xx} =] - \frac{2b^4}{9a^3}$, l'équation tangentielle ſe réduit pour

Ch. XI. §. 193. pour ce Point-là, à $\frac{9a^6}{b^4}u + \frac{1}{3}bbz = 0$, ou $z + \frac{27a^6}{b^6}u = 0$. On demande, ſi, à ce Point, la Courbe a une Inflexion ? On cherchera donc le ſecond Rang. C'eſt $(0)uu + (2x)uz + (y)zz$, qui s'évanouït quand on écrit $-\frac{3a^3}{bb}$ pour x, $-\frac{2b^4}{9a^3}$ pour y, & $-\frac{27a^6}{b^6}u$ pour z; ou, ce qui revient au même, ce Rang $(0)uu + (2x)uz + (y)zz$, en mettant pour x & y leurs valeurs, ſe réduit à $-\frac{6a^3}{bb}uz - \frac{2b^4}{9a^3}zz$, qui eſt diviſible par l'équation tangentielle $z + \frac{27a^6}{b^6}u = 0$. Donc le Point aſſigné a une Inflexion. Mais c'eſt une Inflexion ſimple; puiſque le troiſiéme Rang qui n'a que le ſeul terme uzz, n'eſt pas diviſible par l'équation tangentielle. Pl. XX.

Exemple III. La *Fig.* 149. eſt celle de la Courbe déſignée par l'éq : $y^4 + 2xxyy + x^4 - 4ay^3 - 4ax^2y + 8aayy - 8a^3y = 0$ [§. 186. *Ex. IV*]. On demande quelle eſt la Tangente & la nature du Point qui a 0 pour abſciſſe, & $2a$ pour ordonnée ? Il eſt aiſé de voir que ce Point eſt un de ceux de la Courbe.

Le prémier Rang de la Transformée eſt $(4y^3 + 4xxy - 12ayy - 4axx + 16aay - 8a^3)u + (4xyy + 4x^3 - 8axy)z$, lequel, mettant 0 pour x & $2a$ pour y, donne l'équation tangentielle $(8aa)u + (0)z = 0$, ou $8aau = 0$, dont la racine $u = 0$ montre que la Tangente eſt parallèle aux abſciſſes. Le ſecond Rang $(6yy + 2xx - 12ay + 8aa)uu + \left(\frac{4xy - 4ax}{4xy - 4ax}\right)uz + (2yy + 6xx - 4ay)zz$, ou, écrivant 0 pour x & $2a$ pour y, $(8aa)uu + (0)uz + (0)zz$, ſoit $8aauu$, diſparoit quand on

Pl. XXI. ſubſtituë à u ſa valeur o. Il en eſt de même du troiſié- Ch. XI. §. 193.
me Rang $(4y - 4a)u^3 + (\frac{4}{3}x)uuz + (\frac{8}{3}y - \frac{8}{3}a)uzz$ $+ (4x)z^3$, ou, $4au^3 + 4auzz$. Mais le quatriéme $(1)u^4 + (2)uuzz + (1)z^4$ ne diſparoit pas par la ſubſtitution de o pour u. Donc puiſque l'équation tangentielle $u = o$ diviſe les deux Rangs ſupérieurs à celui qui donne cette équation, & ne diviſe pas le troiſiéme, le Point dont il s'agit eſt un Point de Serpentement.

Exemple IV. On demande la nature des Points
Fig. 159. de la Courbe exprimée par l'éq : $y^4 - 4ay^3 - 8aayy + 4x^4 - 8aaxx\sqrt{2} + 8a^4 = o$, qui ſont ſur l'Axe des abſciſſes.

Si on fait $y = o$, on réduit l'équation propoſée à $4x^4 - 8aaxx\sqrt{2} + 8a^4 = o$, qui a deux racines doubles, $x = +a\sqrt{\sqrt{2}}$, $x = -a\sqrt{\sqrt{2}}$. Pour avoir les Tangentes des Points qui répondent à ces abſciſſes & à l'ordonnée zéro, on transformera l'équation de la Courbe [§. 187], & dans le prémier Rang $(4y^3 - 12ayy - 16aay)u + (16x^3 - 16aax\sqrt{2})z$, on mettra o pour y & $\pm a\sqrt{\sqrt{2}}$ pour x, ce qui le réduit à $(o)u + (o)z$. Les Points, dont il eſt queſtion, ſont donc des Points doubles ; & pour en avoir les Tangentes, il faut calculer le ſecond Rang $(6yy - 12ay - 8aa)uu + (o)uz + (24xx - 8aa\sqrt{2})zz$ de la Transformée. En mettant, dans ce Rang, pour x & z leurs valeurs, on a l'équation tangentielle $-8aauu + 16aazz\sqrt{2} = o$, ou $uu - 2zz\sqrt{2} = o$, dont les racines $u - z\sqrt{2}\sqrt{2} = o$, $u + z\sqrt{2}\sqrt{2} = o$ déterminent les Tangentes. Mais puis qu'on demande ſi les Branches, qui ſe croiſent en ces Points doubles, y ſont infléchies ; on cherchera le Rang ſupérieur, qui eſt le troiſiéme, $(4y - 4a)u^3 + (o)uuz + (o)uzz + (16x)z^3$, ou, mettant o pour y & $\pm a\sqrt{\sqrt{2}}$ pour x, $-4au^3 = \pm 16az^3\sqrt{\sqrt{2}}$; & l'on examinera ce que ce Rang devient, quand,

au

Fig. 149.

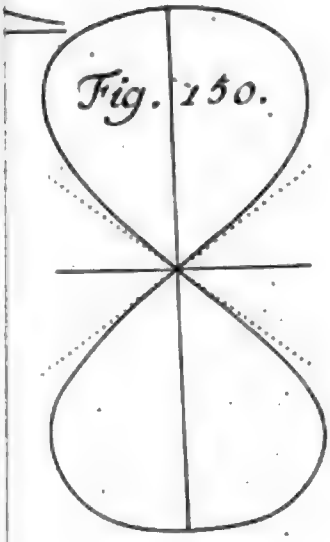


Fig. 150.

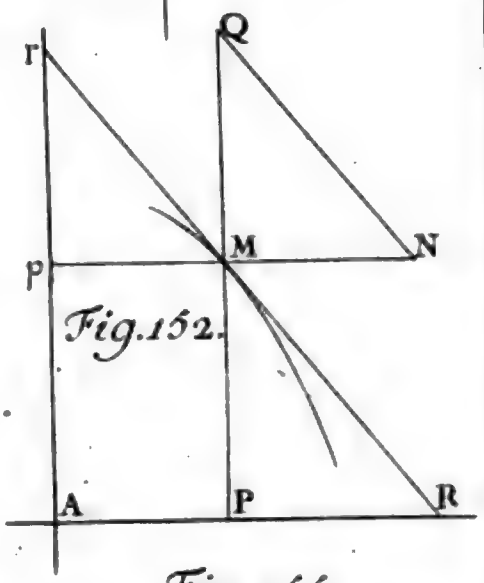


Fig. 152.

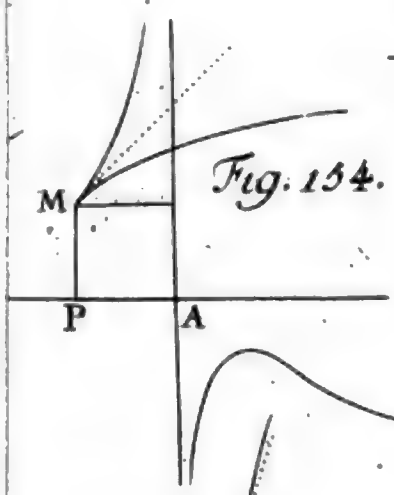
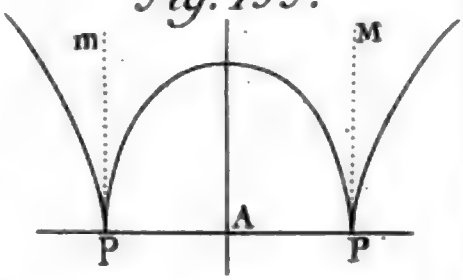


Fig. 154.

Fig. 155.



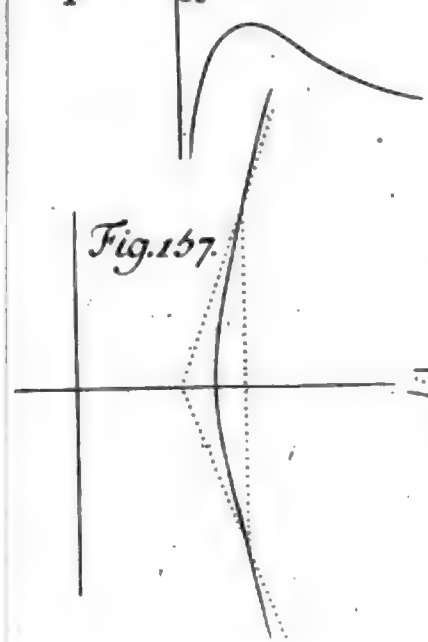
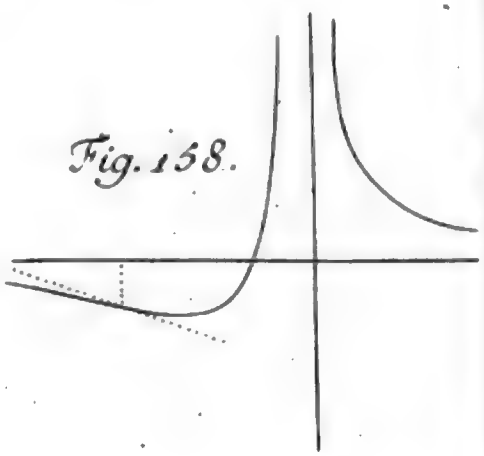


Fig. 157.

Fig. 158.



Digitized by Google

Digitized by Google

Ch. XI. au lieu de u on ſubſtituë ſes valeurs $+$ ou $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, Pl. XXI.
§. 193. données par l'équation tangentielle. On trouvera que ſi dans $-4au^3+16az^3\sqrt{}\sqrt{2}$, qui ſe raporte au Point A, dont l'abſciſſe eſt $+a\sqrt{}\sqrt{2}$, on ſubſtitue $+z\sqrt{2}\sqrt{2}$ à u, ce Rang s'évanouït, mais ſi l'on ſubſtituë $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, il ſe réduit à $32az^3\sqrt{}\sqrt{2}$. Au contraire, ſi, dans l'équation $-4au^3-16az^3\sqrt{}\sqrt{2}$ qui ſe raporte au Point a, dont l'abſciſſe eſt $-a\sqrt{}\sqrt{2}$, on ſubſtituë $+z\sqrt{}\sqrt{2}$, on aura $-32az^3\sqrt{}\sqrt{2}$, & en ſubſtituant $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, on a zéro. Donc au Point A, la Branche AB touchée par la Droite AC, qu'exprime la racine $u=+z\sqrt{2}\sqrt{2}$ ſubit une Inflexion; l'autre Branche AE, qui eſt touchée par la Droite AD qu'exprime la racine $u=-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, ne ſubit aucune Inflexion. Mais au Point a, la Branche aE, dont la Tangente aD ſe détermine par la racine $u=+z\sqrt{2}\sqrt{2}$, n'eſt point infléchie; mais la Branche ab, touchée par ac dont l'équation eſt $u=-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, ſubit une Inflexion. Au reſte les Inflexions des Branches AB, ab, ſont ſimples. Car le quatriéme Rang $(1)u^4+(0)u^3z+(0)uuzz+(0)uz^3+(4)z^4$, ne diſparoit point, lors qu'à u on ſubſtituë $+$ ou $-z\sqrt{2}\sqrt{2}$, mais il ſe réduit à $12z^4$.

194. Les mêmes Principes ménent à la Solution des Problémes inverſes de ceux qu'on vient de réſoudre. Tel eſt celui-ci. L'équation d'une Courbe étant donnée, trouver les Points de cette Courbe, où la Tangente fait, avec les abſciſſes ou avec les ordonnées, un angle donné. Pl. XXI. Fig. 152. L'Angle PMR, que la Tangente PR fait avec les ordonnées, ou l'angle pMr qu'elle fait avec les abſciſſes, dépend du raport des côtés PM, PR du triangle PMR, ou des côtés pM, pR du triangle pMr, c'eſt-à-dire, du raport des droites MQ, MN, lequel eſt le même que celui des variables u, z dans l'équation tangentielle générale

Pl. XXI. de la Courbe [§. 187]. Si donc cet angle PMR, ou pMr, eſt donné, le raport de u à z eſt donné. Qu'on exprime ce raport donné par les lettres $h : l$. On ſubſtituera donc dans l'équation tangentielle h pour u & l pour z, & on aura une équation, qui, avec celle de la Courbe, détermine les valeurs de x & de y, c'eſt-à-dire, la poſition du Point, ou des Points, cherchez. Ch. XI. §. 194.

Un ſeul *Exemple* éclaircira cette Règle. On demande Fig. 160. les Points de la Courbe déſignée par l'éq : $aayy + bbxx - aabb = 0$, où l'ordonnée eſt à la ſoûtangente comme h à l.

L'équation tangentielle eſt $(2aay)u + (2bbx)z = 0$, ou, mettant h pour u & l pour z, $2aahy + 2bblx = 0$; ce qui donne $y = -\frac{bbl}{aah}x$. Subſtituant cette valeur dans l'équation de la Courbe, on la transforme en $\frac{b^4ll}{aahh}xx + bbxx - aabb = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{aah}{\sqrt{(bbll + aahh)}}$. Donc $y = [-\frac{bbl}{aah}x =] \frac{-bbl}{\sqrt{(bbll+aahh)}}$. Ainſi $x : y = -aah : bbl = -\frac{aa}{l} : \frac{bb}{h}$. Si donc on méne dès l'Origine une Droite qui faſſe avec les Axes des angles tels que $x : y = -\frac{aa}{l} : \frac{bb}{h}$, cette Droite rencontrera la Courbe aux Points demandés.

Mais ſi l'équation propoſée eut été $aayy - bbxx - aabb = 0$; on auroit trouvé, par un Calcul ſemblable, $x = \frac{aah}{\sqrt{(bbll - aahh)}}$, & $y = \frac{bbl}{\sqrt{(bbll - aahh)}}$; valeurs qui deviennent impoſſibles, quand $aahh > bbll$, quand $h : l > b : a$. On ne ſauroit donc mener à cette Courbe aucune

CH. XI. §. 196. aucune Tangente, qui faſſe avec les abſciſſes un angle plus aigu que celui que fait la Droite repréſentée par l'éq: $fx = by$, qui eſt l'Aſymptote de la Courbe. PL. XXI. Fig. 161.

195. LE CAS de ce Probléme, le plus important & le plus facile à réſoudre, eſt celui où l'on cherche les Points de la Courbe, dont la Tangente eſt parallèle aux abſciſſes ou aux ordonnées. Ces Points ſe nomment des *Maxima* & des *Minima*; ſçavoir des *Maxima* ou *Minima* d'ordonnées, quand la Tangente eſt parallèle aux abſciſſes; & des *Maxima* ou *Minima* d'abſciſſes, quand la Tangente eſt parallèle aux ordonnées. En effet, il arrive *d'ordinaire*, qu'en ces Points l'ordonnée ou l'abſciſſe eſt la plus grande ou la plus petite de toutes, ou du moins plus grande ou plus petite que celles des points voiſins de part & d'autre. La ſeule vuë de la Figure fait voir que la Tangente AT étant parallèle aux abſciſſes [*n°.* 1 *&* 2], l'ordonnée AB eſt ou plus grande, ou plus petite, que les ordonnées ab, $\alpha\beta$ de part & d'autre; & que la Tangente At étant parallèle aux ordonnées [*n°.* 3 *&* 4], l'abſciſſe AC eſt ou plus grande, ou plus petite que les abſciſſes ac, ax, de part & d'autre. Fig. 162.

J'ai dit que cela arrive *d'ordinaire*. Car il peut arriver que le Point, dont la Tangente eſt parallèle aux abſciſſes ou aux ordonnées, ſoit un Point d'Inflexion viſible; & alors il n'eſt ni un *Maximum* ni un *Minimum*. Fig. 163.

196. La Tangente eſt parallèle aux abſciſſes, lorſque l'équation tangentielle, ou du moins une de ſes racines, eſt $u = 0$; c'eſt-à-dire, lors qu'il manque le terme ſans u au Rang qui, égalé à zéro, donne la poſition de la Tangente [§§. 184. 187]. Et de même, la Tangente eſt parallèle aux ordonnées, quand l'équation tangentielle a une racine $z = 0$, quand le Rang qui, égalé à zéro, donne

Pl. XXI. donne cette équation, n'a aucun terme ſans z. Ch. XI. §. 196.

Ainſi pour avoir les *Maxima* ou les *Minima* des ordonnées, on cherchera le prémier Rang de la Transformée qui réſulte de la ſubſtitution d'$y + u$ à y, & d'$x + z$ à x, & on égalera à zéro le coëfficient de z dans ce prémier Rang. Cette équation combinée avec celle de la Courbe, donnera les valeurs d'x & d'y, qui répondent aux *Maxima* & *Minima* d'ordonnées.

Et pour avoir les *Maxima* & *Minima* d'abſciſſes, on égalera à zéro le coëfficient d'u dans le prémier Rang de la Transformée, & on combinera cette équation avec celle de la Courbe, pour avoir les valeurs cherchées d'x & d'y.

Ceci ſuppoſe que les coëfficients d'u & de z ne s'évanouiſſent pas enſemble. Car ſi les valeurs d'x & d'y, qui rendent l'un de ces coëfficients égal à zéro, font auſſi diſparoitre l'autre; le Point eſt un Point multiple [§. 171], dont l'ordonnée ou l'abſciſſe ne ſont pas des plus grandes ou des plus petites, ou ne le ſont que par hazard. Il faut donc examiner ſi la ſuppoſition qui anéantit un des deux coëfficients de u ou de z, n'anéantit point auſſi l'autre.

Il faut encore examiner ſi la racine $u = 0$, ou $z = 0$, ne diviſe point le ſecond Rang. Car alors le Point trouvé ſeroit un Point d'Inflexion [§§. 186, 193], & par conſéquent il ne ſeroit pas un *Maximum*, ni un *Minimum*, quoique la Tangente ſoit parallèle aux abſciſſes ou aux ordonnées. A moins que cette racine $u = 0$, ou $z = 0$, ne diviſe auſſi le troiſiéme Rang, ſans faire évanouïr le quatriéme; en quel cas le Point ſeroit un Point de double Inflexion ou de Serpentement, & en même tems un *Maximum* ou un *Minimum*. En général, ſi la racine $u = 0$, ou $z = 0$, de l'équation tangentielle, ne diviſe aucun des Rangs ſupérieurs, ou en diviſe un nombre pair; le Point dont la Tangente eſt parallèle à une des coor-

CH. XI §. 196. coordonnées, étant un Point ordinaire ou un Point de Serpentement, ce Point eſt un *Maximum* ou un *Minimum*. Il n'eſt ni l'un ni l'autre, mais un Point d'Inflexion viſible, ſi la racine $u = 0$, ou $z = 0$, diviſe un nombre impair de Rangs ſupérieurs à celui qui a donné l'équation tangentielle. PL. XXI.

Faute d'avoir fait attention à ces deux Remarques, des Géométres ont pris pour des Points de *Maximum* ou de *Minimum*, des Points qui n'avoient pas ce Caractère, mais qui étoient ou des Points multiples ou des Points d'Inflexion ; & d'un autre côté, on a élevé des Objections contre une Méthode ſemblable à celle que nous propoſons ici, leſquelles s'évanouiſſent par ces conſidérations.

Exemple I. On demande les *Maxima* ou les *Minima* de la Courbe exprimée par l'éq : $yy + xx + by - ax = 0$. Fig. 164.

Si on ſubſtituë $x + z$ à x & $y + u$ à y, le prémier Rang de la Transformée ſera $(2y + b)u + (2x - a)z$. Le coëfficient de z, égalé à zéro, donne $x = \frac{1}{2}a$, & cette valeur d'x, ſubſtituée dans la Propoſée, la change en $yy + by - \frac{1}{4}aa = 0$, d'où l'on tire $y = -\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)}$. Ces valeurs d'$y$, ſubſtituées dans le coëfficient de u, ne le font pas diſparoitre. Donc l'abſciſſe $x = \frac{1}{2}a = AP$, & les ordonnées $y = -\frac{1}{2}b + \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = PM$, $y = -\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = Pm$, donnent deux Points M, m, qui ſont les *Maxima* des ordonnées.

Pour avoir ceux des abſciſſes, on égalera à zéro le coëfficient de u. Il donne $y = -\frac{1}{2}b$. Cette valeur ſubſtituée dans l'équation de la Courbe, la transforme en $xx - ax - \frac{1}{4}bb = 0$, d'où l'on tire $x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)}$. Et ces valeurs, ſubſtituées dans le coëfficient de z, ne le font pas évanouïr. Donc l'ordonnée $y = -\frac{1}{2}b = AQ$, & les abſciſſes $x = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = QN$,

Pl. XXI. & $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\sqrt{(bb + aa)} = Qn$, donnent deux Points N, n, qui ſont les *Maxima* des abſciſſes. Ch. XI. §. 196.

Mais il faut, pour cela, que ces quatre Points M, m, N, n, ne ſoient pas des Points d'Inflexion ; comme en effet ils ne le ſont pas. Car le ſecond Rang de la Transformée, qui eſt $uu + zz$, ne peut ſe diviſer par le prémier, qui eſt $(2y + b)u + (2x + a)z$, quelque ſuppoſition qu'on faſſe ſur les valeurs de y & de x. On fait d'ailleurs qu'une Courbe du ſecond Ordre ne ſauroit avoir d'Inflexions [§. 163]. Et comme la Courbe en queſtion eſt un Cercle, [§. 185. *Ex. I*], on peut aiſément s'aſſurer que le Calcul a véritablement déterminé les plus grandes abſciſſes & ordonnées.

Exemple II. Quels ſont les *Maxima* & les *Minima* de la Parabole repréſentée par l'éq : $ay - xx = 0$. [§. 123]?

Le prémier Rang de la Transformée eſt $(-a)u - (2x)z$. Le coëfficient de z, égalé à zéro, donne $x = 0$, qui ſubſtitué dans la Propoſée donne $y = 0$. Comme ces valeurs d'x & d'y ne font pas évanouir $(-a)$ le coëfficient d'u, on conclura qu'à l'Origine, la Tangente eſt parallèle aux abſciſſes : ce qui eſt, en quelque ſorte, un *Minimum* d'ordonnées ; puiſque l'ordonnée y eſt zéro, & qu'il n'y en a point de négatives.

Mais le coëfficient d'u, égalé à zéro, donneroit $a = 0$: ce qui eſt abſurde. Donc la Parabole n'a point de Tangente parallèle aux ordonnées. Elle n'a donc point de plus grande, ni de plus petite abſciſſe. Elles vont, en effet, depuis le zéro en croiſſant juſqu'à l'infini poſitif, & en décroiſſant, juſqu'à l'infini négatif.

Fig. 165. *Exemple III.* On propoſe la Courbe que repréſente l'éq : $xxy - ayy - bbx = 0$.

Le

Digitized by Google

CH. XI. Le prémier Rang de la Transformée étant $(x^2 - 2ay)u$ PL. XXL
§. 196. $+(2xy - bb)z$; ſi on cherche les *Maxima* d'ordonnées, on égalera à zéro le coëfficient de z, & on aura $x = \frac{bb}{2y}$. Cette valeur, ſubſtituée dans l'équation de la Courbe, donne $\frac{b^4}{4y} - ayy - \frac{b^4}{2y} = 0$, ou $y = -\sqrt[3]{(b^4 : 4a)}$. Donc $x\,[= \frac{bb}{2y}] = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}abb}$. Ces valeurs, ſubſtituées dans $xx - 2ay$, coëfficient d'u, ne le font pas évanouir. Ainſi le Point qui a pour coordonnées $x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}abb}$, & $y = -\sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}}$, n'eſt pas un Point multiple, mais un *Maximum* d'ordonnées, pourvû que ce ne ſoit pas un Point d'Inflexion. On cherchera donc le ſecond Rang de la Transformée, ou du moins le coëfficient du terme zz, auquel ce Rang ſe réduit par la valeur d'u priſe dans l'équation tangentielle $u = 0$. On trouvera que ce coëfficient eſt y, & qu'ainſi il ne s'évanouït pas par la ſubſtitution de $-\sqrt[3]{\frac{b^4}{4a}}$ à y. Donc le Point trouvé n'eſt pas un Point d'Inflexion, mais un vrai *Maximum* d'ordonnées.

Pour avoir les *Maxima* ou *Minima* d'abſciſſes, on égalera à zéro, $xx - 2ay$, qui eſt le coëfficient d'u, & on aura $y = \frac{xx}{2a}$; valeur qui transforme la Propoſée en $\frac{x^4}{2a} - \frac{x^4}{4a} - bbx = 0$, ou $x^4 = 4abbx$, qui a deux racines, $x = 0$, $x = \sqrt[3]{4abb}$. Ces valeurs ſubſtituées dans l'éq: $y = \frac{xx}{2a}$, donnent, la prémiére $y = 0$, la ſeconde

Pl. XXI. $y = \sqrt[3]{\frac{2b^4}{a}}$. Et ces valeurs d'$x$ & d'y, ſubſtituées dans $2xy - bb$, ne le font point diſparoitre. Subſtituées auſſi dans le ſecond Rang, que l'équation tangentielle $z = o$ réduit à $auu = o$, elles ne le font pas évanouir. Donc l'Origine, où $x = o$, & $y = o$, & le Point où $x = \sqrt[3]{4abb}$ & $y = \sqrt[3]{\frac{2b^4}{a}}$, ne ſont ni des Points multiples, ni des Points d'Inflexion, mais de véritables *Minima* d'abſciſſes. Ch. XI. §. 196.

Exemple IV. On veut chercher les *Maxima* ou Fig. 166. *Minima* de la Courbe déſignée par l'éq : $ay^3 + bx^3 - c^3x = o$.

Le prémier Rang de la Transformée eſt $(3ayy)u + (3bxx - c^3)z$. Si on égale à zéro le coëfficient de z, on aura $x = \pm\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$, & par l'équation de la Courbe $y = \pm\sqrt[6]{\frac{4c^9}{27aab}}$, valeurs qui réduiſent l'équation tangentielle à $\pm u\sqrt[3]{\frac{4ac^9}{b}} = o$ ou $u = o$. Donc les Points qui ont, l'un pour abſciſſe $+\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$ & pour ordonnée $+\sqrt[6]{\frac{4c^9}{27aab}}$; l'autre pour abſciſſe $-\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$ & pour ordonnée $-\sqrt[6]{\frac{4c^9}{27aab}}$, ont leurs Tangentes parallèles aux abſciſſes. Ces Points ne ſont pas Points d'Inflexion. Car le ſecond Rang de la Transformée, réduit, [puiſque $u = o$,] à $(3bx)zz$, ne diſparoit pas, lors qu'à x on ſubſti-

Digitized by Google

Ch. XI. § 196. Pl. XXI.

ſubſtituë $+$ ou $-\sqrt{\frac{c^3}{3b}}$. Ce ſont donc des *Maxima* d'ordonnées.

Mais, ſi on égale à zéro le coëfficient d'u, pour avoir les *Maxima* ou *Minima* d'abſciſſes, on trouvera $y = 0$, & par l'équation de la Courbe $bx^3 - c^3x = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = +\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, $x = -\sqrt{\frac{c^3}{b}}$. Ainſi l'Axe des abſciſſes rencontre la Courbe à l'Origine & à l'extrémité des abſciſſes $+\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, $-\sqrt{\frac{c^3}{b}}$, & ces Points ne ſont pas multiples, puiſque ces valeurs d'x n'anéantiſſent pas le coëfficient $3bxx - c^3$ de z. Donc dans ces Points la Tangente eſt parallèle aux ordonnées. On ne doit pourtant pas encore affirmer que ce ſont des *Maxima* ou *Minima*, puiſqu'ils peuvent être Points d'Inflexion viſible; ni le nier, avant que de ſavoir ſi ce ne ſont point des Serpentemens. On calculera dans le ſecond Rang de la Transformée, réduit au terme uu, & on trouvera $(3ay)uu$, que $y = 0$ fait diſparoitre. Ainſi les Points aſſignés ſont Points d'Inflexion. Et ce ne ſont pas des Serpentemens; car le troiſiéme Rang $(a)uu$ ne s'anéantit point, par la ſubſtitution des valeurs d'x & d'y. Les Points en queſtion ſont donc des Points d'Inflexion viſible, & non pas des *Maxima* ou des *Minima* d'abſciſſes, quoiqu'ils ayent leur Tangente parallèle aux ordonnées.

Exemple V. On propoſe la Courbe, que les Anciens ont apellée *Ciſſoïde*, dont l'équation eſt $xyy + x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0$. Fig. 167.

Le prémier Rang de la Transformée eſt $(2xy)u + (yy + 3xx - 6ax + 3aa)z$. Si on cherche la plus grande ordonnée, on trouvera, en égalant à zéro le coëffi-

PL. XXI. cient de z, $yy + 3xx - 6ax + 3aa = 0$; & ſubſtituant, dans l'équation de la Courbe, au lieu de yy, ſa valeur $-3xx + 6ax - 3aa$, on aura $-3x^3 + 6axx - 3aax + x^3 - 3axx + 3aax - a^3 = 0 = (x - a)^2 (-2x - a)$, qui a trois racines $x = -\frac{1}{2}a$, $x = a$, $x = a$. La prémiére ſubſtituée dans $yy + 3xx - 6ax + 3aa = 0$, donne $yy = -6\frac{1}{4}aa$, où y eſt imaginaire. Ce Point n'eſt donc pas même un des Points de la Courbe. On pourroit le nommer un *Maximum imaginaire*, mais la conſidération de ces *Maxima* n'aboutit à rien, que je ſache. L'autre racine $x = a$, qui eſt double, ſubſtituée dans $yy + 3xx - 6ax + 3aa = 0$, donne $y = 0$, & cette valeur d'y anéantit le coëfficient $2xy$ de u. Donc elle indique un Point multiple à l'extrémité de l'abſciſſe $x = a$. CH. XI. §. 196.

On connoitra les Tangentes de ce Point multiple, en cherchant le ſecond Rang, qui eſt $(x)uu + (2y)uz + (3x - 3a)zz$, & y ſubſtituant à x & y leurs valeurs a & 0, ce qui le réduit à auu. Puiſque ce Rang ne s'anéantit pas, le Point en queſtion n'eſt qu'un Point double [§. 171], & en l'égalant à zéro, on a une équation, qui n'a qu'une ſeule racine double $u = 0$. D'où l'on conclut [§. 181] que ce Point n'a qu'une Tangente, mais qui touche deux Branches. Ainſi, quoique cette Tangente ſoit parallèle aux abſciſſes, le Point qu'elle touche n'eſt ni un *Maximum*, ni un *Minimum* d'ordonnées.

197. LA RE'SOLUTION du Problème *de Maximis & Minimis* eſt une des plus utiles & des plus agréables inventions de l'Analyſe. Elle ſert à trouver, entre une infinité de grandeurs qui ont entr'elles un raport déterminé par une Loy conſtante & qui peut s'exprimer par une équation, celle qui eſt la plus grande, ou la plus petite, & en général celle qui remplit le mieux certaines vûës. Toutes ces grandeurs, ou ce qui en réſulte ſuivant

Fig. 160.

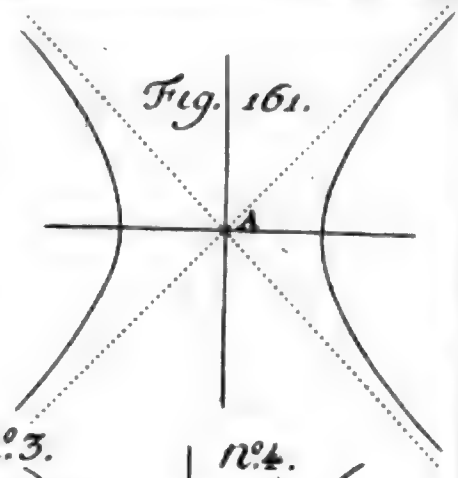
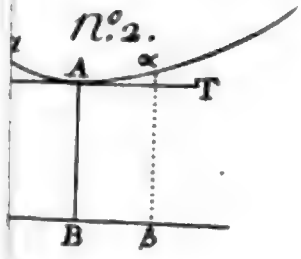
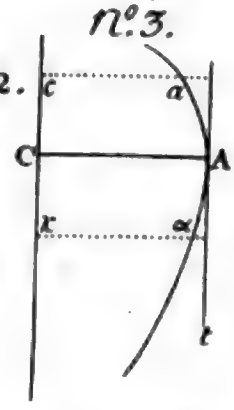


Fig. 161.

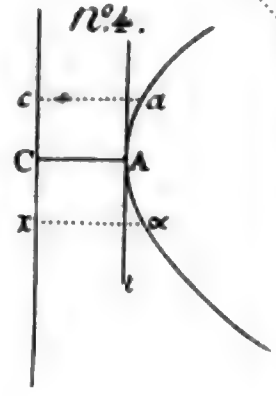
Fig. 162.



N°. 2.



N°. 3.



N°. 4.

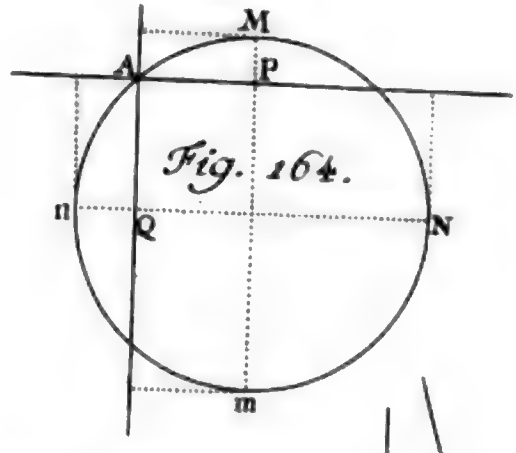


Fig. 164.

Fig. 166.

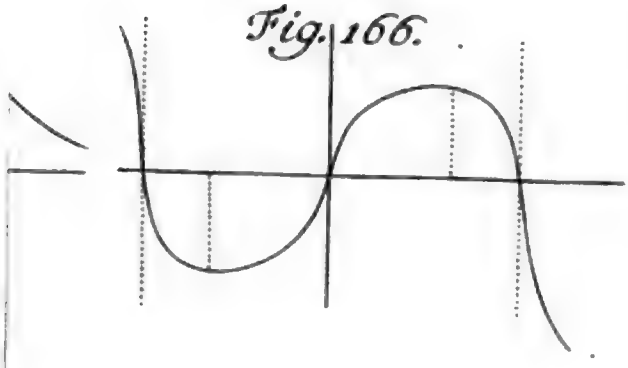


Fig. 167.

Digitized by Google

Ch. XI. §. 197. vant le but propoſé, peuvent être repréſentées par les ordonnées d'une Courbe, qui ſera algébrique ſi la Loy de leurs raports s'exprime par une équation algébrique; & il ne s'agit que de déterminer la plus grande ou la plus petite de ces ordonnées. PLANCHE XXII.

Ceci s'éclaircira par deux Exemples, l'un très ſimple, l'autre un peu plus compoſé.

Exemple I. On demande quel eſt le plus grand Rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans un Cercle donné ADBE. Fig. 168.

Soit QRST le Rectangle cherché. Si on mène les diamétres AB, DE parallèles aux côtés du Rectangle, il eſt clair qu'ils le diviſeront en quatre Rectangles égaux & ſemblables, tels que CPQN. Donc le quadruple de CPQN eſt le plus grand Rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans le Cercle : c'eſt un *Maximum.* Et CPQN eſt meſuré par le produit de CP & de PQ, qui ſont les coordonnées perpendiculaires du Cercle, l'Origine étant priſe au centre C. Soit r le raïon, x l'abſciſſe CP, l'ordonnée PQ ſera $\sqrt{(rr - xx)}$ [§. 7]. Ainſi $x\sqrt{(rr-xx)}$, produit des coordonnées CP, PQ, repréſente le Rectangle CPQN, & ſon quadruple $4x\sqrt{(rr-xx)}$ le Rectangle QRST. Cette grandeur $4x\sqrt{(rr-xx)}$ doit donc être la *plus grande* entre ſes ſemblables, c'eſt-à-dire, qu'on cherche la valeur d'x qui rend $4x\sqrt{(rr-xx)}$ un *Maximum.* Pour la trouver, on ſuppoſera une lettre y proportionelle à $4x\sqrt{(rr-xx)}$, égale, par exemple, à $\frac{4x\sqrt{(rr-xx)}}{4a}$, & on imaginera la Courbe CMB repréſentée par l'éq : $y = \frac{4x\sqrt{(rr-xx)}}{4a}$, ou $aayy - rrxx + x^4 = 0$, deſorte que l'ordonnée PM ſera proportionelle

Planche XXII. nelle au Rectangle QRST dont le côté QT paſſe par l'extrémité P de l'abſciſſe CP [x]. Ainſi l'abſciſſe CP qui donne la plus grande ordonnée PM, détermine le plus grand Rectangle QRST. Pour avoir cette abſciſſe, on transformera l'éq : $aayy - rrxx + x^4 = 0$, en ſubſtituant $x + z$ à x & $y + u$ à y. Le prémier Rang de cette Transformée eſt $(2auy)u + (-2rrx + 4x^3)z$. Egalant à zéro le coëfficient de z, on aura $4x^3 - 2rrx = 0$, qui a trois racines $x = 0$, $x = +\sqrt{\frac{1}{2}rr}$, $x = -\sqrt{\frac{1}{2}rr}$. La prémiére, ſubſtituée dans l'équation de la Courbe, donne $y = 0$. Mais cette valeur d'y fait auſſi évanouïr le coëfficient d'u dans le prémier Rang de la Transformée. Elle marque donc, non un *Maximum*, mais un Point multiple à l'Origine [§. 171]. Les deux autres valeurs d'x, ſç. + & $-\sqrt{\frac{1}{2}rr}$, ſubſtituées dans la propoſée, donnent $yy = \frac{\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{4}r^4}{aa} = \frac{r^4}{4aa}$, ou $y = \frac{rr}{2a}$. Cette valeur d'y n'anéantit point le coëfficient d'u. Elle donne donc le *Maximum* M, dont l'ordonnée $PM = \frac{rr}{2a}$, & l'abſciſſe $CP = \pm\sqrt{\frac{1}{2}rr}$. Ainſi le plus grand Rectangle qu'on puiſſe inſcrire dans un Cercle, c'eſt le Quarré. Car CP [x] étant $= \sqrt{\frac{1}{2}rr}$, PQ [$\sqrt{(rr - xx)}$] eſt auſſi $= \sqrt{\frac{1}{2}rr}$. Donc CPQN, & par conſéquent QRST, eſt un Quarré. Ce qu'on démontre auſſi facilement dans la Géométrie élémentaire.

Ch XI. §. 177.

Fig. 169. *Exemple II.* Les deux Points A, B étant donnés à égales diſtances du centre C, ſur le diamétre HI du demi-cercle HLI ; on demande quel eſt le Point E de la demi-circonférence, duquel menant les trois droites EA, EC, EB, la différence des angles AEC, BEC eſt la plus grande ?

Soit

Ch. XI. § 197. Soit E le Point cherché, & ſi on mène la Droite EF, qui fait avec EC l'angle CEF égal à CEA, l'angle FEB ſera la différence des angles AEC, BEC; & doit par conſéquent être un *Maximum*. Mais comme la grandeur d'un angle ne ſe calcule pas aiſément, & que le plus grand angle a le plus grand Sinus & réciproquement, on cherchera le Point E, qui donne l'angle BEF dont le Sinus eſt *le plus grand*. Abaiſſant du Point B ſur EF la perpendiculaire BG, elle eſt le Sinus de l'angle BEF, BE étant le Sinus total. Il faut donc que la raiſon de BG à BE, ou la fraction $\frac{BG}{BE}$ ſoit un *Maximum*. Planche XXII.

Soit le raïon $CE = r$, CA ou $CB = a$, CD [l'abſciſſe du Point cherché E] $= x$, ſon ordonnée $DE = \sqrt{(rr - xx)}$. Soit de plus $CF = t$. Donc $AE = \sqrt{(AD^2 + DE^2)} = \sqrt{(aa + rr + 2ax)}$, $BE = \sqrt{(BD^2 + DE^2)} = \sqrt{(aa + rr - 2ax)}$, $EF = \sqrt{(FD^2 + DE^2)} = \sqrt{(rr + tt - 2xt)}$. Et puiſque CE coupe en deux également l'angle AEF, on aura [Eucl. VI. 3] $AE : EF = AC : CF$, ou $AE^2 : EF^2 = AC^2 : CF^2$, &, mettant les valeurs analytiques, $aa + rr + 2ax : rr + tt - 2xt = aa : tt$ ou, égalant le produit des extrémes à celui des moyennes, $aatt + rrtt + 2axtt = aarr + aatt - 2aaxt$, ſoit $2axtt + 2aaxt = aarr - rrtt$, &, diviſant de part & d'autre, par $a + t$, $2axt = arr - rrt$, ou $t = \frac{arr}{rr + 2ax}$. Donc $BF\,[a - t] = \frac{2aax}{rr + 2ax}$, & $EF^2\,[= rr + tt - 2xt] = \frac{aa + rr + 2ax}{(rr + 2ax)^2} r^4$. BG étant perpendiculaire à EF, les triangles rectangles BFG, DFE, qui ont l'angle commun F, ſont ſemblables, & donnent cette proportion $EF^2\,[\frac{aa + rr + 2ax}{(rr + 2ax)^2} r^4] : ED^2\,[rr - xx] = BF^2$

PLANCHE XXII. $= BF^2 \left[\frac{4a^4xx}{(rr+2ax)^2}\right] : BG^2$. Donc $BG^2 = \frac{4a^4rrxx - 4a^4x^4}{(aa+rr+2ax)r^4}$ CH. XI. §. 197.

& $\frac{BG^2}{BE^2} = \frac{4a^4rrxx - 4a^4x^4}{r^4(aa+rr+2ax)(aa+rr-2ax)} = \frac{a^4}{r^4} \times \frac{4rrxx - 4x^4}{(aa+rr)^2 - 4aaxx}$, qui doit être un *Maximum*. Car ſi la fraction $\frac{BG}{BE}$ eſt un *Maximum*, comme le ſuppoſe la Queſtion propoſée, ſon quarré $\frac{BG^2}{BE^2}$ ſera auſſi un *Maximum*. Et il le ſera pareillement en le diviſant par la quantité conſtante $\frac{a^4}{r^4}$, puiſque le *Maximum* dépend uniquement de la variable x. Il s'agit donc de déterminer la variable x, qui rend la fraction $\frac{4rrxx - 4x^4}{(aa+rr)^2 - 4aaxx}$ un *Maximum*.

Pour cela, on ſuppoſera cette fraction égale à une fraction $\frac{y}{a}$, & on cherchera la plus grande ordonnée de la Courbe repréſentée par l'éq: $\frac{y}{a} = \frac{4rrxx - 4x^4}{(aa+rr)^2 - 4aaxx}$, ou $(aa+rr)^2 y - 4aaxxy - 4arrxx + 4ax^4 = 0$. Le prémier Rang de la Transformée ſera $((aa+rr)^2 - 4aaxx)u + (-8aaxy - 8arrx + 16ax^3)z$. Si on égale à zéro le coëfficient de z, on aura $y = \frac{2xx - rr}{a}$; & cette valeur ſubſtituée dans l'équation de la Courbe la change en $-4aax^4 + 2(aa+rr)^2 xx - rr(aa+rr)^2 = 0$, dont les racines ſont les valeurs d'x qui donnent le *Maximum* cherché. Or cette équation du 4e. dégré ſe réduit en deux autres $2xx - (aa+rr) = 0$, &

$-2aaxx$

Cir. XI. $-2aaxx+rr(aa+rr)=0$. Ainſi ſes quatre racines ſont $x=+\sqrt{(\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}rr)}$, $x=-\sqrt{(\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}rr)}$, $x=+\sqrt{(\frac{1}{2}rr+\frac{r^4}{2aa})}$, $x=-\sqrt{(\frac{1}{2}rr+\frac{r^4}{2aa})}$. Les ordonnées qui répondent à ces abſciſſes, ſont $y=a$, $y=a$, $y=\frac{r^4}{a^3}$, $y=\frac{r^4}{a^3}$. Les deux prémiéres abſciſſes & les deux prémiéres ordonnées donnent deux *Maxima*; les deux derniéres donnent deux *Minima*, comme on le voit par la Figure de la Courbe tracée dans la *Fig.* 170. Mais ces *Minima* n'apartiennent point au Problême propoſé, & ne viennent ici que parce que l'équat: $\frac{y}{a}=\frac{4rrxx-4x^4}{(aa+rr)^2-4aaxx}$ repréſente toute la Courbe. Pour la Queſtion propoſée, il ſuffit d'en conſidérer la portion qui eſt compriſe dans le Cercle HLI, puiſque le Point E, devant être pris ſur la circonférence, ne peut avoir une abſciſſe CD plus grande que le raïon. Les *Maxima* cherchez ſont donc ceux qui ont l'abſciſſe $x=+$ ou $-\sqrt{(\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}rr)}$, & qu'on peut trouver ainſi. Qu'on décrive ſur le raïon CI le quarré CINL; qu'on mène la diagonale CN, & qu'on prenne ſur cette diagonale, la partie CM égale à AL, hypothenuſe du triangle ACL, qui a pour baſe AC [a], & pour hauteur CL [r]. Enſuite, qu'on abaiſſe du Point M ſur le raïon CI la perpendiculaire MD. Elle coupera la circonférence au Point cherché E. Car CN [$\sqrt{2rr}$]: CI [r] = CM [$\sqrt{(aa+rr)}$]: CD [$\sqrt{(\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}rr)}$]. On trouve de même, dans l'autre quart de cercle HLC, le Point e, qui eſt le *Maximum* dont l'abſciſſe $Cd=-\sqrt{(\frac{1}{2}aa+\frac{1}{2}rr)}$.

PLANCHE CXXII. §. 197.

PLANCHE XXII. 198. CES deux Exemples ſuffiſent pour faire entendre la maniére d'employer cette Méthode dans les Cas où on doit l'appliquer. Les Livres qui en traittent en ſont pleins, & il eſt aiſé de s'en propoſer un grand nombre. Remarquons ſeulement que la détermination des *Maxima* & des *Minima* ſert beaucoup dans l'examen du cours d'une Ligne, parce que ces Points, lors même qu'ils n'ont rien de ſingulier en eux-mêmes, ne laiſſent pas d'être des Points remarquables de la Courbe raportée à ſes Axes. Car c'eſt à ces Points que viennent ſe réunir deux Branches de la Courbe, & ſouvent ceux où l'une des coordonnées ceſſe d'être réelle & devient imaginaire, ou réciproquément. Ayant donc trouvé les *Maxima* & les *Minima* d'abſciſſes, on peut les regarder comme des limites, entre leſquelles prenant des abſciſſes, on examinera quelles ſont celles dont les ordonnées ſont réelles, & puiſque le cours d'une Courbe eſt continu [§. 19], on ſera ſûr que toutes les abſciſſes, qui ſe terminent dans le même intervalle, ont auſſi des ordonnées réelles. Que ſi, au contraire, une ſeule abſciſſe d'un de ces intervalles a ſes ordonnées imaginaires, toutes celles du même intervalle ont auſſi leurs ordonnées imaginaires. Et il en eſt de même, *mutatis mutandis*, des *Maxima* & *Minima* d'ordonnées *. CH. XI. §. 198.

Fig. 170. Le *Ier. Exemple* ſera celui de la Courbe que nous avons déjà conſidérée au §. préced. *Ex. II.* Son équation eſt $4ax^4 - 4arrxx - 4a^3xxy + (aa+rr)^2 y = 0$. Puiſqu'$y$ n'y monte qu'au prémier dégré, chaque abſciſſe a une ordonnée: mais pour ſavoir les abſciſſes de chaque ordonnée, on cherchera les *Maxima* & *Minima* d'ordonnées. On a trouvé ci-deſſus que c'étoient les Points qui ont pour abſciſſes & pour ordonnées $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}rr)}$

* ROLLE, *Mem. de l'Acad.* 1703. pag. 152.

Digitized by Google

CH. XI. §. 198. PLANCHE XXII.

$+\frac{1}{2}rr$) & $y=a$; $x=\pm\sqrt{(\frac{1}{2}rr+\frac{r^4}{2aa})}$ & $y=\frac{r^4}{a^3}$. On partagera donc l'Axe des ordonnées en quatre intervalles. Le prémier depuis l'Origine, ou le zéro, à l'infini du côté négatif. Le ſecond depuis l'Origine juſqu'à l'ordonnée $y=a$. Le troiſiéme depuis l'extrémité de l'ordonnée $y=a$ juſqu'à l'extrémité de l'ordonnée $y=\frac{r^4}{a^3}$. Et le quatriéme depuis l'extrémité de cette ordonnée $y=\frac{r^4}{a^3}$, juſqu'à l'infini du côté poſitif. On prendra une ordonnée dans chacun de ces quatre intervalles, & on examinera combien elle a d'abſciſſes.

Ainſi prenant du côté négatif $y=-a$, l'équation de la Courbe ſe change en cette égalité $4ax^4-4arrxx+4a^3xx-a(aa+rr)^2=0$, ou, diviſant par $4a$, $x^4-(rr-aa)xx-a(rr+aa)^2=0$, qui n'a que deux racines réelles, comme on le voit par le §. 60, ou ſimplement par la réſolution de cette équation à la maniére de celles du ſecond dégré. On lui trouve quatre racines, deux réelles $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}(rr-aa)+\sqrt{(\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{2}a^4)})}$ & deux imaginaires $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}(rr-aa)-\sqrt{(\frac{1}{2}r^4+\frac{1}{2}a^4)})}$. Donc du côté des ordonnées négatives, chaque ordonnée n'a que deux abſciſſes, la Courbe n'a que deux Branches.

Si on prend, du côté poſitif, dans l'intervalle entre 0 & a, une ordonnée $y=\frac{1}{2}a$, l'Egalité ſera $x^4-(rr+\frac{1}{2}aa)xx+\frac{1}{8}(rr+aa)^2=0$, qui a quatre racines réelles $x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{(2rr+aa\pm\sqrt{(2r^4-a^4)})}$. Donc les ordonnées poſitives moindres qu'a ont quatre abſciſſes: la Courbe, dans cet intervalle, a quatre Branches.

Dans l'intervalle entre a & $\frac{r^4}{a^3}$, on peut prendre l'or-

PLANCHE XXII. donnée $y = \frac{1}{2}a + \frac{r^4}{2a^3}$, & l'équation de la Courbe ſera changée en cette Egalité $x^4 - (\frac{1}{2}aa + rr + \frac{r^4}{2aa})xx + \frac{1}{4}(rr + aa)^2(\frac{r^4}{a^4} + 1) = 0$, dont toutes les racines $\pm\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{2}aa + rr + \frac{r^4}{2aa}} = \sqrt{(-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}r^4 - \frac{r^8}{4a^4})})$ ſont imaginaires. Car la grandeur $-\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}r^4 - \frac{r^8}{4a^4}$, qui eſt ſous le ſigne radical, eſt eſſentiellement imaginaire, étant la négative du quarré de $\frac{1}{2}aa - \frac{r^4}{2aa}$. Donc, dans l'intervalle entre les ordonnées a & $\frac{r^4}{a^3}$, il n'y a point d'abſciſſes & par conſéquent point de Courbe. Ce qui fait voir que les extrémités des ordonnées a ſont des *Maxima*, & les extrémités des ordonnées $\frac{r^4}{a^3}$ des *Minima*. CH. XI. §. 191.

Qu'on prenne enfin, au-delà de la limite $\frac{r^4}{a^3}$, une ordonnée $a + \frac{r^4}{a^3}$; &, pour cette ordonnée, l'Egalité ſera $x^4 - (aa + rr + \frac{r^4}{aa})xx + \frac{1}{4}(rr + aa)^2(\frac{r^4}{a^4} + 1) = 0$, qui a quatre racines réelles $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}aa + \frac{r^4}{2aa})}$, & $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}aa + rr + \frac{r^4}{2aa})}$. Donc dès l'ordonnée $\frac{r^4}{a^3}$ juſqu'à l'infini, chaque ordonnée a quatre abſciſſes.

Ainſi la Courbe a ſix Branches infinies, deux du côté négatif

CH. XI. §. 198. négatif & quatre du côté positif, desquelles il est aisé de voir, par les §§. 141 & 142, que deux sont Paraboliques, & deux Hyperboliques, ayant pour Asymptotes les ordonnées des abscisses $\pm\frac{aa+rr}{2a}$, le long desquelles se glissent aussi les deux Branches qui se jettent du côté des ordonnées négatives. PLANCHE XXII.

Exemple II. Si on cherche les limites d'abscisses & d'ordonnées de la Courbe désignée par l'éq : $xxy - 2ayy - aax = 0$, on aura, pour le prémier Rang de la Transformée, $(xx-4ay)u+(2xy-aa)z$. Qu'on égale à zéro le coëfficient d'u, pour avoir les limites d'abscisses, on trouvera $y=\frac{xx}{4a}$; valeur, qui change l'équation de la Courbe en $\frac{x^4}{8a}-aax=0$, qui n'a que deux racines réelles $x=0$, & $x=2a$. Ainsi les limites des abscisses sont 0 & $2a$, auxquelles répondent les ordonnées 0, & a, comme le fait voir l'éq : $y=\frac{xx}{4a}$. Donc l'Origine A, & le Point D [qui a pour ordonnée $DC=a$ & pour abscisse $CA=2a$] sont les Points de la Courbe desquels la Tangente est parallèle aux ordonnées. Fig. 171.

Qu'on prenne des abscisses hors & entre ces limites 0 & $2a$. Qu'on prenne d'abord, par ex. $x=-a$, & l'équation de la Courbe sera transformée en $aay-2ayy+a^3=0$, ou $yy-\frac{1}{2}ay-\frac{1}{2}aa=0$, qui a deux racines réelles $-\frac{1}{2}a$ & $+a$. Donc chaque abscisse négative a deux ordonnées : la Courbe jette deux Branches infinies du côté des abscisses négatives.

Qu'on prenne ensuite une abscisse entre 0 & $2a$, comme,

PLANCHE XXII. me, par ex. a; ce qui transforme l'équation de la Courbe en $yy - \frac{1}{2}ay + \frac{1}{2}aa = 0$, dont les racines $+\frac{1}{4}a \pm \frac{1}{4}a\sqrt{-7}$ sont imaginaires. Donc toute abscisse positive, moindre que $2a$, n'a que des ordonnées imaginaires, & la Courbe manque entiérement entre l'Axe des ordonnées & l'ordonnée CD. CH. XI. §. 198.

Enfin si on prend une abscisse plus grande que $2a$, comme $4a$, on réduira l'équation de la Courbe à $yy - 8ay + 2aa = 0$, qui a deux racines réelles, $4a \pm a\sqrt{14}$. Donc toute abscisse plus grande que $2a$ a deux ordonnées. Ainsi il part du Point D deux Branches qui s'étendent à l'infini du côté positif.

On aura les limites des ordonnées, en égalant à zéro le coëfficient de z, ce qui donne $x = \frac{aa}{2y}$, & par la substitution dans la Proposée $a^3 = -8y^3$, qui n'a qu'une seule racine $y = -\frac{1}{2}a$. Il n'y a donc qu'une limite, $AE = -\frac{1}{2}a$, dont l'abscisse $EF = -a$ [puisque $y = -\frac{1}{2}a$ donne $x \left[= \frac{aa}{2y}\right] = -a$], touche la Courbe.

Qu'on prenne deux ordonnées de part & d'autre de cette limite $-\frac{1}{2}a$, par ex. a & $-a$, & l'équation de la Courbe se réduira à ces deux Egalités $xx - ax - 2aa = 0$, & $xx + ax + 2aa = 0$. Les racines $2a$ & $-a$ de la prémiére sont réelles : Les racines $-\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-7}$ de la seconde sont imaginaires. Donc toute ordonnée qui descend au-dessous de $AE = -\frac{1}{2}a$ n'a point d'abscisses. Mais toute autre ordonnée a deux abscisses réelles. Ce qui s'acorde très-bien avec ce qu'on peut démontrer d'ailleurs sur le cours de cette Ligne.

Fig. 172. *Exemple III.* Les limites de la Courbe désignée par l'éq : $x^3yy - aaxxy + b^5 = 0$ se déterminent en égalant

CH. XI. §. 198. lant ſucceſſivement à zéro les coëfficients d'u & de z dans le prémier Rang de la Transformée, qui eſt $(2x^3y - aaxx)u + (3xxyy - 2aaxy)z$. L'éq : $2x^3y - aaxx = 0$, qui donne les limites des abſciſſes, a deux racines, $x = 0$, & $y = \frac{aa}{2x}$. La prémiére ſuppoſe y infinie, ce qui montre que l'Axe des ordonnées eſt une Aſymptote [§. 138]. L'autre, ſubſtituée dans l'équation de la Courbe, la réduit à $x = \frac{4b^5}{a^4}$, d'où l'on tire $y\,[= \frac{aa}{2x}] = \frac{a^6}{8b^5}$. Ainſi l'Origine A, & l'ordonnée CD $[= \frac{a^6}{8b^5}$, qui a ſon abſciſſe AC $= \frac{4b^5}{a^4}]$ ſont les limites des abſciſſes. PLANCHE XXII.

Si on prend, au-delà de la prémiére limite, $x = -b$, on aura l'Egalité $yy + \frac{aay}{b} - bb = 0$, qui a deux racines réelles $\frac{-aa \pm \sqrt{(a^4 + 4b^4)}}{2b}$. Donc toute abſciſſe négative a deux ordonnées.

Si on prend, entre les deux limites, $x = \frac{2b^5}{a^4}$, on aura l'Egalité $yy - \frac{a^6}{2b^5}y + \frac{a^{12}}{8b^{10}} = 0$, dont les racines $\frac{1 \pm \sqrt{-1}}{4} \times \frac{a^6}{b^5}$ ſont imaginaires. Donc la Courbe manque entre l'Axe AB & l'ordonnée CD.

Enfin, ſi on prend, au-delà de la ſeconde limite, $x = \frac{5b^5}{a^4}$, on aura l'Egalité $yy - \frac{a^6}{5b^5}y + \frac{a^{12}}{125b^{10}}$, qui a deux racines réelles $\frac{1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}}}{10} \times \frac{a^6}{b^5}$. Donc au-delà de l'or-

PLANCHE XXII. donnée CD la Courbe a deux Branches infinies. CH. XI. §. 191.

L'éq. $3xxyy - 2aaxy = 0$, qui détermine les limites des ordonnées, a trois racines $y = 0$, $x = 0$, & $x = \frac{2aa}{3y}$. Les deux prémiéres indiquent que les Axes ſont des Aſymptotes, & la troiſiéme donne, par l'équation de la Courbe, $y = \frac{4a^6}{27b^5}$, d'où l'on tire $x = \frac{9b^5}{a^4}$. Ainſi l'Origine A & le point E, [dont l'abſciſſe $BE = \frac{9b^5}{a^4}$ & l'ordonnée $AB = \frac{4a^6}{27b^5}$] ſont les limites des ordonnées.

Qu'on prenne, hors de la prémiére, $y = -b$; on aura l'égalité $-b^3 = 0 + \frac{aa}{b}xx + x^3$, qui n'a [§. 59. V. 1] qu'une ſeule racine réelle. Donc toute ordonnée négative n'a qu'une abſciſſe.

Si on prend, entre les deux limites, $y = \frac{a^6}{27b^5}$, on aura l'Egalité $-\frac{729b^{15}}{a^{12}} = 0 - \frac{27b^5}{a^4}xx + x^3$, qui a trois racines réelles [§. 59. V. 3]. Donc toute ordonnée poſitive, moindre que AB, a trois abſciſſes.

Mais ſi on prend, au-delà de la ſeconde limite AB, $y = \frac{a^6}{b^5}$, on aura l'Egalité $-\frac{b^{15}}{a^{12}} = 0 - \frac{b^5}{a^4}xx + x^3$, qui n'a [§. 59. VI. 1] qu'une racine réelle. Donc les ordonnées poſitives, plus grandes que AB, n'ont qu'une abſciſſe.

Cela s'acorde parfaitement avec ce qui a été déterminé d'une toute autre maniére [§. 22] ſur cette Courbe.

Exemple.

Digitized by Google

Ch. XI. § 198. *Exemple IV.* Joignons encore l'Exemple de la Courbe que repréſente l'éq : $y^4 - 2axyy - 3aaxx + x^4 = 0$. PLANCHE XXII. *Fig.* 173.

Le prémier Rang de la Transformée eſt $(4y^3 - 4axy)u + (-2ayy - 6aax + 4x^3)z$. Les limites des abſciſſes ſe déterminent donc par l'éq : $4y^3 - 4axy = 0$, qui a deux racines $y = 0$ & $yy = ax$. Celle-là transforme l'équation de la Courbe en $x^4 - 3aaxx = 0$, dont les racines ſont $0, 0, +a\sqrt{3}, -a\sqrt{3}$: Celle-ci la change en $x^4 - 4aaxx = 0$, dont les racines ſont $0, 0, +2a, -2a$. Les limites des abſciſſes ſont donc $2a, a\sqrt{3}, 0, -a\sqrt{3}, -2a$, dont les ordonnées ſont $\pm a\sqrt{2}, 0, 0, 0, \pm a\sqrt{-2}$. C'eſt hors & entre ces limites qu'il faut prendre des abſciſſes, pour voir quels ſont les intervalles où elles ont des ordonnées réelles, quels ſont ceux où elles en ont d'imaginaires.

Qu'on prenne d'abord une abſciſſe plus grande que $2a = AC$, comme $x = 3a$, & l'Egalité $y^4 - 6aayy + 54a^4 = 0$, qui réſulte de cette ſuppoſition, n'ayant que des racines imaginaires $\pm a\sqrt{(3 \pm 3\sqrt{-5})}$, on conclura qu'au-delà de l'ordonnée DCd, la Courbe manque entiérement.

Qu'on prenne enſuite une abſciſſe $x = a\sqrt{\frac{7}{2}}$, moyenne entre $2a = AC$ & $a\sqrt{3} = AB$, & on aura l'Egalité $y^4 - 2aayy\sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{7}{4}a^4 = 0$, dont les quatre racines $\pm a\sqrt{(\sqrt{\frac{7}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{4}})}$ ſont réelles. Donc les abſciſſes, qui ſe terminent entre B & C, ont quatre ordonnées.

Après cela qu'on choiſiſſe une abſciſſe $x = a$, poſitive, mais moindre que $AB = a\sqrt{3}$, & l'Egalité $y^4 - 2aayy - 2a^4 = 0$, qui lui convient, ayant deux racines réelles $\pm a\sqrt{(1 + \sqrt{3})}$ & deux racines imaginaires $\pm a\sqrt{(1 - \sqrt{3})}$, on conclura qu'entre l'Origine A & le Point B les abſciſſes n'ont que deux ordonnées.

PLANCHE XXII. Il en eſt de même des abſciſſes entre l'Origine A & le Point b. Car ſi on prend une abſciſſe $x = -a$, négative, & moindre que $Ab = -a\sqrt{3}$, on aura l'Egalité $yy + 2aayy - 2a^4 = 0$, qui a deux racines réelles $\pm a\sqrt{(-1+\sqrt{3})}$, & deux racines imaginaires $\pm a\sqrt{(-1-\sqrt{3})}$. CH. XI. §. 191.

Mais ſi l'on prend une abſciſſe $x = -a\sqrt{\frac{7}{4}}$, entre $Ab = -a\sqrt{3}$ & $Ac = -2a$, l'Egalité $y^4 + 2aayy\sqrt{\frac{7}{4}} + \frac{7}{4}a^4 = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $\pm a\sqrt{(-\sqrt{\frac{7}{4}} \pm \sqrt{\frac{7}{4}})}$, fait voir que la Courbe manque dans l'intervalle bc.

Elle manque auſſi dès le Point c juſqu'à l'infini du côté négatif : comme on le voit en prenant une abſciſſe $x = -3a$ plus négative que $Ac = -2a$; l'Egalité qui en réſulte, $y^4 + 6aayy + 54a^4 = 0$, n'ayant que des racines imaginaires $\pm a\sqrt{(-3 \pm 3\sqrt{-5})}$.

La Courbe eſt donc toute compriſe entre b & C. Ses abſciſſes, qui ſe terminent entre b & B, n'ont que deux ordonnées; celles, dont l'extrémité tombe entre B & C, en ont quatre.

Pour déterminer les limites des ordonnées, on a l'éq: $-2ayy - 6aax + 4x^3 = 0$. Si on ſubſtituë, dans l'équation de la Courbe, à yy ſa valeur $\frac{2x^3}{a} - 3ax$ tirée de cette équation-ci, on aura $\frac{4x^6}{aa} - 15x^4 + 12aaxx = 0$, dont les racines ſont $x = 0$, $x = 0$, $x = +\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$ = à peu près $1.61a$, $x = -\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$, $x = +\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}$ = à peu près $1.075a$, $x =$

$-\frac{1}{2}a$

CH. XI. §. 198. PLANCHE XXII.

$-\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}$, auxquelles répondent les ordonnées

$y=0$, $y=0$, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}=$ à peu près $1.875a$, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(-\frac{3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$, grandeur imaginaire, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{3-\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$ auſſi imaginaire, $y=\pm\frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+33}{2}})}=$ à peu près $0.872a$. Ainſi les limites des ordonnées ſont $1.875a$, $0.872a$, 0, $-0.872a$, $-1.875a$, les mêmes du côté négatif que du côté poſitif. En effet, comme l'équation n'a point de puiſſance impaire d'y, l'Axe des abſciſſes eſt un Diamétre [§. 70]. Il ſuffira donc de prendre, dans leurs intervalles, des ordonnées poſitives; parce qu'on fera le même jugement de celles qu'on prendroit dans les intervalles des ordonnées négatives.

Soit donc $y=2a$, une ordonnée plus grande que $1.875a=$ AF. L'Egalité qui en réſulte eſt $16a^4-8a^3x-3aaxx+x^4=0$, ou $-16a^4=-8a^3x-3aaxx+x^4$. Cette équation a d'abord deux racines imaginaires [§. 60], puiſque 27 fois le quarré de $-8a^3$, plus 8 fois le cube de $-3aa$, fait une grandeur poſitive, $+1512a^6$. Mais les deux autres racines ſont auſſi imaginaires. Car ſi on calcule le coëfficient α de l'équation marquée P dans ce même §. 60, on trouvera auſſi une grandeur poſitive, $+892a^{12}$. Donc les quatre racines de l'Egalité $16a^4-8a^3x-3aaxx+x^4=0$ ſont imaginaires. Ainſi la Courbe manque au-delà de la limite FH. Et comme elle manque, par la même raiſon, au-delà de fh; elle eſt toute compriſe entre les limites FH, fh.

Soit enſuite $y=a$ une ordonnée moyenne entre

PLANCHE XXII. AF $=$ 1.875a & AE $=$ 0.872a, & on aura l'Egalité $a^4 - 2a^3x - 3aaxx + x^4 = 0$, ou $-a^4 = -2a^3x - 3aaxx + x^4$. Si, par les coëfficients de cette équation, on calcule ceux de l'Egalité $\alpha = \beta z + \gamma zz + z^3$ marquée *P* au §. 60, on aura $\alpha = -83a^{12}$. Ce coëfficient négatif fait voir que l'Egalité $a^4 - 2a^3x - 3aaxx + x^4 = 0$ a deux racines réelles & deux imaginaires. Donc les ordonnées, qui ſe terminent entre FH & EG, ou entre fh & eg, ont chacune deux abſciſſes. CH. XI. §. 198.

Enfin, ſi on prend l'ordonnée $y = \frac{1}{2}a$, plus petite que AE $=$ 0.872a, on trouvera l'Egalité $-\frac{1}{256}a^4 = -a^3x - 3axx + x^4$, doù l'on calcule pour l'égalité *P*, $\frac{2089}{4032}a^{12} = \frac{721}{256}a^8z + \frac{65}{16}a^4zz + z^3$, dont les trois coëfficients α, β, γ, étant tous trois poſitifs, il ſuit [§. 60] que l'Egalité $-\frac{1}{256}a^4 = -a^3x - 3axx + x^4$ a ſes quatre racines réelles. Donc, toutes les ordonnées plus petite que AE, ou Ae, ont chacune quatre abſciſſes.

De tout cela il eſt aiſé de voir que la Courbe eſt finie, & compoſée de deux Feuilles, dont l'une a preſque la figure d'un cœur. De l'Origine A il part une Branche AH, qui va au Point H, *Maximum* d'ordonnées, dont l'abſciſſe HF $= \frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$, & l'ordonnée FA $= \frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$. De là elle paſſe au Point D, *Maximum* d'abſciſſes, qui a pour abſciſſe AC $= 2a$, & pour ordonnée DC $= a\sqrt{2}$. Elle vient enſuite au Point B, autre limite d'abſciſſes, ſitué à l'extrémité de l'abſciſſe AB $= a\sqrt{3}$. Son cours BdhA eſt préciſément ſemblable au-deſſous de l'Axe des abſciſſes. Mais à l'Origine A elle ſe reléve au-deſſus de cet Axe du côté des abſciſſes négatives; paſſe par le Point G, *Maximum* d'ordon-

CH. XI. §. 198. d'ordonnées, dont l'abſciſſe $GE = -\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{15-\sqrt{33}}{2}}$, & PLANCHE XXII. l'ordonnée $EA = \frac{1}{2}a\sqrt{(\frac{-3+\sqrt{33}}{2}\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}})}$; va de G en b, *Maximum* d'abſciſſes, qui ſe trouve à l'extrémité de l'abſciſſe $Ab = -a\sqrt{3}$; & décrit enfin, ſous l'Axe des abſciſſes, un arc b g A ſemblable à b G A.

199. ON PROPOSE de trouver & de déterminer les Points d'Inflexion d'une Courbe dont l'équation eſt donnée. Il eſt clair par les §§. 186 & 193, qu'il ne s'agit, l'Origine étant portée ſur un Point quelconque, que de déterminer x & y, de ſorte 1°. que ce Point ſoit un de ceux de la Courbe, 2°. que le prémier Rang de la Transformée diviſe le ſecond. On ſatisfait à la prémiére condition, en poſant l'Equation de la Courbe [§. 171]. Et pour ſatisfaire à la ſeconde, ſi $\beta u + \gamma z$ eſt le prémier Rang, & $\delta uu + \epsilon uz + \zeta zz$ le ſecond, on poſera l'éq: $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$. Car $\delta uu + \epsilon uz + \zeta zz$ étant diviſé par $\beta u + \gamma z$, il reſte $(\zeta - \frac{\epsilon\gamma}{\beta} + \frac{\delta\gamma\gamma}{\beta\beta})\,zz$, qui étant égalé à zéro, diviſé par zz, & multiplié par $\beta\beta$, donne $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$. On aura donc deux équations, par le moyen deſquelles on déterminera l'abſciſſe x & l'ordonnée y de chaque Point d'Inflexion, ſi la Courbe en a quelcun.

Mais comme ces Points peuvent être de double, triple, &c. Inflexion, il faut voir ſi le prémier Rang de la Transformée, qui diviſe le ſecond, n'en diviſe point d'ultérieurs. S'il diviſe un nombre impair de Rangs ſucceſſifs, le Point ſubit une Inflexion viſible: mais elle eſt inviſible, c'eſt un Serpentement, ſi le nombre des Rangs ſucceſſifs, à commencer par le ſecond, qui ſont diviſés par le prémier, eſt

PLANCHE XXII. est un nombre pair [§§. 166, 186, 193]. CH. XI. §. 198. Il faut encore examiner, si les valeurs d'x & d'y, qu'on a trouvées, ne sont point telles, qu'elles rendent β & γ égaux, chacun, à zéro. Alors le Point, qu'elles déterminent, est multiple. Or les valeurs d'x & d'y, qui donnent $\beta = 0$, & $\gamma = 0$, rendent nécessairement $\zeta\beta\beta - 2\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$. Ainsi les mêmes équations, qui donnent les Points d'Inflexion, donnent aussi les Points multiples; mais non pas réciproquement. Et c'est par-là qu'on les distingue.

Fig. 174. *Exemple I.* On demande, si la Courbe désignée par l'éq: $x^3 + bxx + aay = 0$, a des Points d'Inflexion, & où ils sont situés?

En substituant $x + z$ à x & $y + u$ à y, le prémier Rang de la Transformée sera $(aa)u + (3xx + 2bx)z$, & le second $(0)uu + (0)uz + (3x + b)zz$. On aura donc $\beta = aa$, $\gamma = 3xx + 2bx$, $\delta = 0$, $\epsilon = 0$, $\zeta = 3x + b$. Ainsi l'éq: $\zeta\beta\beta - 2\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$ se réduit à $(3x + b)a^4 = 0$, d'où l'on tire $x = -\frac{1}{3}b$; valeur, qui substituée dans l'équation de la Courbe, donne $y = -\frac{2b^3}{27aa}$. La Courbe proposée n'a donc qu'un seul Point d'Inflexion, dont l'abscisse est $-\frac{1}{3}b$ & l'ordonnée $\frac{-2b^3}{27aa}$.

Ce Point n'est pas multiple, puisque ces valeurs d'x & d'y n'anéantissent ni β [$= aa$], ni γ [$= 3xx + 2bx$]. Et ce n'est pas un Point de Serpentement, ni d'Inflexion multiple, puisque le prémier Rang $(aa)u + (3xx + 2bx)z$, réduit ici à $aau - \frac{1}{3}bbz$, ne divise pas le troisiéme $(0)u^3 + (0)u^2z + (0)uz^2 + (1)z^3$.

PLANCHE XXIII. Fig. 175. *Exemple II.* On propose la Courbe que représente l'éq: $ax^3 + by^3 + c^3 = 0$, & on demande où sont situés

Fig. 169.

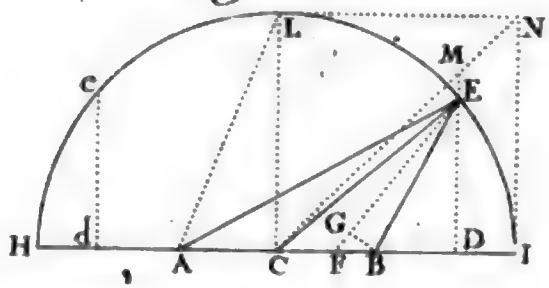


Fig. 170.

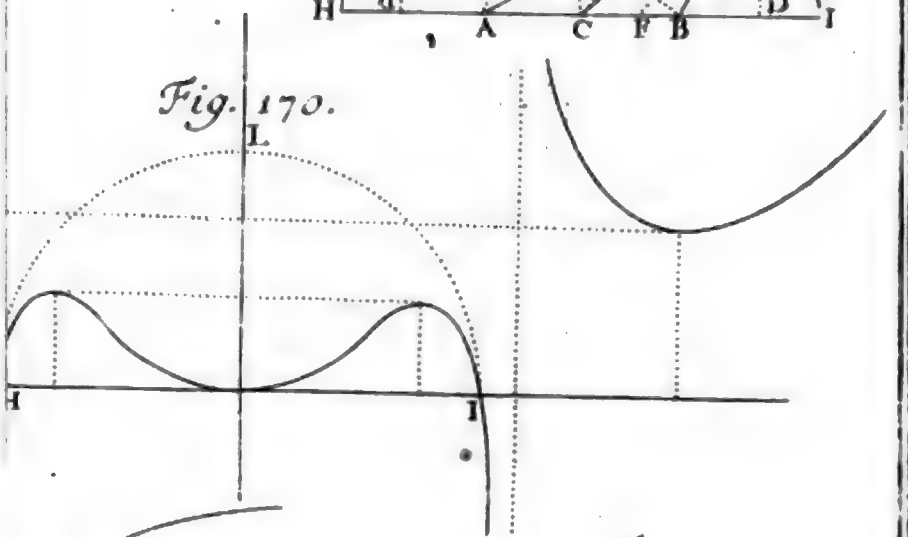


Fig. 172.

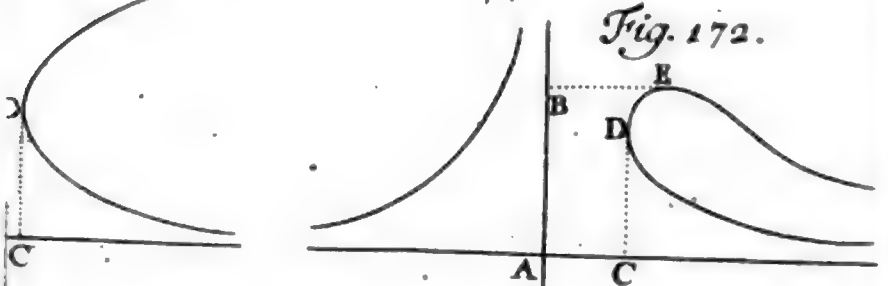
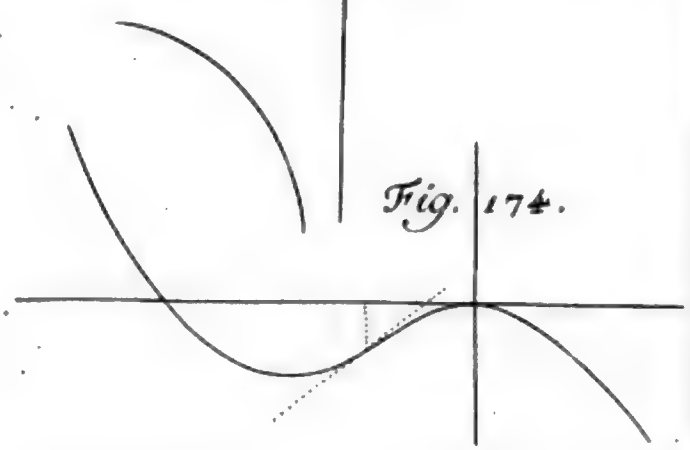


Fig. 174.



Digitized by Google

Ch. XI. §. 199. situés les Points d'Inflexion qu'elle peut avoir ? Planche XXIII.

Les deux prémiers Rangs de la Transformée sont $(3by^2)u + (3ax^2)z$ & $(3by)uu + (0)uz + (3ax)zz$. L'équation, qu'il faut combiner avec celle de la Courbe, est donc $3by(3ax^2)^2 + 3ax(3by^2)^2 = 0 = 27aabx^4y + 27abbxy^4$, ou, divisant par $27ab$, $ax^4y + bxy^4 = 0$. Si on ôte cette équation de celle de la Courbe multipliée par xy, il restera $c^4xy = 0$, qui a deux racines $x = 0$, & $y = 0$. La prémiére substituée dans la Proposée donne $by^3 + c^4 = 0$, ou $y = -c\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$. La seconde donne $ax^3 + c^4 = 0$, ou $x = -c\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$. Ainsi la Courbe a deux Points d'Inflexion, l'un à l'extrémité de l'ordonnée $AB = -c\sqrt[3]{\frac{c}{b}}$, l'autre à l'extrémité de l'abscisse $AC = -c\sqrt[3]{\frac{c}{a}}$. Car il est aisé de voir que ces Points ne sont ni Points multiples, ni Points de Serpentement.

Exemple III. Soit proposée la Courbe, dont l'équation est $axy^2 + bx^2y + c^4 = 0$. On demande, si elle a des Points d'Inflexion ? Fig. 176.

On cherchera, pour cet effet, les deux prémiers Rangs de la Transformée. Ce sont $(2axy + bxx)u + (ayy + 2bxy)z$ & $(ax)uu + (2ay + 2bx)uz + (by)zz$. Donc $\beta = 2axy + bxx$, $\gamma = ayy + 2bxy$, $\delta = ax$, $\epsilon = 2ay + 2bx$, $\zeta = by$; & l'éq : $\zeta\beta\beta - \epsilon\beta\gamma + \delta\gamma\gamma = 0$ est $by(2axy + bxx)^2 - (2ay + 2bx)(2axy + bxx)(ayy + 2bxy) + ax(ayy + 2bxy)^2 = 0 = -3a^2xy^4 - 6aabxxy^3 - 6abbx^3yy - 3b^4x^4y = 0$, qu'il faut combiner avec la Proposée. Cela se peut faire en diverses maniéres. On peut, par ex. multiplier la Proposée par $-3aayy - 3abxy - 3bbxx$, & ôtant le produit $-3c^4aayy -$

PLANCHE XXIII. $3c^4abxy - 3c^4bbxx - 3a^3xy^4 - 6aabx^2y^3 - 6abbx^3y^2$ CH. XI. § 199. $- 3b^3x^4$, qui eſt égal à zéro, de l'éq : $- 3a^3xy^4 - 6aabx^2y^3 - 6abbx^3yy - 3b^3x^4 = 0$, le reſte $3c^4aayy + 3c^4abxy + 3c^4bbxx$ ſera auſſi $= 0$, & diviſant par $3c^4$, $a^2y^2 + abxy + b^2x^2 = 0$, équation qui n'a que des racines imaginaires $ay = bx(-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3})$. La Courbe n'a donc aucun Point d'Inflexion.

Exemple IV. L'équation propoſée eſt $xyy + axx + b^3 = 0$. Elle repréſente deux Courbes aſſez différentes, ſelon que a & b ont les mêmes ou différents ſignes. Si a & b ſont poſitifs cette équation repréſente la Courbe deſſinée au n°. 1, & elle exprime auſſi la même Courbe, mais dans une ſituation renverſée, n°. 2, lorſque a & b ſont tous deux négatifs. Cette même équation exprime une autre Courbe, n°s. 3 & 4, lorſque a & b ont différents ſignes. Le n°. 3 marque ſa poſition, quand a eſt négatif & b poſitif. Sa poſition eſt celle du n°. 4, quand a eſt poſitif & b négatif. On demande les Points d'Inflexion de ces Courbes?

Fig. 177.

Les deux prémiers Rangs de la Transformée étant $(2xy)u + (yy + 2ax)z$ & $(x)uu + (2y)uz + (a)zz$, l'équation à combiner avec la Propoſée ſera $a(2xy)^2 - (2y)(2xy)(yy + 2ax) + x(yy + 2ax)^2 = 0 = 4aax^3 - 3xy^4$. Qu'on ajoûte cette équation à $3xy^4 + 3b^3yy - 3aax^3 - 3ab^3x = 0$, produit de la Propoſée par $3yy - 3ax$, on aura $3b^3yy + aax^3 - 3ab^3x = 0$. De cette équation multipliée par x, qu'on ôte la Propoſée multipliée par $3b^3$, il reſtera $a^2x^4 - 6ab^3x^2 - 3b^6 = 0$, qui a quatre racines $\pm b\sqrt{(3 + \sqrt{12})\frac{b}{a}}$, & $\pm b\sqrt{(3 - \sqrt{12})\frac{b}{a}}$. Les deux prémiéres ſont réelles, & les deux autres

Ch. XI. §. 199. autres imaginaires, quand a & b, ont le même ſigne ; parce qu'alors la fraction $\frac{b}{a}$ eſt poſitive, &, par la raiſon contraire, les deux prémiéres ſont imaginaires & les deux derniéres réelles, quand a & b ont des ſignes contraires. PLANCHE XXIII.

Ainſi, pour la Courbe des n°s. 1 & 2, on prendra les abſciſſes AB & Ab égales à $+$ & à $-b\sqrt{(3+\sqrt{12})}\frac{b}{a}$: mais pour la Courbe des n°s. 3 & 4, on prendra les abſciſſes AB & Ab égales à $+$ & à $-b\sqrt{(3-\sqrt{12})}\frac{b}{a}$. Les ordonnées de ces abſciſſes rencontreront ces Courbes dans leurs Points d'Inflexion.

On verra que ces Points ne ſont ni multiples, ni Serpentements, en cherchant la valeur de leurs ordonnées. On a trouvé ci-deſſus $4aax^3 - 3xy^4 = 0$, ou $y^4 = \frac{4}{3}aaxx =$ [en mettant pour xx ſes valeurs $(3\pm\sqrt{12})\frac{b^3}{a}$] $= (4\pm\frac{8}{\sqrt{3}})ab^3$, ſoit $y = \pm\sqrt{(4\pm\frac{8}{\sqrt{3}})ab^3}$. Ces valeurs d'$x$ & d'y ſubſtituées dans le prémier Rang de la Transformée $(2xy)u + (yy+2ax)z$ ne l'anéantiſſent pas. Donc les Points qu'on a déterminés, ne ſont pas multiples. Et comme ce prémier Rang ne peut diviſer le troiſiéme $(0)u^3 + (1)uuz + (0)uzz + (0)z^3$, ce ne ſont pas des Points de Serpentement.

Exemple V. Quels ſont les Points d'Inflexion de la Courbe, dont l'équation eſt $x^4 - aaxx + a^3y = 0$? Fig. 178.

Les deux prémiers Rangs de la Transformée étant $(a^3)u + (4x^3 - 2aax)z$, & $(0)uu + (0)uz + (6xx - aa)zz$; l'équation, qui détermine les Points d'Inflexion, ſera $(6xx - aa)a^4 = 0$; d'où l'on tire $x = \pm a\sqrt{\frac{1}{6}}$,

PLANCHE XXIII. $\pm a\sqrt{\frac{1}{3}}$, & par l'équation de la Courbe $y = \frac{3}{16}a$. CH. XI. §. 193.

Exemple VI. Déterminer les Points d'Inflexion de la Conchoïde, dont l'équation eſt $xxyy + x^4 + 2ax^3 + aaxx - bbxx - 2ab^2x - aabb = 0$ [§. 174. Ex. *IV.*].

Le prémier & le ſecond Rang de la Transformée ſont $(2xxy)u + (2xyy + 4x^3 + 6axx + 2aax - 2bbx - 2abb)z$, & $(xx)uu + (4xy)uz + (yy + 6xx + 6ax + aa - bb)zz$. Donc pour déterminer les Points d'Inflexion, on aura l'éq: $(yy + 6xx + 6ax + aa - bb)(2xxy)^2 - 4xy(2xxy)(2xyy + 4x^3 + 6axx + 2aax - 2bbx - 2abb) + xx(2xyy + 4x^3 + 6axx + 2aax - 2bbx - 2abb)^2 = 0$, qui diviſée par 4, ſe réduit à $-2x^4y^4 + (2x^4 - aaxx + bbxx + 2ab^2x)xxyy + 4x^8 + 12ax^7 + (13aa - 4bb)x^6 + (6a^3 - 10ab^2)x^5 + (a^4 - 8aabb + b^4)x^4 - (2a^3bb - 2ab^4)x^3 + aab^4xx = 0$. Qu'on y ſubſtituë $-x^4 - 2ax^3 - aaxx + bbxx + 2abbx + aabb$ à $xxyy$, qui eſt ſa valeur priſe dans l'équation de la Courbe, & qu'on diviſe par bb, on aura $x^6 + 6ax^5 + 12aax^4 + (10a^3 - 2abb)x^3 + (3a^4 - 6aabb)xx - 6a^3b^2x - 2a^4bb = 0$. Cette équation a une racine triple $x + a = 0$, qui donne le Point double de la Conchoïde, & diviſée par le cube $x^3 + 3axx + 3aax + a^3$ de cette racine, elle a pour quotient l'éq: $x^3 + 3axx - 2abb = 0$. Ses racines ſont les abſciſſes dont les ordonnées rencontrent la Courbe en ſes Points d'Inflexion.

Exemple VII. On a déjà vû [§. 163] que les Courbes du ſecond Ordre ne ſauroient avoir d'Inflexion. C'eſt auſſi ce que démontre le Calcul. L'équation générale $a + by + cx + dyy + exy + fxx = 0$ des Lignes de cet Ordre a, au prémier Rang de ſa Transformée, $(b + ex + 2dy)u + (c + ey + 2fx)z$; & au ſecond Rang, $(d)uu + (e)uz + (f)zz$. Donc l'équation pour déter-mi-

CH. XI. §. 199. terminer les Points d'Inflexion eſt $f(b+cx+2dy)^2 - e(b+cx+2dy)(c+ey+2fx)+d(c+ey+2fx)^2 = 0$, ſoit $bbf-bce+ccd+(4df-ee)(by+cx+dyy+exy+fxx)=0$, d'où retranchant le produit de la Propoſée par $4df-ee$, lequel eſt zéro, il reſtera $bbf-bce+ccd-(4df-ee)a=0$. Afin qu'une Ligne du ſecond Ordre eut des Points d'Inflexion, il faudroit que les coëfficients de ſon équation euſſent entr'eux la rélation qu'exprime cette Egalité, $bbf-bce+ccd-(4df-ee)a=0$, c'eſt-à-dire, que a fut égal à $\frac{bbf-bce+cdd}{4df-ee}$. Mais lorſque a a cette valeur, l'équation du ſecond Ordre ne déſigne pas une Courbe, parce que ſes racines ſont eſſentiellement imaginaires. Car en réſolvant l'éq : $\frac{bbf-bce+cdd}{4df-ee}+by+cx+dyy+exy+fxx=0$, on trouve $2fx+ey+c=\pm\sqrt{-(y+\frac{2bf-ce}{4df-ee})^2\times\sqrt{(4df-ee)}}$. Or le quarré $(y+\frac{2bf-ce}{4df-ee})^2$ eſt néceſſairement poſitif. Précedé du ſigne —, il eſt donc eſſentiellement négatif, & ſa racine quarrée eſt abſolument imaginaire.

PLANCHE XXIII.

200. ON PEUT auſſi réſoudre tous ces Problèmes, directs & inverſes, par la Méthode des Séries.

Soit Mμm une Courbe algébrique quelconque, dont la nature ſoit donnée par une équation entre les coordonnées AP[x] & PM[y]. Pour trouver la nature d'un Point quelconque M de cette Courbe, on portera l'Origine de A en P, de ſorte que PM ſoit la prémiére ordonnée. Dans cette vuë, on ſubſtituera dans la Propoſée u à y & $x+z$ à x [§. 28], & l'on aura une Trans- Fig. 179.

PLANCHE XXIII. formée en u & z, où u repréſente une ordonnée quelconque pm, & z l'abſciſſe Pp comptée dès l'Origine P. La lettre x, qui reſte dans la Transformée, comme une conſtante, exprime la Droite AP, compriſe entre l'Origine primitive A & l'Origine nouvellement priſe P. La lettre y, qui ne ſe trouve plus dans la Transformée, ſervira, dans l'occaſion, à déſigner la prémiére ordonnée PM. Ainſi x & y déſignent ici des conſtantes, mais en telle ſorte, pourtant, qu'elles indiquent que les Calculs qu'on va faire ſur un Point donné M ſe peuvent également appliquer à tous les Points de la Ligne $M\mu m$. CH. XI. §. 100.

Si, dans cette Transformée, on cherche les valeurs de u en z, par des Séries aſcendantes ; ces Séries expriment les Branches de la Courbe que rencontre l'ordonnée PM, & les repréſentent d'autant plus exactement que z [Pp] eſt plus petite [§. 100]. Ces Branches ſont réelles, ſi les Séries qui les repréſentent ſont réelles : Si une de ces Séries a un terme imaginaire, elle eſt imaginaire, & la Branche qu'elle exprime eſt abſolument imaginaire, c'eſt-à-dire, imaginaire de part & d'autre de l'ordonnée PM : Mais ſi une de ces Séries a un terme demi-imaginaire, elle eſt demi-imaginaire, & la Branche qu'elle déſigne manque ſeulement d'un côté de PM, de l'autre côté elle eſt double [§. 95].

Il faut donc pour connoître la nature du Point M, calculer tous les termes irréguliers [§. 109] des Séries aſcendantes que fournit la Transformée en u & z : ce qui eſt encore néceſſaire pour s'aſſurer du nombre de ces Séries ; parce qu'il peut arriver qu'une Série, qui paroiſſoit d'abord unique, vienne à ſe fourcher & en donne pluſieurs. Mais, laiſſant le détail de ces irrégularités aux Chapitres ſuivants, ſuppoſons que la Série eſt réguliére dès ſon commencement.

Alors ſa forme eſt $u = A + Bz + Cz^{\frac{\alpha}{\beta}} + Dz^{\frac{\gamma}{\delta}} + \&c.$

Et

CH. XI. §. 200. Et cette valeur étant ſubſtituée dans l'équation, on déterminera les coëfficiens A, B, C, D, &c. en égalant ſucceſſivement à zéro chaque terme de cette nouvelle Transformée [§. 112]. PLANCHE XXIII.

201. Dans cette Série, le prémier terme A eſt égal à l'ordonnée PM [y] de l'abſciſſe AP [x]. Car, faiſant $z = 0$, la Série $u = A + Bz$ &c. ſe réduit à $u = A$. Et z [Pp] $= 0$ réduit l'ordonnée pm [u] à la prémiére ordonnée PM [y]. Donc $A = y$.

Le ſecond terme Bz détermine la poſition de la Droite MO, qui touche la Courbe au point M. Car ſi on mène par ce Point M l'abſciſſe QMn, qui rencontre en n l'ordonnée pm, prolongée s'il le faut; on aura pn $=$ PM $= A$. Donc mn $=$ pm $-$ pn $= u - A = Bz + Czz + Dz^3$ &c. La Série tronquée de ſon prémier terme A, exprime donc la différence mn de la prémiére ordonnée PM & d'une autre ordonnée quelconque pm. Cette différence mn détermine la poſition de la Sécante Mm, qui retranche de la Courbe l'arc Mμm. Qu'on prenne, ſur l'abſciſſe MQ, la partie MN égale à l'unité, & qu'on mène par le point N la Droite Nr parallèle à la Sécante Mm, elle retranchera de l'ordonnée PM, prolongée s'il le faut, une partie Mr égale à $B + Cz + Dz^2$ &c. Car, à cauſe des parallèles Mm, Nr, on aura Mn ou Pp [z]: mn [$Bz + Czz + Dz^3 +$ &c] $=$ MN [1]: Mr [$B + Cz + Dzz +$ &c]. Maintenant, ſi on imagine que la Sécante Mm vienne à tourner ſur le Point M; quand elle aura paſſé dans la ſituation Mμ, elle ne retranchera de la Courbe que l'arc Mμ, d'autant plus petit que μ aproche plus de M. De ſorte que, continuant à tourner, la Sécante Mm, ou Mμ, devient Tangente, lorſquelle eſt venuë dans la ſituation MO, où le ſecond Point μ, qu'elle rencontre, coïncide avec le prémier M: une Sécante

PLANCHE XXIII. cante devenant Tangente, lorſque les deux Points de Section tombent l'un ſur l'autre [§. 162]. Si l'on conçoit auſſi que la Droite Nr tourne ſur le Point N, avec la même viteſſe que Mm ſur M, en ſorte que ces deux Droites Nr, Mm reſtent toûjours parallèles l'une à l'autre; & que Nr vienne dans la ſituation NR, quand la Sécante Mm devient la Tangente MO; on déterminera cette ſituation NR, [& par conſéquent celle de la Tangente MO, qui lui eſt parallèle] en prenant MR égal à B coëfficient du ſecond terme de la Série $A+Bz+\&c.$ Car la Sécante Mm devient Tangente, au moment où le Point m tombe ſur M, au moment où Mn[z] devient zéro. Mais quand z devient zéro, l'expreſſion générale de Mr, qui eſt $B+Cz+Dz^2+\&c.$ ſe réduit à B. Donc, ſi on prend, ſur l'abſciſſe, MN = 1, &, ſur l'ordonnée, MR = B, & qu'on mène la Droite NR; elle ſera parallèle à la Tangente MO. Ch. XI. §. 201.

Ou, ſi l'on veut, & ce qui ſera généralement plus commode, puiſque B eſt communément une fraction, qu'on peut repréſenter par $\frac{\gamma}{\beta}$; on prendra, ſur l'abſciſſe MQ, une partie Mν égale à β, & ſur le prolongement de l'ordonnée une partie Mρ égale à γ, & la Droite $\nu\rho$ ſera parallèle à la Tangente MO. Car, puiſque Mν[β] eſt à Mρ[γ] comme MN[1] à MR[B ou $\frac{\gamma}{\beta}$], $\nu\rho$ eſt parallèle à NR, qui eſt elle même parallèle à MO. Donc ρ eſt parallèle à MO.

Le troiſiéme terme de la Série $A+Bz+Cz^2+\&c.$ indique la poſition de la Courbe par raport à ſa Tangente. Car puiſque MR = B, les triangles ſemblables NMR, MnO donnant NM[1]: MR[B] = Mn[z]: nO, on aura nO = Bz. Mais mn = $Bz+Cz^2+Dz^3\,\&c.$ Donc

mO

Ch. XI. §. 201. $mO = mn - nO = Cz^2 + Dz^3$ &c. Cette Série, quand z eſt infiniment petite, ſe réduit au prémier terme Cz^2. Donc le ſigne, + ou —, de ce terme fait connoitre de quel côté de la Tangente paſſe la Courbe. Elle paſſe entre la Tangente & l'Axe des abſciſſes, lors que le ſigne du troiſiéme terme Cz^2 eſt différent de celui du prémier A. Elle paſſe au-delà de la Tangente, quand le prémier & le troiſiéme terme de la Série ont le même ſigne. PLANCHE XXIII.

Ainſi, lorſque dans l'équation d'une Courbe on ſubſtituë d'abord $x + z$ à x, puis u à y, & enſuite $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c à u, ou ſimplement $A + Bz + Cz^2$ &c à y; & qu'égalant à zéro, 1°. tous les termes où l'on ne voit point de z; 2°. tous ceux où l'on ne voit que la prémiére puiſſance de z; 3°. ceux où l'on voit zz, &c. on fait autant d'équations pour déterminer les valeurs de A, B, C, D, &c: on connoitra par ces valeurs l'ordonnée PM d'un Point quelconque M, la poſition de ſa Tangente MO, celle de la Courbe Mμm par raport à ſa Tangente, &c. Mais les divers Cas, qui peuvent ſe préſenter, demandent quelque détail.

202. Le prémier terme A de la Série $A + Bz + Cz^2 + $ &c. repréſente l'ordonnée PM de l'abſciſſe AP. Si la Courbe paſſe par l'extrémité P de cette abſciſſe, l'ordonnée PM eſt zéro. Donc, mettant dans la Série la valeur particuliére AP de x, on trouvera $A = 0$. Et réciproquement, ſi l'on fait $A = 0$, on aura une équation, dont les racines x ſont les abſciſſes par l'extrémité deſquelles paſſe la Courbe, c'eſt-à-dire, on aura les Points, où la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes.

Si au contraire l'ordonnée PM [y ou A] eſt une Aſymptote, l'abſciſſe AP [x] a une ordonnée infinie. Donc, mettant dans la Série, pour x, ſa valeur particuliére AP, on trouvera $A = \infty$. Et réciproquement, ſi

PLANCHE XXIII. on fait $A = \infty$, [& pour cela il faut que A ſoit une fraction, dont on puiſſe égaler le dénominateur à zéro], on déterminera les abſciſſes dont les ordonnées ſont Aſymptotes. CH. XI. §. 201.

Ce terme infini dans une Série, dénote quelque impoſſibilité, quelque abſurdité dans les ſuppoſitions qui ont été faites. Cette abſurdité conſiſte en ce qu'on a ſuppoſé que le prémier terme de la Série eſt une grandeur finie A. Car ſi l'on prend pour la Série cette forme générale $u = Az^b + Bz^i + \&c$, que z infiniment petite réduit ſimplement à $u = Az^b$, on verra que, A étant finie, Az^b peut être infinie, ſi b eſt négatif [§. 79]. Donc, quand on ſuppoſe A, ou Az^0, pour le prémier terme de la Série qui donne u en z, & que quelque valeur particuliére de x donne A infinie; c'eſt une preuve que, pour cette valeur d'x, Az^0 n'eſt pas le prémier terme de la Série, mais qu'il doit être précedé de quelque terme qu'on avoit omis, & où l'expoſant de z eſt négatif. On pourra donc, mettant pour x cette valeur particuliére qui donne $A = \infty$, chercher, par les Régles des §§. 102, 108, la Série de cette équation, & on trouvera que dans ſon prémier terme z a un expoſant négatif; de ſorte que, z étant infiniment petite, u eſt infinie.

203. Le ſecond terme, Bz ou $\frac{\gamma}{\beta}z$, de la Série générale donne, comme on a vû, la poſition de la Tangente. Les valeurs particuliéres de x & de y, qui rendent $\gamma = 0$, font connoitre qu'aux Points qui répondent à ces coordonnées, $M\rho$ [γ] eſt nulle, & que $\nu\rho$, & la Tangente MO, parallèle à $\nu\rho$, tombent ſur l'abſciſſe. De même, les valeurs particuliéres de x & de y, qui font $\beta = 0$, indiquent les Points de la Courbe, où $M\nu$ [β] étant

Digitized by Google

Ch. XI. §. 203. étant nulle, $\nu\rho$, & ſa parallèle MO, tombent ſur l'ordonnée. Planche XXIII.

Ces Points, où les Tangentes ſont parallèles aux abſciſſes ou aux ordonnées, ſont les *Maxima* ou *Minima* des ordonnées & des abſciſſes, ſi ce ne ſont pas des Points d'Inflexion. Donc les valeurs particuliéres de x & de y, qui donnent $\gamma = 0$, indiquent les *Maxima* ou *Minima* des ordonnées, & celles qui donnent $\beta = 0$, marquent les *Maxima* ou *Minima* des abſciſſes; à moins que ce ne ſoit des Points d'Inflexion [§. 196].

A moins encore que les mêmes valeurs d'x & d'y, qui donnent $\gamma = 0$, ne donnent auſſi $\beta = 0$. Alors $M\nu$ & $M\rho$ étant nulles, les deux Points ν & ρ coïncident avec M, de ſorte que la poſition de $\nu\rho$, & de ſa parallèle MO, n'eſt pas déterminée par ce moyen. D'où l'on conclura que le Point M eſt un Point multiple.

Pour en comprendre la raiſon, il faut ſe rapeller la Méthode, indiquée au §. 112, de calculer les coëfficiens $A, B, C, D, \&c.$ En ſubſtituant $A + Bz + Cz^2$ &c. à u, on réduit l'équation à quelques termes & Séries ordonnées par z. Tous les termes ſans z ſont cenſés faire le prémier terme, lequel égalé à zéro ſe trouve être préciſément l'équation propoſée, ſi ce n'eſt qu'on a écrit A au lieu d'y. C'eſt pourquoi A ſe trouve égal à y [PM], comme on l'a remarqué [§. 201].

Le ſecond terme eſt compoſé de ceux où z a pour expoſant l'unité. Sa formule générale eſt $(\beta B - \gamma)z$, d'où l'on tire en l'égalant à zéro, $B = \frac{\gamma}{\beta}$. Mais ſi $\gamma = 0 = \beta$, cette équation ſe réduit à $0B - 0 = 0$, qui n'aprend rien ſur la valeur de B.

Il faut donc paſſer au troiſiéme terme, qui comprend ceux où l'expoſant de z eſt 2. La forme générale du coëf-

PLANCHE XXIII. ficient de zz eſt $\beta C - \delta B^2 + \epsilon B - \zeta$, qui égalé à zéro ſerviroit à déterminer C. Mais quand $\beta = 0$, C diſparoit, & l'équation ſe réduit à $\delta B^2 - \epsilon B + \zeta = 0$, qui, étant du ſecond dégré, a deux racines. Puis donc que la valeur de B détermine la poſition de la Tangente, dans ce cas le Point M a deux Tangentes : c'eſt un Point double [§. 183]. CH. XI. §. 203.

Mais ſi l'on trouvoit $\delta = \epsilon = \zeta = 0$, on ne pouroit pas par cette équation déterminer B. On paſſeroit donc au quatriéme terme, dont la formule générale $(\beta D - (2\delta B - \epsilon) C + \eta B^3 - \vartheta B^2 + \iota B - \varkappa) z^3$ ſe réduit [à cauſe de $\beta = \delta = \epsilon = 0$] à $(\eta B^3 - \vartheta B^2 + \iota B - \varkappa) z^3$. Ce terme, égalé à zéro, donne donc une équation du 3e. dégré, qui fournit trois valeurs de B. Le Point M a donc trois Tangentes ; c'eſt un Point triple [§. 183].

On voit de même que quand η, θ, ι, $\varkappa$ ſont zéro, le Point M eſt, au moins, un Point quadruple.

Ainſi on reconnoitra les Points multiples d'une Courbe, à ce que le numérateur & le dénominateur de la fraction $\frac{\gamma}{\beta}$ [$= B$] ſont tous deux zéros. On aura le dégré de leur multiplicité par le dégré de l'équation qui donne les valeurs de B, & on déterminera leurs Tangentes par les racines de cette équation.

204. C'eſt par le troiſiéme terme Cz^2 de la Série qu'on connoit ſi un Point de la Courbe eſt Point d'Inflexion, ou non. Car la Série tronquée de ſes deux prémiers termes $A + Bz$, c'eſt-à-dire, la Série $Cz^2 + Dz^3$ &c. exprime la portion mO de l'ordonnée pm compriſe entre la Courbe Mμm & la Tangente MO. Cette Série, lorſque z eſt infiniment petite, ſe réduit au ſeul prémier terme Cz^2, donc le ſigne fait connoître de quel côté de la Tangente tombe la Courbe.

Mais

Ch. XI. § 204. Mais ſi ce terme Cz^2 manque, C étant zéro, la Série $Cz^2 + Dz^3$ &c. ſe réduit à $Dz^3 + Ez^4$ &c. dont le prémier terme Dz^3 vaut lui ſeul infiniment plus que tous les autres. C'eſt donc du ſigne + ou — de ce terme, que dépend la poſition de la Courbe par raport à la Tangente. Or, dans ce terme, l'expoſant de z étant impair, le ſigne change quand à +z on ſubſtituë —z. Donc ſi d'un côté de l'ordonnée la Courbe tombe au-deſſus de la Tangente, de l'autre côté elle tombe au-deſſous. Le Point eſt donc un Point d'Inflexion. On connoit donc les Points d'Inflexion d'une Courbe, par les valeurs particuliéres de x & de y, qui font évanouir le coëfficient C du troiſiéme terme Czz de la Série générale. PLANCHE XXIII.

Bien entendu pourtant, que ces valeurs de x & de y, qui font diſparoitre C, n'anéantiſſent pas en même tems le coëfficient D du 4e. terme. Car alors le prémier terme de la Série, qui exprime la valeur de mO, ſeroit Ez^4, où z a un expoſant pair. La variation du ſigne de z ne fait donc point varier le ſigne de Ez^4. La Courbe, de part & d'autre de l'ordonnée, tombe donc d'un même côté de la Tangente. Le Point M n'eſt donc pas alors un Point d'Inflexion, mais un Point de Serpentement.

A moins que ces mêmes valeurs d'x & d'y qni anéantiſſent C & D, ne faſſent auſſi diſparoitre E: en quel cas le prémier terme de la Série qui exprime mO, eſt Fz^5, où z a un expoſant impair. Donc alors M eſt un Point de triple Inflexion, qui eſt une Inflexion viſible.

On voit en général, que ſi, dans le terme qui ſuit Bz, z a un expoſant pair, le Point M eſt un Point ſimple, ou d'Inflexion inviſible, c'eſt-à-dire, de Serpentement. Mais ſi, dans ce terme, z a un expoſant impair, le Point M eſt un Point d'Inflexion viſible.

PLANCHE XXIII.

205. Tout cela eſt également vrai, lors que le terme Bz manque, γ étant zéro & β n'étant pas zéro. Ce Cas eſt celui des *Maxima* & *Minima* des ordonnées [§. 203]; à moins que ce ne ſoit le Cas d'un Point multiple ou d'un Point d'Inflexion. C'eſt une Inflexion, lorſque dans le terme ſuivant, qui eſt le prémier terme où z a un expoſant plus grand que l'unité, cet expoſant eſt un nombre impair, ou une fraction dont le numérateur & le dénominateur ſont impairs, parce que le ſigne de ce terme change avec celui de z. C'eſt un Point multiple, quand l'expoſant de z eſt une fraction de numérateur impair & de dénominateur pair, parce qu'alors ce terme eſt demi-imaginaire, c'eſt-à-dire, imaginaire d'un côté, & double de l'autre [§. 95]. Mais quand l'expoſant de z dans ce terme eſt un nombre pair, ou une fraction de numérateur pair & de dénominateur impair, le Point M eſt un vrai *Maximum* ou *Minimum* d'ordonnées. CH. XI. §. 205.

On connoitra ſi c'eſt un *Maximum*, ou un *Minimum*, par le ſigne du coëfficient de ce terme qui eſt le prémier où z a un expoſant plus grand que l'unité. Car ſi ſon ſigne eſt le même que celui d'A, la Courbe paſſe au-delà de la Tangente; l'ordonnée PM eſt plus petite que les deux ordonnées voiſines, M eſt un *Minimum*. Mais ſi le ſigne de ce terme eſt contraire à celui d'A, la Courbe tombe entre l'Axe & la Tangente; PM ſurpaſſe les ordonnées voiſines, M eſt un *Maximum*.

206. Que ſi le terme Bz eſt infini, ce qui arrive lorſque la Tangente, parallèle aux ordonnées, rend Mv [β], c'eſt-à-dire, le dénominateur de la fraction $\frac{\gamma}{\beta}$ [$= B$] égal à zéro : c'eſt une marque [§. 202], que, pour ce Cas particulier, la Série n'a pas la même forme $A + Bz + Cz^2$

Cas. XI. §. 206. $+Cz^{\frac{\alpha}{\beta}}$ &c. que dans le Cas général : mais qu'avant le terme Bz il doit y en avoir un, ou plusieurs, qui ont été omis. On substituera donc à x & y leurs valeurs particuliéres ; on cherchera le prémier de ces termes par la Méthode des §§. 102, 108, & on jugera, par son exposant, de la position de la Courbe par raport à la Tangente, qui est l'ordonnée. PLANCHE XXIII.

Car ce terme, qui, à supposer z infiniment petite, vaut lui seul plus que tous ceux qui le suivent, exprime la différence de la prémiére ordonnée PM [*A*] & de l'ordonnée infiniment proche p m, dont la valeur est exprimée par toute la Série.

Si, dans ce terme, l'exposant de z est une fraction de numerateur & de dénominateur impair ; son signe change en changeant $+z$ en $-z$. La différence de P M & des deux ordonnées qui l'avoisinent, est donc positive d'un côté, négative de l'autre : P M, ordonnée & Tangente de la Courbe au Point M, est donc plus grande qu'une de ses ordonnées voisines, plus petite que l'autre ; M est donc un Point d'Inflexion.

Si, dans ce terme, z a pour exposant une fraction de numérateur pair & de dénominateur impair, le terme conserve sa valeur, soit qu'on donne à z le signe +, ou le signe —. La différence de P M & des ordonnées voisines est donc la même de part & d'autre : P M est ou plus grande, ou plus petite, que les ordonnées qui la touchent. Le Point M est donc un *Maximum*, ou un *Minimum* d'ordonnées, quoique l'ordonnée soit Tangente. Donc, en ce Point M, la Courbe change de cours, & rebrousse, pour ainsi dire, en arriére. Aussi les Geométres nomment-ils ces Points, *Points de Rebroussement*. On en parlera plus en détail dans la suite, & on verra quelles exceptions souffre cette Remarque, par les irrégularités des termes qui suivent dans la Série. Mais quand M est *Fig.* 180.

Digitized by Google

PLANCHE XXIII. M eſt un Point de rebrouſſement, on voit s'il eſt un *Maximum*, ou un *Minimum* d'ordonnées, par la diſparité ou la parité des ſignes du prémier & du ſecond terme de la Série. CH. XI. §. 206.

Enfin, ſi dans le ſecond terme, [A, lors même qu'il ſeroit zéro, étant compté pour le prémier] l'expoſant de z eſt une fraction de numérateur impair & de dénominateur pair; ce terme eſt demi-imaginaire. Ainſi, d'un côté de l'ordonnée Tangente, la Courbe n'a que des ordonnées imaginaires; de l'autre elle en a deux, une plus grande & une plus petite que PM, à cauſe du ſigne ambigu $\pm$ de ce ſecond terme. M eſt donc une limite, où les ordonnées d'imaginaires deviennent réelles : c'eſt un vrai *Maximum* ou *Minimum* d'abſciſſes. Et on décidera s'il eſt l'un ou l'autre, en examinant de quel côté de PM les ordonnées ſont réelles, de quel côté elles ſont imaginaires.

Exemple I. On propoſe l'éq : $ayy + x^3 + bxx = 0$. Elle repréſente deux Courbes différentes, ſçavoir la Courbe *n°.* 1, quand b eſt poſitive, & la Courbe *n°.* 2, quand b eſt négative. On ſuppoſe a toujours poſitive. Fig. 181.

En ſubſtituant u pour y & $x+z$ pour x, l'équation ſera transformée en $auu + (x^3 + bxx) + (3xx + 2bx)z + (3x + b)zz + z^3 = 0$, où mettant $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c pour u, on aura

$$auu = aAA + 2aABz + 2aACzz + 2aADz^3 \text{ \&c.}$$

$$+ aBB \quad + 2aBC$$

$$\left.\begin{matrix} + x^3 \\ + bx^2 \end{matrix}\right\} = \left.\begin{matrix} + x^3 \\ + bx^2 \end{matrix}\right\} \quad . \quad . \quad .$$

$$\left.\begin{matrix} + 3xx \\ + 2bx \end{matrix}\right\} z = \left.\begin{matrix} + 3xx \\ + 2bx \end{matrix}\right\} z \quad . \quad .$$

$$+ 3x$$

Ch. XI. §. 206. $\left.\begin{matrix}+3x\\+b\end{matrix}\right\}zz = \left.\begin{matrix}+3x\\+b\end{matrix}\right\}zz$.

Planche XXIII.

$+z^3 = +1z^3$

& pour chercher les valeurs d'A, B, C, D, &c. on aura ces équations

$$aAA+x^3+bxx=0$$
$$2aAB+3xx+2bx=0$$
$$2aAC+aBB+3x+b=0$$
$$2aAD+2aBC+1=0$$

La prémiére, qui détermine la valeur d'A, eſt préciſément la même choſe que l'équation propoſée $ayy+x^3+bxx=0$, en écrivant A pour y. Elle donne donc $A=y$ [§. 201].

La valeur d'A, priſe dans cette équation, eſt $=\sqrt{\frac{x^3+bx^2}{a}}$, qui eſt zéro, 1°. quand $x=0$, 2°. quand $x=-b$. Donc la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes, & à l'Origine A, & à l'extrémité B de l'abſciſſe AB $=-b$.

Cette même valeur d'A ne devient infinie que quand x eſt infinie. Car on ne peut la rendre infinie en égalant ſon dénominateur à zéro, puiſque ce dénominateur eſt une quantité finie a. La Courbe n'a donc aucune ordonnée aſymptote, & ſes ordonnées ne ſont infinies que quand les abſciſſes deviennent infinies.

La valeur de B ſe détermine par la 2e. équation $2aAB+3xx+2bx=0$, qui donne $B=-\frac{3xx+2bx}{2aA}$ $=-\frac{3xx+2bx}{2ay}$, puiſque $A=y$. Cette valeur détermine en général la Tangente. Car ſi on prend, ſur l'ab-

PLANCHE XXIII. sciſſe menée par un Point quelconque de la Courbe, une portion égale à $2ay$, & ſur le prolongement de l'ordonnée, une portion égale à $-(3xx+2bx)$, c'eſt-à-dire, ſi on prend ſur l'ordonnée dès ſon ſommet une portion égale à $3xx+2bx$, & qu'on joigne les extrémitez de ces deux parties par une ligne droite, elle ſera parallèle à la Tangente [§. 201]. CH. XI. §. 206.

On aura les *Maxima* & les *Minima* des ordonnées, en égalant à zéro le numérateur de B. Cette éq: $3xx+2bx=0$ a deux racines, $x=0$ & $x=-\frac{2}{3}b$. La prémiére ſe raporte à un Point double, car cette valeur d'x, ſubſtituée dans l'équation de la Courbe, donne $y=0$, ce qui anéantit le dénominateur de B [§. 203]. Nous reviendrons bientôt à ce Point double. L'autre racine $x=-\frac{2}{3}b$, miſe dans l'équation de la Courbe, la transforme en $ayy+\frac{4}{27}b^3=0$, d'où l'on tire $y=\pm\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}$ racine imaginaire, quand b eſt poſitive, mais réelle quand b eſt négative. Ainſi la Courbe *n°.* 1 n'a ni *Maximum* ni *Minimum* d'ordonnées. Mais la Courbe *n°.* 2, a deux Points M, m, dont l'abſciſſe commune eſt $AP=-\frac{2}{3}b$, poſitive puiſque b eſt négative, & dont les ordonnées ſont $PM+\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}$, & $Pm=-\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}$; leſquels Points ſont des *Maxima*.

Car 1°. ce ne ſont pas des Points multiples. Les valeurs de $x\left[-\frac{2}{3}b\right]$ & de $y\left[\pm\frac{2}{3}b\sqrt{-\frac{b}{3a}}\right]$, qui anéantiſſent le numérateur, $3xx+2bx$, de B, n'anéantiſſent pas ſon dénominateur $2ay$.

2°. Ce ne ſont pas des Points d'Inflexion. Car ces mêmes valeurs d'x, d'y, & de B, n'anéantiſſent point C. Ce coëfficient eſt donné par la 3e. équation $2aAC+aBB+3x$

Ch. XI. §. 206. $+3x+b=0$, où, mettant $-\frac{1}{3}b$ pour x & o pour B, PLANCHE XXIII. on a $2aAC-b=0$, ſoit $C=\frac{b}{2aA}$.

Mais 3°. ce ſont des *Maxima*. Car $C=\frac{b}{2aA}$, donnant le produit AC égal à $\frac{b}{2a}$, grandeur négative, puiſque b eſt ici négative & a poſitive, le ſigne de C eſt différent du ſigne d'A. Donc [§. 205] les ordonnées PM, Pm ſurpaſſent celles qui en ſont les plus voiſines de part & d'autre, les Points M & m ſont des *Maxima* d'ordonnées.

On déterminera les *Maxima* & les *Minima* d'abſciſſes, en égalant à zéro le dénominateur $2ay$ de B. La valeur o, qui en réſulte pour y, miſe dans l'équation de la Courbe donne $x^3+bxx=0$, dont les racines ſont $x=0$ & $x=-b$. La prémiére porte, comme on l'a vu, à un Point double dont nous parlerons tout à l'heure. L'autre, donnant B infinie, & déſignant le Point B où la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes, peut y donner un *Maximum* ou un *Maximum* d'abſciſſes.

Pour en juger, on mettra [§. 206], dans la Transformée $auu+x^3+bxx+(3xx+2bx)z+(3x+b)zz+z^3=0$, au lieu d'$x$ ſa valeur $-b$, qui apartient au Point B, & cette Transformée ſe réduira à $auu+bbz-2bzz+z^3=0$; d'où tirant [§. 102] la Série aſcendante qui donne u en z, on aura $u=\pm b\sqrt{-\frac{z}{a}}\pm z\sqrt{-\frac{z}{a}}$ &c. Cette Série, ou plutôt ces deux Séries, ſont imaginaires quand z eſt poſitive, elles ſont réelles quand z eſt négative. Donc [§. 206], la Courbe n'a ni ordonnées, ni Branches, du côté poſitif de B; mais du

PLANCHE XXIII. côté négatif elle a deux Branches qui touchent l'ordonnée au Point *B*. Donc, dans la Courbe *n°*. 1, où B eſt du côté négatif de l'Origine, ce point B eſt un *Minimum* d'abſciſſes. C'eſt au contraire un *Maximum* dans la Courbe *n°*. 2, où B tombe du côté poſitif de l'Origine. CH. XI. §. 106

On déterminera les Points multiples de la Courbe, en égalant à zéro le numérateur & le dénominateur de *B*. Le dénominateur $2ay$ égalé à zéro, donne $y = 0$, ce qui transforme l'équation de la Courbe en $x^3 + bxx = 0$. Le numérateur, égalé à zéro, donne $3xx + 2bx = 0$. Et comme ces deux équations n'ont point d'autres racines communes que $x = 0$, on conclud que la Courbe n'a qu'un ſeul Point multiple, qui eſt à l'Origine, où $x = 0$, & $y = 0$.

Ces valeurs d'x & d'y ſubſtituées dans la 2e. équation des coëfficients, $2aAB + 3xx + 2bx = 0$, la réduiſent à $0B + 0 = 0$ qui ne détermine rien. Mais, ſubſtituées dans la 3e. éq : $2aAC + aBB + 3x + b = 0$, elles la réduiſent à $aBB + b = 0$, d'où l'on tire $B = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$. Où l'on voit que *B* a deux valeurs, parce que l'Origine eſt un Point double. Ces valeurs ſont imaginaires dans la Courbe *n°*. 1, où *a* & *b* ſont poſitives. Donc l'Origine de cette Courbe, quoiqu'un Point de la Courbe, & même un Point double, n'a point de Tangentes. Ce Paradoxe s'explique en conſidérant que par ce Point il ne paſſe aucune Branche de la Courbe, mais que c'eſt un de ces Points iſolés, dont nous avons déjà donné un Exemple en parlant de la Conchoïde [§. 174, *Ex. IV*], & dont nous parlerons plus au long dans la ſuite.

Mais le Point, qui eſt à l'Origine de la Courbe *n°*. 2, a deux Tangentes déterminées par l'éq : $B = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$, *b* étant

Ch. XI. §. 206. étant négative & a positive. Il en résulte cette Construction. Qu'on prenne l'abscisse $AE = -1$, & les ordonnées $AD = +\sqrt{-\frac{b}{a}}$, $Ad = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$, ou, ce qui est la même chose, $AE = -a$, $AD = +\sqrt{-ab}$, $Ad = -\sqrt{-ab}$, & les Droites ED, Ed seront parallèles aux Tangentes. Ou bien, qu'on prenne l'abscisse $Ae = 1$, & qu'on lui donne les ordonnées $eF = +\sqrt{-\frac{b}{a}}$, $ef = -\sqrt{-\frac{b}{a}}$; ou qu'on prenne $Ae = a$, $eF = +\sqrt{-ab}$, $ef = -\sqrt{-ab}$, & AF, Af seront les Tangentes. PLANCHE XXIII.

Veut-on savoir de quel côté de ces Tangentes tombent les Branches de la Courbe qui passent par le Point A; il faut chercher la valeur de C, qui convient à ce Point. On la trouvera dans la 4e. équation des coëfficients $2aAD + 2aBC + 1 = 0$, que $A = 0$ & $B = \pm\sqrt{-\frac{b}{a}}$ réduisent à $C = \mp\frac{1}{2\sqrt{-ab}}$. Le signe —, devenu supérieur, fait voir que la Branche touchée par GAF tombe dessous sa Tangente; & le signe +, inférieur, montre que la Branche touchée par gAf tombe au-dessus de la Tangente. Ainsi les Branches de la Courbe embrassent les jambes de l'angle GAg, & sont embrassée par les jambes de l'angle FAf.

On aura les Points d'Inflexion de ces Courbes, en faisant $C = 0$ [§. 204]. Alors la 3e. équation des coëfficients se réduit à $aBB + 3x + b = 0$, ou, [mettant pour B sa valeur générale, prise dans la 2e. équation, $-\frac{3xx + bx}{2ay}$] à $a(\frac{3xx + bx}{2ay})^2 + 3x + b = 0$, soit $9ax^4 + 12abx^3 + 4abbxx + 12aaxyy + 4aabyy = 0$. Que dans cette équa-

PLANCHE XXIII. tion, on mette, pour ayy, ſa valeur $-x^4-bxx$, priſe dans l'équation de la Courbe, on aura $9ax^4+12abx^3+4abbxx-12ax^4-12abx^3-4abx^3-4abbxx=0=-3ax^4-4abx^3$, dont les racines ſont $x=0$, & $x=-\frac{4}{3}b$. La racine $x=0$ donne, comme on a vû, les Points A & B, qui n'ont point d'Inflexion. Mais la racine $x=-\frac{4}{3}b$ donne, par l'équation de la Courbe, $y=\pm\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$, qui eſt imaginaire, b étant négative, mais réelle & double, b étant poſitive. Ainſi la Courbe n°. 2 n'a aucun Point d'Inflexion. Mais la Courbe n°. 1 en a deux N, n, dont l'abſciſſe commune eſt $AC=-\frac{4}{3}b$, & les ordonnées $CN=+\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$, & $Cn=-\frac{4}{3}b\sqrt{\frac{b}{3a}}$. CH. XI. §. 206.

Fig. 182. *Exemple II.* Soit propoſée la Courbe, dont l'équation eſt $y^3+3xyy-3ayy-12axy-4axx+4aax=0$.

En ſubſtituant u pour y, & $x+z$ pour x, dans cette équation, elle ſe transforme en $u^3+3uux+3uuz-3auu-12aux-12auz-4axx-8axz-4azz+4aax+4aaz=0$. Et mettant, dans cette Transformée, la Série $A+Bz+Cz^2+Dz^3$ &c. pour u, on aura, pour déterminer les coëfficients, ces équations,

$$A^3+3xAA-3aAA-12axA-4axx+4aax=0.$$
$$(3AA+6xA-6aA-12ax)B+3AA-12aA-8ax+4aa=0.$$
$$(3AA+6xA-6aA-12ax)C+(3A+3x-3a)BB+(6A-12a)B-4A=0.$$
$$(3AA+6xA-6aA-12ax)D+(6A+6x-6a)BC+(6A-12a)C+B^3+3BB=0.$$

La conformité de la prémiére avec la Propoſée montre que $A=y$. Comme la valeur d'A tirée de cette équa-

Digitized by Google

Ch. XI. §. 206. cette équation n'eſt pas une fraction, puiſque le prémier terme de l'équation cubique $A^3 + 3(x-a)AA + 12axA - (4axx - 4aax) = 0$ n'eſt point affecté, on ne ſauroit rendre A, ou y, infinie en égalant ſon dénominateur à zéro. Ainſi la Courbe n'a point d'Ordonnées-aſymptotes, & ſes ordonnées ne deviennent infinies que quand les abſciſſes ſont infinies. Mais, en faiſant $A = 0$, on a $-4axx + 4aax = 0$, dont les racines ſont $x = 0$ & $x = a$. Donc la Courbe rencontre l'Axe des abſciſſes à l'origine A, & à l'extrémité B de l'abſciſſe $AB = a$. PLANCHE XXIII.

En mettant y au lieu d'A, la ſeconde équation des coëfficients donne $B = -\frac{3yy - 12ay - 8ax + 4aa}{3yy + 6xy - 6ay - 12ax}$: ce qui donne en général les Tangentes de la Courbe. Si on veut, par ex. la Tangente du Point B, on mettra, dans cette valeur de B, a pour x & o pour y, & on aura $B = -\frac{-4aa}{-12aa} = -\frac{1}{3}$. On prendra donc, ſur l'ordonnée, $BC = -\frac{1}{3}AB$, & AC ſera parallèle à la Tangente BT.

Les *Maxima* & *Minima* d'ordonnées ſe trouveront en égalant à zéro le numérateur de B. De là on tire $x = \frac{3yy - 12ay + 4aa}{8a}$, & cette fraction, ſubſtituée à x dans la Propoſée, la change en $9y^4 - 5ay^3 - 120aayy - 96a^3y + 16a^4 = 0$, qui ſe peut diviſer par $y - 2a$, & donne au quotient $9y^3 - 38ayy + 44a^2y - 8a^3$. Ainſi l'équation, qui donne les limites des ordonnées, a cette racine $y - 2a = 0$, & les trois que renferme l'éq: $9y^3 - 38ayy + 44aay - 8a^3 = 0$, dont deux ſont imaginaires [§. 59. III. 1] & la troiſiéme réelle, & à peu près $y - \frac{21}{100}a = 0$.

La racine $y - 2a = 0$ ſe raporte à un Point multiple. Car

PLANCHE XXIII. Car mettant $2a$ pour y dans l'éq : $x = \frac{3yy - 12ay + 4aa}{8a}$, CH. XI. §. 206. elle ſe réduit à $x = -a$. Et ces valeurs d'y & de x ſubſtituées dans la valeur de B, qui eſt $\frac{3yy - 12ay - 8ax + 4aa}{3yy + 6xy - 6ay - 12ax}$ la réduiſent à $\frac{0}{0}$: ce qui marque un Point multiple [§. 203]. Nous en parlerons tout à l'heure.

La racine $y = \frac{23}{100}a$ à peu près, donne $x = \frac{17\frac{1}{2}}{100}a$ à peu près, & indique un vrai *Maximum* d'ordonnées. Car ſi on cherche la valeur de C dans la 3e. équation des coëfficients, laquelle [B étant zéro] eſt $(3yy + 6xy - 6ay - 12ax)C - 4a = 0$, on aura, [en mettant $\frac{17\frac{1}{2}}{100}a$ pour x & $\frac{23}{100}a$ pour y], $C = -\frac{4}{3a}$ a peu près; qui eſt une valeur négative, tandis que A [y] eſt poſitive. Donc le Point M, qui a pour abſciſſe $AP = \frac{17\frac{1}{2}}{100}a$, à peu près, & pour ordonnée $PM = \frac{23}{100}a$ à peu près, eſt un *Maximum* d'ordonnées.

Si on égale à zéro le dénominateur $3yy + 6xy - 6ay - 12ax$ de B, on aura, pour déterminer les Points de la Courbe où la Tangente eſt parallèle aux ordonnées, une équation qui a deux racines, $y = 2a$, & $y + 2x = 0$. La prémiére racine donne le Point multiple indiqué cy-deſſus, & dont nous parlerons plus amplement. La ſeconde réduit l'équation de la Courbe à $4x^3 + 8axx + 4aax = 0$ dont les racines ſont $x = 0$, & $x = -a$. Celle-ci ſe raporte au Point multiple, & l'autre donnant y [$= -2x$] $= 0$, marque qu'à l'Origine l'Axe des ordonnées eſt Tangente. Pour avoir la poſition de la Courbe par raport à cette Tangente, on mettra, dans la Trans-

CH. XI. §. 206. PLANCHE XXIII.

Transformée en u & z, o pour x, ce qui la changera en $u^3 - 3uuz - 3auu - 12auz - 4azz + 4aaz = 0$. Si on cherche, par cette équation, les Séries aſcendantes qui donnent u en z [§. 102], on aura $u = \pm\sqrt{\frac{1}{3}az}$, &c. Ainſi u a deux valeurs réelles, z étant poſitive, qui deviennent imaginaires, quand on prend z négative. L'Origine eſt donc une limite où viennent s'unir deux Branches qui s'étendent du côté des abſciſſes poſitives.

La racine $x = -a$, qui donne $y = 2a$, marque, comme nous l'avons dit, un Point multiple. Pour en connoitre la nature, on ſubſtituera $-a$ pour x dans la Transformée en u & z, ce qui la change en $u^3 + 3uuz - 6auu - 12auz - 4azz + 12aau + 12aaz - 8a^3 = 0$. Si on cherche [§. 102] les Séries aſcendantes que fournit cette équation & qui donnent u en z, on trouvera $u = 2a + (4a)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}$ &c. L'Ordonnée DE, de l'abſciſſe AD $= -a$, eſt donc égale à $2a$. Et les ordonnées voiſines la ſurpaſſent de la quantité $(4a)^{\frac{1}{3}} z^{\frac{2}{3}}$ ou $\sqrt[3]{4azz}$, qui eſt toûjours poſitive, quelque ſigne qu'on donne à z. Le Point E eſt donc un *Minimum* d'ordonnées, quoiqu'en ce Point la Tangente touche la Courbe. En un mot, ce Point E eſt un Rebrouſſement [§. 206]; qui eſt un Point double, puiſque deux Branches de la Courbe viennent s'y toucher.

Il ne nous reſte qu'à voir ſi la Courbe a quelque Point d'Inflexion. On les détermine en faiſant $C = 0$. Cette ſuppoſition réduit la 3e. équation des coëfficiens à $3(y + x - a)BB + 6(y - 2a)B - 4a = 0$. Qu'on y mette pour B ſa valeur $-\frac{3yy - 12ay - 8ax + 4aa}{3yy + 6xy - 6ay - 12ax}$, & on aura une équation qui ſe réduit à $-81xy^4 - 27y^5 + 504axy^3 + 153ay^4 + 192a^2x^2y - 1080a^2xy^2 - 288a^2y^3 + 192a^3x^2 + 1248a^3xy + 216a^3y^2 - 336a^4x + 48a^4y -$

PLANCHE XXIII. $48a^5 = 0$. De cette équation on peut ôter le produit de la Propoſée $y^3 + 3xyy - 3ayy - 12axy - 4axx + 4aax = 0$ par $-27yy - 36ax - 72ay - 72aa$, lequel produit eſt zéro, & le reſte diviſé par $48aa$, eſt $x^3 + x^2y + ax^2 + 2axy - aax - a^3 = 0$, ou $(x+a)^2 \times (x+y-a) = 0$. La racine $x + a = 0$ déſigne, comme on l'a vû, le Point double E. Et la racine $x = a - y$, ſubſtituée dans l'équation de la Courbe, la réduit à $2y^3 + 8ayy - 8a^2y = 0$, ou $2y(y-2a)^2 = 0$. La racine $y = 2a$ ſe raporte encore au Point double E. Mais la racine $y = 0$ donne $x[= a - y] = a$. Le Point B, que ces coordonnées indiquent, eſt véritablement un Point d'Inflexion. Car ſi, dans la 3e. équation des coëfficients, on met 0 pour y ou A, a pour x, & $-\frac{1}{4}$ pour B, elle ſe réduira à $-12aaC = 0$, c'eſt-à-dire $C = 0$. Mais ces mêmes valeurs, ſubſtituées dans la 4e. équation, la réduiſent à $-12aaD + \frac{1}{27} = 0$, ou $D = \frac{2}{81aa}$. Donc, au Point B, C eſt zéro & D n'eſt pas zéro : ce qui eſt le caractére d'un Point d'Inflexion. [§. 204]. CH. XI. §. 206.

CHAPI-

Digitized by Google

g. 176.

Fig. 178.

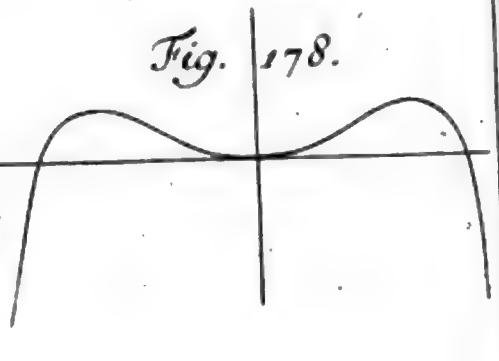


Fig. 177.

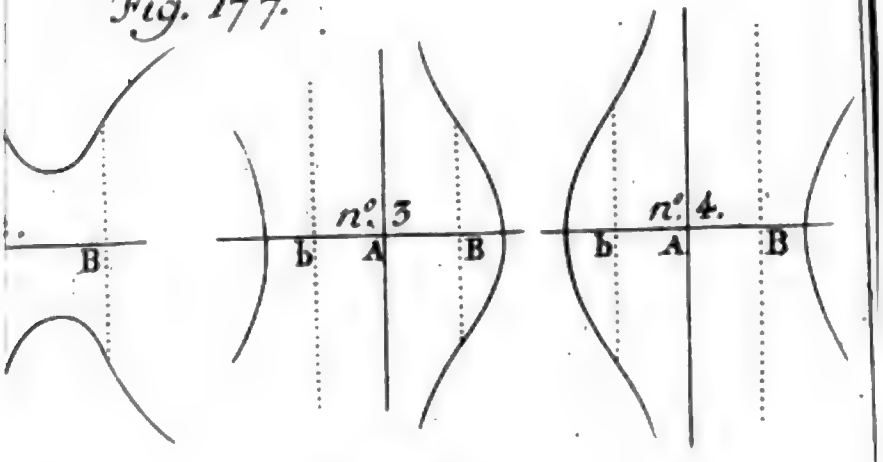
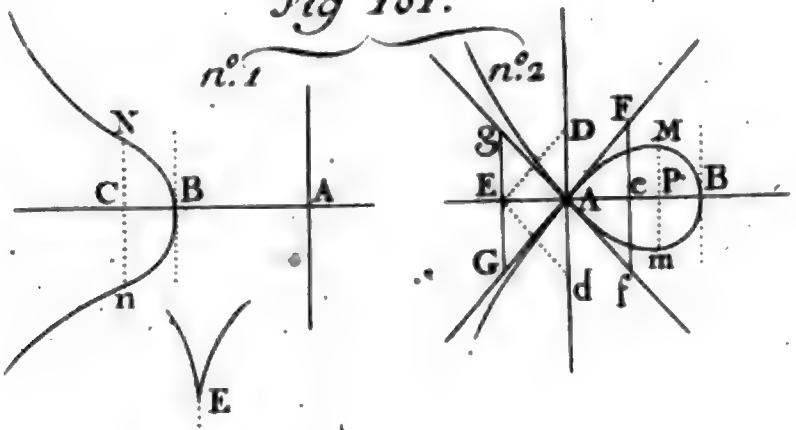


Fig 181.



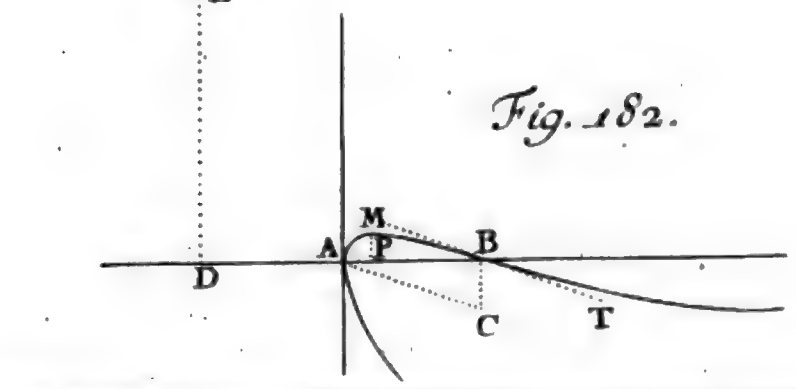


Fig. 182.

Digitized by Google

CHAPITRE XII.

De la Courbure des Lignes courbes en leurs différents Points.

207. LA DETERMINATION des Tangentes d'une Courbe indique quelle eſt ſa direction en chacun de ſes Points. Mais, pour en connoitre parfaitement la Nature, il faut ſavoir de plus combien la Courbe s'écarte de cette direction; il faut ſavoir meſurer ſa courbure. Car une même Courbe n'eſt pas également courbe par tout; elle ne s'écarte pas toûjours également de ſa Tangente; elle ne fait pas avec cette Droite des angles de contact égaux en tous ſes Points. C'eſt le Cercle ſeul qui a par tout la même courbure, & qui eſt par-là très-propre à meſurer la courbure des autres Courbes. D'autant mieux que, quoiqu'un même Cercle ſoit également courbe en tous ſes points, les différents Cercles ont des courbures différentes, & réciproquement proportionelles à leurs raïons, ou à leurs diamétres. Si on courbe circulairement deux Droites égales, mais qu'on faſſe de l'une une circonférence entiére, & de l'autre une demi-circonférence; celle-ci ſera deux fois moins courbe que celle-là, mais auſſi le Cercle dont elle fait la demi-circonférence a un raïon double du Cercle dont l'autre Ligne fait toute la circonférence. En général, ſoient ABD, abd deux Cercles inégaux, dont les raïons AC, ac ſoient entr'eux en raiſon de *m* à *n*; & qu'on prenne ſur ſur ces Cercles des arcs égaux AB, ab; je dis que l'arc AB eſt moins courbe que l'arc ab dans la même raiſon

PLANCHE XXIV. *Fig.* 183.

PLANCHE XXIV. que le raïon AC eſt plus grand que le raïon ac; deſorte que ſi l'arc ab a une courbure de *m* dégrés, minutes, ou parties, l'arc AB a une courbure de *n* dégrés, minutes, ou parties proportionelles. Car, ſi on prend l'arc Aβ ſemblable à l'arc ab, cet arc Aβ eſt à l'arc ab, comme la circonf. ABD à la circonf. abd, ou comme le raïon AC au raïon ac, c'eſt-à-dire, comme *m* à *n*. Donc ab étant égal à AB, Aβ eſt auſſi à AB comme *m* à *n*. Ainſi Aβ, ſemblable à ab, étant un arc de *m* dégrés ou parties, AB eſt un arc de *n* dégrés ou parties. Donc la courbure de ab eſt à celle de AB comme *m* à *n*. On voit donc, que dans une même étenduë ab, AB, les Cercles abd, ABD ont des courbures qui ſont entr'elles comme *m* à *n*, ou comme AC à ac, c'eſt-à-dire en raiſon réciproque de leurs raïons ou diamétres. CH. XII. §. 207.

Ainſi il eſt aiſé de comparer la courbure de différents Cercles, en comparant leurs raïons ou diamétres. Et par conſéquent pour comparer la courbure des différentes Courbes, ou celle d'une même Courbe en ſes différents Points, il ne s'agit que de trouver le Cercle, qui a la même courbure qu'une Courbe donnée en un Point donné: c'eſt-à-dire, le Cercle, qui, touchant la Courbe au Point donné, s'applique ſi bien à cette Courbe, qu'entre elle & le Cercle on ne puiſſe faire paſſer aucun autre Cercle. Car comme, en augmentant ou diminuant le raïon d'un Cercle, on diminuë ou augmente ſa courbure par tous les dégrés poſſibles; s'il n'y a aucun Cercle qui aproche plus de la Courbe que le Cercle trouvé, on peut conclure que le Cercle a la même courbure que la Courbe en ce Point-là. J'excepte le cas, où la courbure d'une Courbe eſt plus grande ou plus petite que celle d'aucun Cercle. On en parlera dans la ſuite.

Digitized by Google

CH. XII. §. 208. 208. Reprenons la Figure du §. 200, où PM [y] eſt l'ordonnée d'un Point aſſigné M de la Courbe Mμm, Pp [z] une abſciſſe quelconque comptée dès l'Origine P, & dont l'ordonnée pm eſt exprimée par la Série $A + Bz + Cz^2 + Dz^3$ &c. On a vû que le 1r. terme A de cette Série repréſente l'ordonnée PM ou la partie pn de l'ordonnée pm, que le 2d. terme Bz exprime la partie nO, compriſe entre l'abſciſſe QMn & la Tangente MO, & & que le reſte de la Série $Cz^2 + Dz^3$ &c. déſigne la partie Omn compriſe entre la Tangente & la Courbe [§. 201]. PLANCHE XXIV. Fig. 184.

Qu'on imagine un Cercle Mmih, qui touche au Point M la Courbe Mμm [c'eſt-à-dire ſa Tangente MO], & qui paſſe par le point m. Si le Cercle paſſe entre la Tangente & la Courbe, il ſe détourne de la Tangente moins que la Courbe, il eſt moins courbe qu'elle au Point M. Si, au contraire, la Courbe paſſe entre le Cercle & la Tangente, le Cercle ſe détourne de la Tangente plus que la Courbe, il eſt plus courbe qu'elle au Point M. Mais dans l'un & l'autre cas, plus le Point m, où le Cercle coupe la Courbe, eſt proche du Point M où il la touche, plus le Cercle aproche d'avoir la même courbure que la Courbe. Il en aproche infiniment, il ſe confond avec elle, & a préciſément la même courbure, lorſque le point m vient à tomber ſur le Point M.

On aura donc le Cercle MIH de même courbure que la Courbe au Point M, ſi l'on détermine la grandeur du Diamétre MH d'un Cercle, qui touchant la Courbe Mμm en M la coupe en un point m infiniment proche de M, ou coïncidant avec M. Le Diamétre MH, & le raïon MK de ce Cercle ſont auſſi apellés le *Diamétre* & le *Raïon de la Courbure* au Point M, & le centre K ſe nomme le *Centre de la Courbure*. L'on compare la courbure des différents Points d'une même Courbe, ou de

PLANCHE XXIV. diverſes Courbes, par la raiſon inverſe des raïons de courbure en ces différents Points. CH. XII. §. 209.

209. Pour calculer le raïon de courbure, on ſuppoſera d'abord le Point m à une diſtance finie de M. En prolongeant pm juſqu'à-ce qu'elle rencontre en i la circonférence Mmh, on aura [EUCL. III. 36] le rectangle ſous mO & Oi égal au quarré de MO. Donc $Oi = \frac{MO^2}{mO}$. Mais $MO^2 = Mn^2 + nO^2 = zz + BBzz$, & $mO = Cz^2 + Dz^3$ &c. Donc $Oi = \frac{zz + BBzz}{Czz + Dz^3, \&c} = \frac{1 + BB}{C + Dz, \&c}$.

Maintenant, ſi on ſuppoſe que le Point m vient coïncider avec M, l'abſciſſe z [Pp] deviendra zéro, & l'expreſſion $\frac{1 + BB}{C + Dz, \&c}$ de Oi [qui dans ce cas eſt MI] deviendra $\frac{1 + BB}{C}$. Ainſi, MIH étant le Cercle de même courbure que la Courbe Mμm au Point M, la chorde MI eſt égale à $\frac{1 + BB}{C}$; ce qui ſuffit pour déterminer le diamétre MH, & par conſéquent auſſi le centre K de courbure; ſçavoir, en menant par I la Droite IH parallèle aux abſciſſes, & qui coupe en H la Droite MH perpendiculaire à la Courbe.

L'on peut auſſi, ſi l'on veut, calculer le diamétre MH, en conſidérant que les triangles MnO, MIH ſont ſemblables, tous les côtés de l'un étant perpendiculaires à tous les côtés de l'autre. On aura donc $Mn [z] : MO [z\sqrt{(1 + BB)}] = MI [\frac{1 + BB}{C}] : MH [\frac{(1 + BB)\sqrt{(1 + BB}}{C}]$,

diamétre

CH. XII. §. 209. diamétre de courbure. Donc le raïon de courbure MK est $\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}$, & le centre de courbure K est déterminé, puiſqu'il eſt ſur la droite MH perpendiculaire à la Courbe, & à la diſtance donnée MK du Point M. PLANCHE XXIV.

Exemple I. On propoſe l'éq: $yy - ax - \frac{b}{c}xx = o$, qui repréſente l'Hyperbole, ſi b eſt poſitive, ou l'Ellipſe, ſi b eſt négative [§. 154]. Qu'on ſubſtituë, dans cette équation, u à y & $x+z$ à x, on aura la Transformée $uu - ax - az - \frac{b}{c}xx - 2\frac{b}{c}xz - \frac{b}{c}zz = o$. Si on cherche la valeur d'u en z par une Série de cette forme $u = A + Bz + Czz$, *&c.* on trouvera $A = y$, $B = \frac{ac+2bx}{2cy}$, $C = \frac{aacc+4abcx+4bbxx-4bcyy}{8ccy^3}$, *&c.* Donc la Droite MI, dont l'expreſſion eſt $\frac{1+BB}{C}$, eſt ici égale à $-2\frac{aacc+4abcx+4bbxx+4ccyy}{aacc+4abcx+4bbxx-4bcyy}y$, qui ſe réduit [en mettant yy pour $ax+\frac{b}{c}xx$, c'eſt-à-dire, $4bcyy$ pour $4abcx+4bbxx$] à $-2\frac{aacc+4(bc+cc)yy}{aacc}y = -2y - 8\frac{b+c}{aac}y^3$. Le ſigne négatif montre que cette Droite MI doit être priſe ſur l'ordonnée MP, au lieu que dans la Propoſition générale on la ſuppoſoit priſe ſur ſon prolongement. Fig. 185. Fig. 186.

Le raïon de courbure MK, qui eſt $= \frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}$, ſera

PLANCHE XXIV. sera $-\frac{(aacc+4(bc+cc)yy)\sqrt{(aacc+4(bc+cc)yy)}}{2aac^3}$, grandeur négative, parce que la Courbe, qu'on avoit supposé, dans la Proposition générale, tourner sa convexité vers l'Axe des abscisses, tourne dans cet Exemple sa concavité vers cet Axe. CH. XII. §. 109.

On peut donc comparer la courbure de ces Courbes dans leurs différents Points. Ainsi à l'Origine, où $y=0$, le Raïon de courbure est $-\frac{aacc\sqrt{aacc}}{2aac^3}=-\frac{1}{2}a$: à l'extrémité de l'ordonnée $\frac{1}{2}a$, il est $-\frac{aa(2cc+bc)\sqrt{(aa(2cc+bc))}}{2aac^3}$ $=-\frac{(2c+b)\sqrt{(2c+b)}}{2c\sqrt{c}}a$, grandeur, qui sera imaginaire dans l'Ellipse, où b est négative, si $b>2c$. Aussi voit-on, par le calcul, que l'ordonnée $\frac{1}{2}a$ n'a que des abscisses imaginaires quand $b>c$, &, à plus forte raison, quand $b>2c$. Mais posons que $b<c$. Alors la courbure à l'Origine est à la courbure du Point qui est à l'extrémité de l'ordonnée $\frac{1}{2}a$, comme $\frac{(2c+b)\sqrt{(2c+b)}}{2c\sqrt{c}}a$ est à $\frac{1}{2}a$, ou comme $(2c+b)\sqrt{(2c+b)}$ à $c\sqrt{c}$.

Exemple II. L'éq: $y=ax^b$, qui exprime en général toutes les Paraboles & les Hyperboles [§. 128], se transforme, par la substitution de u, ou $A+Bz+Cz^2+Dz^3$ &c, pour y & de $x+z$ pour x, en $A+Bz+Czz+Dz^3$ &c $=ax^b+bax^{b-1}z+\frac{b.b-1}{1.2}ax^{b-2}z^2+\frac{b.b-1.b-2}{1.2.3}ax^{b-3}z^3$, &c; ce qui donne, sans calcul,

$A=ax^b=y$, $B=bax^{b-1}$, $C=\frac{b.b-1}{1.2}ax^{b-2}$,

&c.

Digitized by Google

CH. XII. §. 209. PLANCHE XXIV.

&c. Donc $= MI\left[\frac{1+BB}{C} =\right] \frac{1+hhaax^{2h-2}}{\frac{h.h-1}{1.2}\,ax^{h-2}} =$

$\frac{xx+hhaax^{2h}}{\frac{hh-h}{2}\,ax^{h}}$, & le raïon de courbure $MK =$

$\left[\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C} =\right] \frac{(1+hhaax^{2h-2})\sqrt{(1+hhaax^{2h-2})}}{(hh-h)\,ax^{h-2}}$.

Suppoſons qu'on ne cherche la courbure qu'à l'Origine, où $x = 0$; il y a pluſieurs Cas à diſtinguer *. L'expoſant h peut être poſitif, ou négatif. S'il eſt négatif, la Courbe eſt une Hyperbole : s'il eſt poſitif, c'eſt une Parabole. Et dans ce dernier Cas, h eſt plus grand, égal, ou plus petit que l'unité.

1. Quand $h > 1$, l'expoſant $2h-2$ eſt poſitif. Donc la ſuppoſition de x infiniment petite rend $hhaax^{2h-2}$ infiniment petite ou zéro ; le numérateur de la fraction $\frac{(1+hhaax^{2h-2})\sqrt{(1+hhaax^{2h-2})}}{(hh-h)\,ax^{h-2}}$ ſe réduit à $1\sqrt{1} = 1$, & la fraction elle-même revient à $\frac{1}{(hh-h)ax^{h-2}} = \frac{x^{2-h}}{(hh-h)a}$, qui eſt toujours poſitive. Auſſi la Parabole tourne-t-elle ſa convexité vers l'Axe des abſciſſes [§. 127].

Mais, x étant toujours infiniment petite, x^{2-h} eſt infiniment petite, finie, ou infinie, ſelon que $2-h$ eſt poſitif, nul, ou négatif, [§. 79]; c'eſt-à-dire, ſelon que h eſt plus petit, égal, ou plus grand que 2. Donc le raïon de courbure, à l'Origine de la Parabole, lequel eſt

* *Anal. des Infin. petits.* §. 87. 88.

PLANCHE XXIV. CH. XII. §. 209.

désigné par la fraction $\frac{x^{2-h}}{(hh-h)a}$, est infiniment petit, si $h < 2$; fini, si $h = 2$; infini, si $h > 2$: & la courbure étant en raison inverse de son raïon [§. 207], est infinie, finie, ou infiniment petite, suivant que $h < 2$, ou $= 2$, ou > 2.

2. Quand $h = 1$, l'éq : $y = ax^h$ ne représente qu'une Droite, dont la courbure est infiniment petite, ou plutôt nulle. Aussi trouve-t-on le raïon de courbure infini ; le dénominateur de la fraction qui exprime sa valeur, étant un multiple de $[hh - h = 1 - 1 =]\, 0$.

3. Quand $h < 1$, mais pourtant positif, l'exposant $2h - 2$ est négatif. On peut reduire l'expression $\frac{(1+hhaax^{2h-2})\sqrt{(1+hhaax^{2h-2})}}{(hh-h)\,ax^{h-2}}$ du raïon de courbure à $\frac{(x^{2-2h}+hhaa)\sqrt{(x^{2-2h}+hhaa)}}{(hh-h)\,ax^{1-2h}}$, en multipliant les deux termes de la fraction par $x^{2-2h}\sqrt{x^{2-2h}} = x^{3-3h}$. Donc le raïon de courbure à l'Origine, qui se trouve en supposant $x = 0$, sera $\frac{hhaa\sqrt{hhaa}}{(hh-h)\,ax^{1-2h}} = \frac{hhaa}{(h-1)\,x^{1-2h}} = \frac{hhaax^{2h-1}}{h-1}$, grandeur négative, puisque $h < 1$. Et cela doit être ainsi, puisque ces Paraboles sont concaves vers l'Axe des abscisses [§. 127].

Ce raïon est infini, fini, ou infiniment petit, selon que x^{2h-1} est infinie, finie, ou infiniment petite, c'est-à-dire, selon que h est $< \frac{1}{2}$, $= \frac{1}{2}$, ou $> \frac{1}{2}$. Ce qui s'accorde

Ch. XII. §. 209. corde avec ce qu'on a vu au §. 127, que les Paraboles concaves vers l'Axe des abſciſſes ſont les mêmes que celles qui ſont convexes vers cet Axe, qu'elles ſont ſeulement dans une ſituation renverſée ; ou, ce qui eſt la même choſe, que les Paraboles dont l'équation eſt $y = ax^b$ ſont les mêmes que celles dont l'équation eſt $y = ax^{\frac{1}{b}}$, en prenant pour les abſciſſes des unes les ordonnées des autres, & réciproquement. Planche XXIV.

4. Enfin ſi b eſt négatif, l'éq : $y = ax^{-b}$ repréſente les Hyperboles, dont le raïon de courbure s'exprime par la fraction $\frac{(x^{2+2b} + bbaa)\sqrt{(x^{2+2b} + bbaa)}}{(bb+b)\,ax^{1+2b}}$ toujours poſitive, parce que toutes les Hyperboles tournent leur convexité vers l'Axe des abſciſſes.

210. Ces deux Exemples ſuffiſent pour faire voir la maniére de meſurer en un Point donné la courbure d'une Courbe donnée. Mais nous ne devons pas quitter ce ſujet, ſans dire un mot de diverſes Queſtions qu'on peut propoſer ſur cette matiére.

1. On peut demander, par ex. En quel Point une Courbe donnée a une courbure donnée ? Cette courbure ne peut être donnée que par le moyen du Cercle qui a préciſément ce dégré de courbure. Et ce Cercle eſt donné par ſon raïon. On égalera donc au raïon donné l'expreſſion générale du raïon de courbure de la Courbe propoſée ; & cette équation, combinée, s'il le faut, avec celle de la Courbe, déterminera le Point cherché.

Ainſi, ſi l'on demandoit le Point de l'Hyperbole ou de l'Ellipſe, repréſentée par l'éq : $yy - ax - \frac{b}{c}xx = o$ [§.

PLANCHE XXIV. préc. *Ex. I*], dont la courbure eſt la même que celle du Cercle décrit avec un raïon r : On égalera à r l'expreſſion générale du Raïon de courbure de ces Courbes, qui eſt $-\frac{(aacc+4(bc+cc)yy)\sqrt{(aacc+4(bc+cc)yy)}}{2aac^3}$, & on aura $-2aac^3r=(aacc+4(bc+cc)yy)\sqrt{(aacc+4(bc+cc)yy)}=(aacc+4(bc+cc)yy)^{3:2}$: ce qui, en quarrant & extraiant la racine cubique, donne $acc\sqrt[3]{4arr}=aacc+4(bc+cc)yy$. Donc $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{ac(-a+\sqrt[3]{4arr})}{b+c}}$. CH. XII §. 210.

Cette grandeur devient imaginaire, 1°. quand $-a+\sqrt[3]{4arr}$ eſt négative, [c'eſt-à-dire, quand $r<\frac{1}{2}a$] & $b+c$ poſitive, [c'eſt-à-dire, quand b eſt poſitive, ou même négative, mais $<c$]. Ainſi & l'Hyperbole, & l'Ellipſe dans l'équation de laquelle $b<c$, n'ont nulle part une courbure moindre que celle du Cercle dont le raïon eſt $\frac{1}{2}a$. 2°. quand $-a+\sqrt[3]{4arr}$ eſt poſitive, & $b+c$ négative, c'eſt-à-dire, quand b négative eſt $>c$, & quand $r>\frac{1}{2}a$. Ainſi l'Ellipſe, dans l'équation de laquelle $b>c$, n'a nulle part une courbure plus grande que celle du Cercle qui a pour raïon $\frac{1}{2}a$.

211. II. On peut demander, en quels Points d'une Courbe ſa courbure eſt infinie ? Ce ſera aux Points où le raïon de courbure eſt infiniment petit ou nul. On égalera donc à zéro l'expreſſion générale du raïon de courbure de la Courbe propoſée, & par cette équation, combinée, s'il le faut, avec celle de la Courbe, on déterminera les Points où la courbure eſt infinie, c'eſt-à-dire, plus grande que celle d'aucun Cercle donné. Telle eſt à l'Origine la courbure de toutes les Paraboles exprimées par

CH. XII §. 211. par l'éq : $y = ax^h$, lorſque h tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$ [§. 209. *Ex. II. n°.* 1 & 3]. PLANCHE XXIV.

212. III. On peut auſſi demander en quels Points une Courbe a une courbure nulle, ou infiniment petite? Telle eſt à l'Origine la courbure des Paraboles repréſentées par l'éq : $y = ax^h$, lorſque h eſt > 2, ou $< \frac{1}{2}$. [§. 209. *Ex. II*]. Mais en général, ſi une Courbe a quelques Points où ſa courbure ſoit infiniment petite, ſon raïon de courbure y doit être infini. Ainſi ſon expreſſion générale doit être une fraction, dont le dénominateur puiſſe être égalé à zéro, ſans contradiction. Il faut donc que l'une des variables x, y entre dans ce dénominateur. Et il faut de plus que la ſuppoſition qui le rend égal à zéro n'anéantiſſe pas le numérateur.

La formule générale $\frac{(1+BB)\sqrt{(1+BB)}}{2C}$ du raïon de courbure fait voir qu'il ne peut être infini, que dans les Points où C eſt zéro, c'eſt-à-dire, dans les Points d'Inflexion ou de Serpentement [§. 204]. Mais cela n'eſt pas réciproque, & il y a des Points d'Inflexion, où la courbure, loin d'être infiniment petite, eſt infiniment grande. Telle eſt l'Origine des Paraboles, dans l'éq : $y = ax^h$ deſquelles h eſt une fraction de numérateur & de dénominateur impair, laquelle tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$ [§. 209. *Ex. II*].

213. IV. On peut demander quel eſt le Point d'une Courbe, où ſa courbure eſt la plus grande, ou la plus petite? Pour le trouver, on cherchera par la Méthode *de Maximis & Minimis*, en quel Point le raïon de courbure eſt le plus petit ou le plus grand [§. 197].

Prenons pour exemple les Paraboles, dont l'équation générale eſt $y = ax^h$ [h étant poſitif]. Le raïon de cour-

PLANCHE XXIV. courbure eſt $\frac{(1+hhaax^{2b-2})\sqrt{(1+hhaax^{2b-2})}}{h(h-1)ax^{b-2}} = \frac{(1+hhaax^{2b-2})^{3:2}}{h(h-1)ax^{b-2}}$. Soit ce raïon apellé r. On demande quelle eſt la valeur d'x qui rend r un *Minimum* : car il eſt bien clair, par la nature des Paraboles, qu'il n'y a point de *Maximum*, puiſque leur courbure va en diminuant à l'infini, dès qu'une fois x a paſſé certain terme. On a donc l'éq : $(1+hhaax^{2b-2})^{3:2} = h(h-1)ax^{b-2}r$, ou quarrant, $1+3hhaax^{2b-2}+3h^4a^4x^{4b-4}+h^6a^6x^{6b-6} = hh(h-1)^2aax^{2b-4}rr$, qui repréſente une Courbe, dont x eſt l'abſciſſe, & r l'ordonnée. Il s'agit de trouver l'abſciſſe qui a la plus petite ordonnée. Pour cela, on cherchera le prémier Rang de la Transformée qui réſulte de la ſubſtitution de $x+z$ à x, & de $r+u$ à r. Ce Rang eſt $+(-2hh(h-1)^2aax^{2b-4}r)u+((6b-6)hhaax^{2b-3}+(12b-12)h^4a^4x^{4b-5}+(6b-6)h^6a^6x^{6b-7}-(2b-4)hh(h-1)^2aax^{2b-5}rr)z$. On égalera à zéro le coëfficient de z & on aura $rr = \frac{(6b-6)hhaax^{2b-3}(1+hhaax^{2b-2})^2}{(2b-4)hh(h-1)^2aax^{2b-5}} = \frac{(3b-3)xx(1+hhaax^{2b-2})^2}{(b-2)(b-1)^2}$. D'un autre côté, l'éq : $(1+hhaax^{2b-2})^{3:2} = h(h-1)ax^{b-2}r$, montre que $rr = \frac{(1+hhaax^{2b-2})^3}{hh(h-1)^2aax^{2b-4}}$: valeur qui, comparée

CH. XII. §. 213.

avec

CH. XII. §. 213. avec la précédente, donne $\frac{(1+hhaax^{2b-2})^3}{hh(b-1)^2aax^{2b-4}} =$ PLANCHE XXIV.

$\frac{(3b-3)xx(1+hhaax^{2b-2})^2}{(b-2)(b-1)^2}$ ou $\frac{1+hhaax^{2b-2}}{hhaax^{2b-4}} = \frac{(3b-3)xx}{b-2}$, d'où l'on tire $x^{2b-2} = \frac{b-2}{(2b-1)hhaa}$. ce qui détermine la valeur d'x.

L'expoſant $2b-2$ d'x, dans cette équation, étant un nombre pair, il en réſulte pour x deux valeurs égales, mais l'une poſitive, l'autre négative; ce qui convient à la forme des Paraboles, qui ont des Branches ſemblables de part & d'autre de l'Axe des ordonnées. Ces valeurs d'x ſont imaginaires, quand b tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$, parce qu'alors le numérateur $b-2$ eſt négatif, & le dénominateur $2b-1$ poſitif, ce qui rend la fraction $\frac{b-2}{(2b-1)hhaa}$ négative, & ſa racine du dégré pair $2b-2$, qui eſt la valeur d'x, imaginaire. Mais ces valeurs d'x ſont réelles quand $b > 2$, ou $b < \frac{1}{2}$, parce qu'alors la fraction eſt poſitive, ſes deux termes étant, ou tous deux poſitifs, ou tous deux négatifs. Et cela s'accorde très bien avec ce qu'on a vu [§. 209. *Ex. II*, & §. 212], que dans ce dernier Cas, le raïon de courbure eſt infini à l'Origine. Car comme il l'eſt auſſi à l'extrémité de la Courbe qui eſt infiniment éloignée, il faut qu'il y ait entre deux un Point de la Courbe où le raïon de courbure eſt un *Minimum*.

Si on ſuppoſe b négatif, ce qui détermine l'éq : $y = ax^{-b}$ à repréſenter toutes les Hyperboles; l'expreſſion du raion de courbure eſt $\frac{(x^{2+2b}+hhaa)^{\frac{3}{2}}}{b(b+1)ax^{1+2b}}$, [§. 209. *Ex. II. n°.* 4];

PLANCHE XXIV. *II. n°. 4*], lequel eſt un *Minimum*, quand $x^{2+2b} = \frac{1+2b}{2+b} hhaa$. La racine de cette équation eſt toujours réelle, parce que la fraction $\frac{1+2b}{2+b} hhaa$ eſt toujours poſitive. La Figure des Hyperboles fait voir auſſi que leur courbure diminuë de part & d'autre, à meſure qu'elles s'aprochent de leurs Aſymptotes. Elles ont donc un Point où leur courbure eſt la plus grande & le raion de courbure un *Minimum*. CH. XII. §. 213.

214. CE QU'IL importe le plus de remarquer ici, où il s'agit des Points ſinguliers d'une Courbe, c'eſt que la courbure des Points ordinaires étant finie, il y a des Points qui ont une courbure infinie, & d'autres une courbure infiniment petite. Le raion de courbure des prémiers eſt infiniment petit, celui des derniers infini; car il eſt toujours en raiſon inverſe de la courbure. On en a vû [§. 209. *Ex. II*] des Exemples dans les Paraboles de différents ordres repréſentées par l'éq : $y = ax^h$. Celles qu'exprime cette équation quand $b = 2$ ou $\frac{1}{2}$ [car c'eſt la même, mais dans une poſition renverſée,] ont partout une courbure finie, & à l'Origine cette courbure eſt la même que celle d'un Cercle dont le diamétre eſt $\frac{1}{a}$. Mais ſi b tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$ [pourvu qu'il ne ſoit pas égal à l'unité, en quel cas l'éq : $y = ax$ ne déſigne plus une Parabole, mais une Droite] la courbure à l'Origine eſt infinie. Au contraire, ſi b eſt > 2 ou $< \frac{1}{2}$, la courbure à l'Origine eſt infiniment petite.

Ces courbures infinies & infiniment petites varient entr'elles par des dégrés infinis. Si on ſuppoſe b ſucceſſivement égal à 2, 3, 4, 5, &c. on aura une ſuite de Paraboles,

Digitized by Google

CH. XII. §. 214. boles, dont la prémiére a, à l'Origine, une courbure finie, la ſeconde une courbure infiniment petite, la troiſiéme une courbure infiniment plus petite que la ſeconde, la quatriéme une courbure infiniment plus petite que la troiſiéme, & ainſi de ſuite à l'infini. Car ſi l'on ſuppoſe que AM eſt la Parabole déſignée par l'éq: $y = ax^h$, & Am la Parabole exprimée par l'éq: $y = bx^h$, deſorte que l'abſciſſe AP étant x, les ordonnées PM, Pm ſoient ax^h, bx^h; ces ordonnées ſeront entr'elles comme a à b. Donc, b étant ſuppoſé plus petit que a, Pm eſt plus petite que PM; la Parabole Am, dont le Paramétre b eſt plus petit, embraſſe la Parabole AM, dont le Paramétre a eſt plus grand; elle eſt moins courbe. On peut donc, en diminuant le Paramétre à l'infini, avoir une ſuite de Paraboles, dont la courbure, à l'Origine, ira toujours en diminuant, & cela ſans changer l'expoſant b. Mais ſi l'on paſſe à un plus grand expoſant, on aura une autre ſuite de Paraboles, dont la plus courbe, à l'Origine, ſera moins courbe que celle de la précédente ſuite, qui a la plus petite courbure. Car ſi AQ eſt une Parabole dont l'ordonnée PQ ſoit cx^{b+1}, on aura $Pm : PQ = bx^b : cx^{b+1} = b : cx = \frac{b}{c} : x$. Quelque petit que ſoit b & quelque grand que ſoit c, la fraction $\frac{b}{c}$ ſera finie, & on pourra prendre l'abſciſſe AP [x] plus petite que $\frac{b}{c}$. Alors PQ ſera plus petite que Pm. C'eſt-à-dire, que la Parabole AQ dont l'expoſant eſt $b+1$, embraſſe la Parabole Am dont l'expoſant eſt b, quelque petit que ſoit le Paramétre b de cette derniére, & quelque grand que ſoit le Paramétre c de la prémiére.

PLANCHE XXIV. Fig. 187.

Digitized by Google

PLANCHE XXIV. Ainſi, chaque expoſant donne une ſuite infinie de Paraboles, dont les courbures, à l'Origine, vont en diminuant à l'infini, à meſure qu'on en diminuë le Paramétre. Et, en paſſant d'un expoſant à l'autre, la courbure change infiniment. Bien plus, entre les expoſants conſécutifs par ex. 2, 3, on peut en interpoſer une infinité ... $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{4}$, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{1}{2}$, $2\frac{2}{3}$, $2\frac{3}{4}$, $2\frac{4}{5}$.... qui donneront de nouvelles ſuites de Paraboles, dont les courbures varient, dans chaque expoſant, ſelon la variation du Paramétre, & infiniment d'un expoſant à l'autre. Et entre ces expoſants interpoſés, par ex. $2\frac{1}{3}$ & $2\frac{1}{2}$, on en peut interpoſer de nouveau une infinité d'autres; de ſorte que toutes ces courbures, infiniment petites, ont des varietés infinies. CH. XII. § 114

Il en eſt de même des courbures infinies qu'on voit à l'Origine des Paraboles dont l'expoſant *b* tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$, ou ſimplement 2 & 1; car celles dont l'expoſant tombe entre 1 & $\frac{1}{2}$ ſont les mêmes que celles dont l'expoſant tombe entre 2 & 1 [§. 127]. Si on ſuppoſe *b* égal ſucceſſivement à 2 ou $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$, &c. on aura des ſuites de Paraboles de différents expoſants, dont celles de la prémiére ſuite ont toutes, à l'Origine, une courbure finie, mais qui augmente à l'infini à proportion de leurs Paramétres; ce qui fait que ces courbures varient ſelon toutes ſortes de raiſons données. Celles de la ſeconde ſuite ont, à l'Origine, des courbures infiniment plus grandes que celles de la prémiére ſuite; mais quoiqu'infinies, on peut, en variant le Paramétre, les faire varier ſelon toutes ſortes de raiſons données; enſorte néantmoins que la Parabole de la ſeconde ſuite qui eſt la moins courbe, l'eſt plus que la Parabole de la prémiére ſuite qui eſt la plus courbe. Il y a donc ici, comme dans les courbures infiniment petites, des ſuites de Paraboles dont les courbures, dans une même ſuite, varient par tous les dégrés imaginables, en variant le Paramétre; & dont la variation devient

CH. XII. §. 214. devient tout à coup infinie, ſi on paſſe d'un expoſant à l'autre, en conſervant le même Paramétre. Et entre ces ſuites, on peut en interpoſer une infinité d'autres, & encore d'autres entre celles-ci, & ainſi de ſuite à l'infini. PLANCHE XXIV.

215. ON SE fera donc une idée plus exacte & plus complette de la courbure des Courbes, en regardant chacun de leurs Points comme le ſommet d'une Parabole. Cette maniére de les conſidérer ſuit naturellement, de ce qu'en portant l'Origine ſur un Point quelconque de la Courbe, ce qui rend ſon abſciſſe x & ſon ordonnée y infiniment petite, la Série aſcendante $y = Ax^h + Bx^i + Cx^k + Dx^l + \&c.$ qui donne y en x, ſe réduit, par l'évanouiſſement de tous les termes qui ſuivent le prémier [§. 102], à $y = Ax^h$, qui eſt l'équation d'une Parabole, [§. 126]. Car l'expoſant h ne peut être que poſitif; puiſque s'il étoit zéro, ou négatif, l'ordonnée primitive y ou Ax^h ſeroit ou finie ou infinie, x étant infiniment petite. La Branche de Courbe repréſentée par la Série $y = Ax^h + Bx + \&c.$ ne paſſeroit donc pas par l'Origine: ce qui eſt contraire à la ſuppoſition.

L'expoſant h eſt poſitif, lorſque la déterminatrice, qui donne le terme Ax^h, coupe les deux Bandes extérieures du Triangle analytique [§. 96. 2°.]. Ainſi après avoir porté l'Origine [§. 29] ſur le Point de la Courbe dont on veut chercher la courbure & la nature, on placera l'équation rélative à cette Origine ſur le Triangle analytique, & on ménera toutes les déterminatrices inférieures qui coupent les deux Bandes extérieures du Triangle. Le nombre des équations, ſemblables à $y = Ax^h$, que donnent ces déterminatrices, eſt le nombre des Branches, réelles ou imaginaires, qui paſſent par l'Origine. Conſéquemment, il exprime le dégré de la multiplicité du Point ſitué à l'Origine.

PLANCHE XXIV.

216. L'éq : $y = Ax^h$ de chaque Branche déterminera sa direction, c'eſt-à-dire, celle de la Tangente à l'Origine. CH. XII §. 216.

Si $h > 1$, ce qui arrive quand la déterminatrice retranche une plus grande portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x, [§. 96. 2°]; la Branche touche à l'Origine l'Axe des abſciſſes. Car quand $h > 1$, x^h, & Ax^h, ſoit y, eſt infiniment plus petite que x, celle-ci étant infiniment petite [§. 79]. Donc la Courbe, à l'Origine, s'éloigne infiniment moins de l'Axe des abſciſſes que de celui des ordonnées : elle eſt comme collée ſur l'Axe des abſciſſes, qui eſt ſa Tangente.

Si $h < 1$, ce qui a lieu quand la déterminatrice retranche une plus petite portion de la Bande ſans y que de la Bande ſans x [§. 96. 2°]; la Branche touche, à l'Origine, l'Axe des ordonnées. Car $h < 1$ rend x infiniment plus petite que x^h, ou Ax^h, ſoit y [§. 79]. La Courbe, à l'Origine, s'éloigne donc infiniment moins de l'Axe des ordonnées que de celui des abſciſſes : elle s'applique, pour ainſi dire, ſur le prémier, & le touche.

Mais quand $h = 1$, c'eſt-à-dire, quand la déterminatrice couchée ſur le Rang inférieur retranche des portions égales des deux Bandes extérieures du Triangle ; le raport de x infiniment petite à y infiniment petite eſt un raport fini de 1 à A, la Courbe partage l'angle des coordonnées, ſa Tangente eſt oblique aux ordonnées & aux abſciſſes, & l'équation $y = Ax$ détermine ſa poſition [§. 183].

217. Si l'expoſant h eſt différent de l'unité, le prémier terme de la Série $Ax^h + Bx^l + \&c.$ fera connoitre quelle eſt la courbure de la Branche à l'Origine. Elle eſt finie, quand $h = 2$ ou $\frac{1}{2}$: Elle eſt infinie, quand h tombe entre 2 & $\frac{1}{2}$: Elle eſt infiniment petite, quand h eſt, ou plus grande que 2, ou plus petite que $\frac{1}{2}$ [§. 209. *Ex. II*].

Dans

Ch. XII. § 217. Dans ce même cas, le prémier terme Ax^h fait auſſi connoitre la poſition des deux parties de la Branche deçà & delà de l'Origine. Mais pour cela, il vaut encore mieux prendre l'équation que donne la déterminatrice, ſous la forme $y^l = \alpha x^k$ qu'elle préſente d'abord, que ſous la forme $y = Ax^h$, à laquelle elle ſe réduit, en faiſant $A = \alpha^{l:l}$, & $h = \frac{k}{l}$. On a vû [§. 128] que cette équation $y^l = \alpha x^k$ repréſente toutes les différentes Paraboles, dont les deux Branches ont diverſes ſituations, 1°. ſuivant la nature des expoſants k, l, qui ſont pairs ou impairs; 2°. ſuivant la nature du Paramétre α, qui peut être poſitif ou négatif. La Table que préſente la *Fig.* 188, rapelle ce qui a été dit dans ce §. 128. Elle préſente quatre diſpoſitions différentes, tirées de la parité ou imparité de k & l, leſquelles ſe ſubdiviſent chacune en quatre autres, ſelon que k eſt plus grand ou plus petit que l, & ſuivant que α eſt poſitif ou négatif. PLANCHE XXIV.

La prémiére diſpoſition, qui eſt celle des deux expoſants impairs, donne tous les Points d'Inflexion viſible, d'un dégré plus ou moins élevé, & en général d'un dégré égal à la différence de k & l diminuée d'une unité. Car l'éq: $y^l = \alpha x^k$ étant miſe ſur le Triangle analytique, il manquera autant de Rangs, entre le Rang où eſt y^l & celui où eſt αx^k, qu'il y a d'unités, moins une, dans la différence de k & l. Donc, cette différence diminuée d'une unité exprime le dégré de l'Inflexion du Point qui eſt à l'Origine [§. 186]. Mais, k & l étant tous deux impairs, leurs différence eſt paire, & diminuée de l'unité elle devient impaire. L'Inflexion eſt donc viſible [§. 166].

La ſeconde diſpoſition, qui eſt celle où le plus grand expoſant eſt pair & le plus petit impair, donne les Points ordinaires, & les Points de Serpentement ou d'Inflexion

PLANCHE XXIV. inviſible, de tous les dégrés. Car l'Inflexion s'il y en a une, ſera, comme dans la diſpoſition précédente, d'un dégré qui s'exprime par la différence de *k* & *l* diminuée de l'unité. Ainſi, *k* & *l* étant l'un pair & l'autre impair, leur différence, qui eſt impaire, diminuée d'une unité ſera un nombre pair. L'Inflexion eſt donc inviſible [§. 166]: c'eſt un Serpentement. CH. XII. §. 117.

La troiſiéme diſpoſition eſt celle où le plus grand expoſant eſt impair, & le plus petit pair. Elle donne des Points de Rebrouſſement [§. 206] de tous les dégrés, ſelon que le plus petit expoſant eſt 2, 4, 6, 8, 10, ou &c. Le Rebrouſſement du prémier dégré eſt un Point double, celui du ſecond dégré un Point quadruple, &c: le Rang le plus bas étant le ſecond, ou le quatriéme, &c. [§. 171]. Les Branches, qui viennent ſe terminer à ces Points de Rebrouſſement, y peuvent ſubir des Inflexions, mais inviſibles, parce que leur dégré, [qui eſt toujours la différence de *k* & *l* diminuée de l'unité] eſt un nombre pair, & que les Inflexions d'un dégré pair ſont inviſibles. [§. 166].

La quatriéme diſpoſition, qui eſt celle des deux expoſants pairs, donne une équation réductible, & qui peut être regardée comme la réduplication de l'une des trois précédentes. Quand *a* eſt poſitif, le Point que donne cette diſpoſition eſt comme le Point de contact de deux Paraboles adoſſées l'une contre l'autre. Mais quand *a* eſt négatif, les Paraboles ſont imaginaires, & le Point qui répond à cette ſuppoſition eſt un Point iſolé, inviſible, ſans courbure; lequel pourtant apartient à la Courbe, parce que ſes coordonnées ont entr'elles le raport qu'exprime l'équation de la Courbe.

218. Mais, lorſque $b = 1$, le prémier terme Ax^{α} de la Série ne détermine que la direction de la Branche à ſon

Ch. XII. §. 218. son passage par l'Origine, ou la position de sa Tangente. A proprement parler, l'équation $y = Ax$ est l'équation de la Droite qui touche la Courbe à l'Origine, & qui toucheroit aussi toute autre Courbe tracée par l'Origine, & ayant en ce point-là la même direction. Dans cette équation, x & y n'étant que des infiniment petits du prémier ordre, elle n'exprime que leur raport; mais elle ne manifeste pas les différences infiniment plus petites qu'il y a de Courbe à Courbe, & qui ne deviennent sensibles que quand on descend à des infiniment petits de quelque ordre inférieur, comme on le fait quand $h >$ ou < 1. PLANCHE XXIV.

Ainsi pour connoitre, en ce Cas-là, la courbure de la Courbe; pour choisir entre toutes les Paraboles, qui peuvent avoir la même Tangente, celle qui s'*identifie*, pour ainsi dire, avec la Courbe, & que les Géométres nomment sa *Parabole osculatrice*, il faut, ou continuer la Série $y = Ax +$ *&c.* & en chercher le second terme, ou prendre les abscisses sur la Tangente en conservant la position des ordonnées. Ces deux Méthodes reviennent presque au même.

On donne à l'Axe des abscisses une position quelconque, sans changer l'Origine ni l'Axe des ordonnées, en mettant dans l'équation de la Courbe pz pour x & $qz+u$ pour y [§. 25. III]. Soit AB l'Axe des abscisses x, AD celui des ordonnées y, AC la Tangente à l'Origine A. Cette Tangente est donnée par l'éq: $y = Ax$, que donne la déterminatrice qui traverse le Rang inférieur, ensorte que l'abscisse AB [1] de cette Droite AC porte l'ordonnée BC [A]. On veut raporter la Courbe AM aux coordonnées AQ [z], QM [u]. Les lettres $1 : p : q$ exprimant le raport des côtés QA, AP, PQ du triangle APQ, & QA étant z, AP est pz & PQ, qz. Mais x = AP = pz & PM [y] = PQ [qz] + QM [u]. Il faut donc substituer pz à x, & $qz+u$ à y. Les triangles Fig. 189.

PLANCHE XXIV. gles APQ, ABC étant ſemblables, la raiſon $p:q:1$ des côtés AP, PQ, QA du triangle APQ eſt la même que la raiſon des côtés AB[1] : BC[A] : CA[E] du triangle ABC. Ainſi $p = \frac{1}{E}$, & $q = \frac{q}{1} = \frac{A}{E}$. Après la ſubſtitution on écrira donc $\frac{1}{E}$ pour p & $\frac{A}{E}$ pour q ; ou, conſervant la lettre p pour déſigner la fraction $\frac{1}{E}$, on écrira Ap au lieu de $q\left[= \frac{A}{E} = A \times \frac{1}{E} = Ap\right]$. Ch. XII. §. 218.

La valeur de E [AC] dépend de l'angle ABC, ou APM, des coordonnées. Si G eſt le Sinus du complément de cet angle, 1 étant le Sinus total, E ſera $= \sqrt{(AA \pm 2AG + 1)}$, le ſigne + ayant lieu, quand l'angle APM eſt obtus, & le ſigne —, quand il eſt aigu [§. 143]. Si APM eſt un angle droit, $G = 0$ & $E = \sqrt{(AA + 1)}$.

Le §. 30 donne la maniére de faire commodément la ſubſtitution de pz à x & de $qz + u$ à y. Et l'on démontre par la Remarque faite au §. 107, qu'autant de fois que l'éq : $y - Ax = 0$, ou $y - \frac{p}{q}x = 0$, ſoit $qy - px = 0$, diviſe un Rang quelconque de la Propoſée, autant manque-t-il de termes au Rang homologue de la Transformée, du côté de la Bande ſans y. Donc, puiſque $y - Ax = 0$ eſt au moins une racine ſimple du Rang inférieur, il manquera au moins dans la Transformée le terme que ce Rang devroit avoir ſur la Bande ſans u. Il partira donc de ce Rang une déterminatrice oblique, qui donnera l'équation de la Parabole oſculatrice de la Courbe à l'Origine.

Mais ſi cette racine, $y - Ax = 0$ eſt double, triple, ou multiple, du Rang inférieur ; ſi elle diviſe auſſi, une

ou

Ch. XII. §. 218. ou plusieurs fois, quelques-uns des Rangs immédiatement supérieurs ; il manquera à la Transformée deux, trois, ou plusieurs termes du Rang inférieur, & un ou plusieurs termes des Rangs supérieurs. Par cet évanouissement, la déterminatrice inférieure prend une situation oblique, & donne l'équation de la Parabole osculatrice, d'un dégré plus ou moins élevé. PLANCHE XXIV.

On trouvera la même chose par la Méthode des Séries. Car l'ordonnée PM étant exprimée par une Série qui donne la valeur d'y en x, le prémier terme Ax exprime la partie PQ comprise entre l'Axe AP & la Tangente AC, dont il détermine par conséquent la position ; & les termes suivans représentent la partie QM interceptée entre la Tangente & la Courbe. Mais AP [x] étant infiniment petite, tous les termes qui suivent Ax se réduisent au second terme de la Série. Donc ce terme donne l'expression de QM : ce qui suffit pour déterminer la position & la courbure de la Branche AM.

Mais si l'on veut exprimer la nature de AM, par une équation parabolique ; il faudra prendre pour abscisse, non plus AP [x], mais AQ [$z = \frac{1}{p} x = Ex$]. On mettra donc, dans le second terme de la Série qui représente QM, au lieu de x sa valeur pz ou $\frac{1}{E} z$, & égalant ce terme ainsi transformé à une variable α, on aura l'équation parabolique qui exprime le raport des coordonnées AQ, QM, tout près d'un point quelconque A de la Courbe.

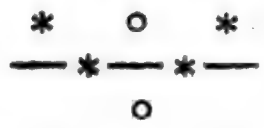
Exemple I. L'éq : $xx + yy - ax + by = 0$ représente la circonférence ADB, décrite, sur la chorde AB [b], du centre C éloigné de cette chorde de l'intervalle Fig. 190.

Digitized by Google

PLANCHE XXIV. CK [$\frac{1}{2}a$]. On demande la Parabole oſculatrice au point A, où l'on a pris l'Origine ? CH. XII. §. 218.

La Série aſcendante, par laquelle l'équation propoſée donne la valeur d'y en x, eſt $y = \frac{a}{b}x - \frac{aa+bb}{b^3}x^2 -$ &c, dont le prémier terme $\frac{a}{b}x$ exprime la partie de l'ordonnée PQ compriſe entre l'Axe AP & la Tangente AQ: le ſecond terme $\frac{aa+bb}{b^3}xx$ marque la partie QM compriſe entre la Tangente AQ & la circonférence AM, dans la ſuppoſition d'x infiniment petite. Ce terme eſt négatif, parce que de part & d'autre de A, la Courbe mAM tombe au-deſſous de la Tangente tAT. Mais, ſans avoir égard au ſigne, ſi on égale à u ce terme transformé par la ſubſtitution de $\frac{z}{E}$ à x, ou $\frac{zz}{EE} = \frac{bb}{aa+bb}zz$ à xx [car $E = \sqrt{(AA+1)}$, parce que l'angle des coordonnées eſt droit, & $\sqrt{(AA+1)} = \sqrt{(\frac{aa+bb}{bb})}$, parce que $A = \frac{a}{b}$, le prémier terme Ax de la Série étant $\frac{a}{b}x$], on aura $u = \frac{aa+bb}{b^3} \times \frac{bb}{aa+bb}zz = \frac{zz}{b}$ pour l'équation de la Parabole oſculatrice du Cercle au point A. Où il eſt à remarquer que le paramétre b de cette Parabole, eſt la chorde ou ordonnée primitive AB.

On aura préciſément la même choſe par le Triangle analytique. Qu'on y place l'équation propoſée $xx + yy - ax + by = 0$, elle n'aura qu'une déterminatrice inférieure, qui traverſe le prémier Rang, & donne l'équation $-ax + by = 0$, ou $y = \frac{a}{b}x$. Donc $A = \frac{a}{b}$. Et ſi l'on ſubſtituë



ſtituë pz à x & $qz+u$ à y, on aura l'équation $(pp+qq)zz+2quz+uu+(bq-ap)z+bu=0$, ou,

$$\begin{array}{l} (pp+qq)zz+(-ap+bq)z \\ \quad 0 \quad 2 \qquad\qquad\quad 0 \quad 1 \\ \hline +2q\ uz+ \qquad\quad bu \\ \quad \frac{1}{2} \qquad\qquad\quad 0 \\ \hline +uu \end{array}$$

mettant Ap $[=\frac{ap}{b}]$ pour q, $(1+\frac{aa}{bb})ppzz+2\frac{a}{b}puz+uu+(ap-ap)z+bu=0$, ſoit $\frac{aa+bb}{bb}ppzz+\frac{2a}{b}puz+uu+bu=0$. Cette Transformée, étant miſe ſur le Triangle anal. la caſe z reſte vuide & la déterminatrice in-

férieure paſſant par les Caſes u & zz donne $bu+\frac{aa+bb}{bb}ppzz=0$, ſoit $u=-\frac{aa+bb}{b^3}ppzz=\frac{zz}{-b^3:(aa+bb)pp}$, qui eſt à la Parabole ordinaire [§. 123], mais dont le paramétre $-\frac{b^3}{(aa+bb)pp}$ eſt négatif, parce que ſes branches AM, Am, tombent du côté négatif de l'Axe tAT des abſciſſes. Ce paramétre, au reſte, ſe réduit à $-b$, en mettant pour pp ſa valeur $\frac{1}{EE}=\frac{bb}{aa+bb}$.

Digitized by Google

PLANCHE XXIV. Donc un Cercle ABD étant donné, & l'Origine A étant prise à volonté sur un Point de sa circonférence, on aura la Parabole osculatrice en ce Point-là, si on mène la Tangente AT, & une chorde quelconque AB. Car la Parabole décrite du sommet A, avec le paramétre AB, sur les Axes AT des abscisses & AB des ordonnées, est la Parabole demandée. CH. XII. §. 218.

Réciproquement, le paramétre d'une Parabole ordinaire mAM étant donné, on trouvera le Cercle osculateur, ou le Cercle de même courbure que la Parabole à l'Origine A, en prenant, sur l'Axe des ordonnées, AB égale au paramétre, & élevant BD perpendiculaire à AB, qui rencontre en D la droite AD perpendiculaire en A à l'Axe des abscisses tAT. Car AD est le diamétre du Cercle de même courbure.

En effet, le Cercle ABD de même courbure que la Parabole mAM au Point A, s'identifie, en quelque sorte, avec elle en ce Point : desorte que l'arc infiniment petit AM est commun au Cercle & à la Parabole. Qu'on mène par M l'ordonnée QMN, qui coupe la circonférence en M & en N. Et par la nature du Cercle, le quarré de la Tangente AQ est égal au rectangle sous QM & QN. Mais, par la nature de la Parabole [§. 223], le quarré de l'abscisse AQ est égal au rectangle sous l'ordonnée QM & sous le paramétre. Donc le paramétre est égal à QN, ou AB; puisque AM, étant un arc infiniment petit, QN & AB, qui sont infiniment proches l'une de l'autre, sont égales.

Ainsi, lors qu'on aura trouvé la Parabole osculatrice d'une Courbe en un Point quelconque, on aura le Cercle de même courbure, sans recourir aux Séries, par lesquelles nous l'avons trouvé au §. 208.

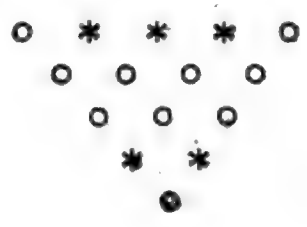
Mais ceci suppose que la Parabole osculatrice est une Parabole ordinaire, dont la courbure, à l'Origine, est finie.

Digitized by Google

Ch. XII. §. 118. nie. Car ſi la courbure d'un Point de la Courbe, ou de ſa Parabole oſculatrice, eſt infinie ou infiniment petite, on ne ſauroit trouver un Cercle de même courbure [§. 214]. PLANCHE XXIV.

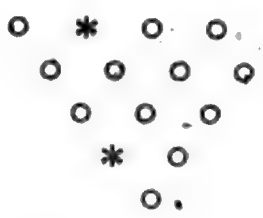
Exemple II. Soit propoſée l'éq : $xy^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^3y - a^3y\sqrt{2} + a^3x = 0$, qui repréſente une Courbe, qui a quatre Branches hyperboliques, dont les Axes ſont les Aſymptotes [§. 138]. La Série aſcendante, qui donne y en x, eſt $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x^4}{4a^3}$ &c. Le prémier terme $\frac{x}{\sqrt{2}}$, qui détermine la poſition de la Tangente, donne $A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, & par conſéquent $E = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{2}}G + 1)} = \sqrt{\frac{3 + 2G\sqrt{2}}{2}}$. Le ſecond terme $\frac{x^4}{4a^3}$, égalé à u, après avoir mis $\frac{z}{E}$ pour x, donne, pour la Parabole oſculatrice à l'Origine, l'éq : $(9 + 12G\sqrt{2} + 8GG)a^3u = z^4$, qui eſt du quatriéme dégré, & déſigne que le Point de l'Origine eſt un Point de Serpentement [§. 168, III, ou §. 217] d'une courbure infiniment petite [§. 209. *Ex. II*]. Fig. 151.

Selon l'autre Méthode, l'opération ſe fait ainſi. L'éq : $xy^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x^2y^2 + \frac{1}{2}x^3y - a^3y\sqrt{2} + a^3x = 0$, miſe ſur le Tr : anal : a pour unique déterminatrice inférieure celle



qui

PLANCHE XXIV. qui traverſe le prémier Rang, & donne l'équation $-a^3y\sqrt{2} + a^3x = 0$, ou $y = \frac{x}{\sqrt{2}}$. En ſubſtituant pz à x, & $qz + u$ à y, l'équation propoſée ſe transforme en $(pq^3 - \frac{3}{\sqrt{2}}p^2q^2 + \frac{1}{2}p^3q)z^4 + (3pq^2 - 3p^2q\sqrt{2} + \frac{1}{2}p^3)uz^3 + (3pq - \frac{3}{\sqrt{2}}p^2)u^2z^2 + pu^3z + (-a^3q\sqrt{2} + a^3p)z - a^3u\sqrt{2} = 0$, ou, mettant $Ap\,[= \frac{p}{\sqrt{2}}]$ pour q, $\frac{p^4}{2\sqrt{2}}z^4 + pu^3z - a^3u\sqrt{2} = 0$. Cette Transformée étant miſe ſur le Triang: anal: on verra que la déterminatrice inférieure CH. XII. §. 218.



paſſe par les Caſes u & z^4; & donne l'éq: $\frac{1}{2\sqrt{2}}p^4z^4 - a^3u\sqrt{2} = 0$, ou $u = \frac{p^4z^4}{4a^3} = [$en mettant pour p ſa valeur $\frac{1}{E} = \sqrt{\frac{2}{3+2G\sqrt{2}}}\,] = (9 + 12G\sqrt{2} + 8GG)a^3u = z^4$, comme par la Méthode des Séries.

219. MAIS lorſque le Point ſitué à l'Origine eſt un Point multiple, il peut fort bien arriver que pour connoître ſa nature il ne ſuffira pas de chercher le prémier & le ſecond terme de la Série, qui repréſente une Branche paſſant par l'Origine. Les termes ſuivants y peuvent aporter de grandes modifications. Car le Point de l'Origine étant

183.

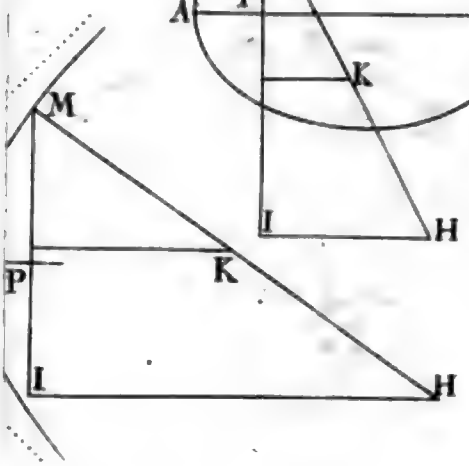


Fig. 186.

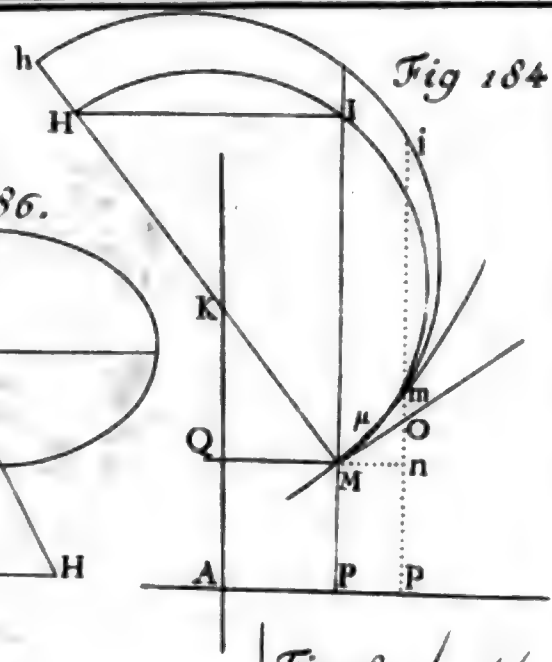


Fig 184

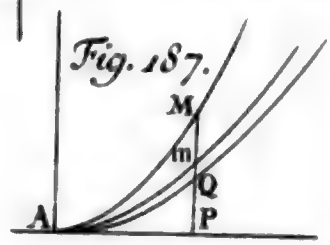
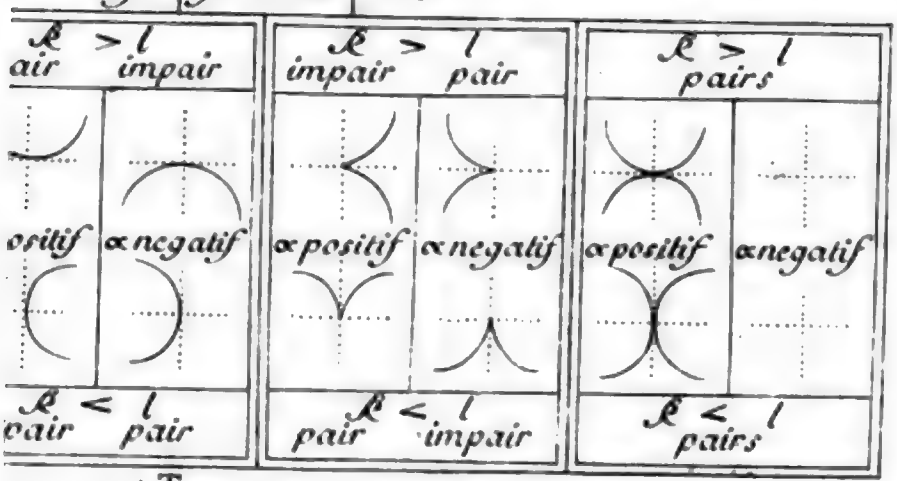


Fig. 187.

Fig. $y' = \alpha x^{\ell}$ 188.



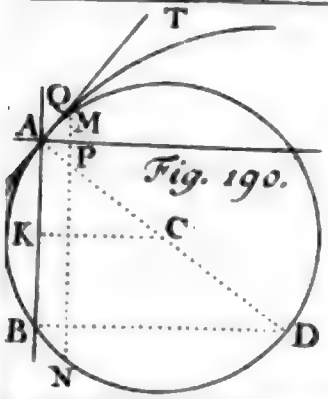


Fig. 190.

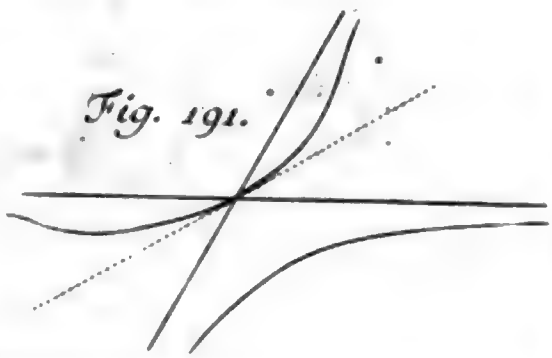


Fig. 191.

Digitized by Google

Ch. XII. §. 219. étant ſuppoſé multiple, l'équation qui donne le prémier terme de la Série, a pluſieurs racines [§. 183]: elle peut donc avoir des racines égales, qui produiſent des termes irréguliers [§. 109], leſquels peuvent faire que la Série, qui d'abord ſembloit unique, ſe fourche & devienne multiple; ou bien qu'elle devienne imaginaire, ſoit entiérement, ſoit à demi [§. 104]. De ſorte qu'une Branche, qui ſembloit, à ne conſulter que le prémier ou les deux prémiers termes de la Série, étendre un Rameau de part & d'autre de l'Origine, peut, à cauſe des termes ſuivants, en jetter deux ou pluſieurs de part & d'autres, ou n'en jetter que d'un côté, ou devenir imaginaire. Il eſt donc néceſſaire, pour avoir une idée complette d'un Point multiple d'une Courbe, d'avoir non-ſeulement le prémier ou ſecond terme de toutes les Séries aſcendantes que peut donner ſon équation, mais encore de continuer ces Séries juſqu'aux termes réguliers, auxquels quand on eſt parvenu, on n'a plus à craindre qu'une Branche, qui paroiſſoit ſimple, ſoit réellement multiple, ou diſparoiſſe entiérement, ou d'un des côtés de l'Axe des ordonnées. Les Exemples qu'on va donner dans le Chapitre ſuivant, éclairciront aſſez ce qu'on vient de dire. Planche XXIV.

CHAPI-

Digitized by Google

CHAPITRE XIII.

Des différentes eſpéces de Points multiples dont peuvent être ſuſceptibles les Courbes des ſix prémiers Ordres.

§. 220. *Des Points doubles.*

PLANCHE XXV.

QUAND l'Origine eſt un Point double, le plus bas Rang de l'équation miſe ſur le Triangle analytique eſt le ſecond Rang, $dyy + exy + fxx$. Ce Rang égalé à zéro donne une équation du ſecond dégré, qui a deux racines.

I. Si elles ſont imaginaires, les deux Séries qu'auroit pû donner la déterminatrice qui paſſe par le ſecond Rang ſont imaginaires. L'Origine eſt donc un *Point conjugué*, ou *iſolé*, Point inviſible, détaché du contour de la Courbe, & qui pourtant lui apartient, parce que ſes coordonnées ont entr'elles la rélation exprimée par l'équation de la Courbe. Tel eſt le Pole de la Conchoïde, lorſqu'il n'y paſſe aucune Branche de cette Courbe. Voyez §. 174. *Ex. IV*, & ci-deſſous *Ex. I. n°. 2.*

II. Si les racines de l'éq : $dyy + exy + fxx = 0$ ſont réelles & inégales, qu'elles ſoient $y = Ax$ & $y = A'x$. Elles repréſentent deux Droites qui touchent la Courbe à l'Origine [§. 183], & les deux Séries $y = Ax + \&c$, $y = A'x + \&c$. expriment deux Branches qui paſſent par l'Origine, & qui s'y croiſent ſous un angle fini, meſuré par celui que font leurs Tangentes. L'interſection de ces Branches fait le Point double, qu'on nomme par cette raiſon, *Point de Section*

CH. XIII. §. 220. *Section*, ou *d'Interſection*, *Point de Croix*, & auſſi *Nœud* [§. 10]. PLANCHE XXV.

Ce Point varie par les Inflexions & Serpentements de ſes Branches. C'eſt un *Nœud ſimple*, quand ſes Branches n'ont aucune Inflexion au point où elles ſe coupent. Telles ſont les Branches de la Conchoïde, quand elles paſſent par le Pole [§. 174. *Ex. IV.* Voyez auſſi ci-deſſous, *Ex. I. n°. 3*]. Dès le troiſiéme Ordre les Courbes ſont ſuſceptibles de ce Nœud, où la Tangente n'eſt cenſée rencontrer la Courbe que trois fois [§. 181].

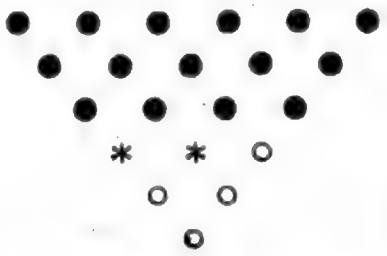
Si l'une des deux Branches, qui ſe coupent, ſubit une Inflexion au Point de Croix [comme §. 186. *Ex. VI*], on le nomme *Nœud avec une Inflexion.* Et ſi cela arrive aux deux Branches, [§. 186. *Ex. V*] c'eſt un *Nœud avec deux Inflexions.* Ce n'eſt qu'au quatriéme Ordre que les Courbes commencent à être ſuſceptibles de ces Points-là, où la Tangente eſt cenſée rencontrer quatre fois la Courbe [§. 181].

Si l'une des Branches *ſerpente* au Point de ſection, on l'apelle *Nœud avec un Serpentement*, & ſi les deux Branches y ſerpentent, *Nœud avec deux Serpentements*, ou enfin *Nœud avec Inflexion & Serpentement*, ſi une des Branches ſerpente & que l'autre ſoit infléchie au Point où elles ſe croiſent. On voit de-là les noms qu'on peut donner aux Nœuds, dont les Branches ſubiſſent au Point de ſection des Inflexions ou des Serpentements de dégrés ſupérieurs. Et quant à l'Ordre des Courbes ſuſceptibles de ces Points-là, on voit qu'il ſera, au moins, $\nu + 3$, ſi l'Inflexion [ſous laquelle on comprend auſſi le Serpentement] de la Branche, qui la ſubit au plus haut dégré, eſt du dégré t [§. 181].

Tout cela ſe diſcerne aiſément, en examinant combien de Rangs, en remontant depuis le plus bas, ſont diviſés

PLANCHE XXV. sans interruption par l'une ou l'autre des racines $y - Ax = 0$, $y - A'x = 0$ [§. 186]. CH. XIII. §. 210.

Ou bien, en cherchant le second terme des Séries $y = Ax + \&c.$ $y = A'x + \&c.$ On le trouve, en substituant à y d'abord $Ax + u$, & ensuite $A'x + u$, dans l'équation de la Courbe. Dans les transformées, le terme xx manque, parce que $y = Ax$, $y = A'x$ sont des racines de l'éq : $dyy + exy + fxx = 0$, mais le terme ux ne manque pas, parce que ce sont des racines simples [§. 107]. La déterminatrice, qui donne le terme u, partant de la Case ux, passera donc par la Case x^3, ou, si elle est vuide, par x^4, ou, si celle-ci est encore vuide, par x^5 &c. Elle donnera donc une équation telle que $u =$



Bx^2, ou $u = Bx^3$, ou $u = Bx^4$, &c. Si l'exposant de x, dans ce second terme, est 2 ; la Branche que représente cette Série ne subit aucune Inflexion. Si cet exposant est 3, ou un nombre impair ; elle subit une Inflexion visible. Si c'est 4, ou un nombre pair plus grand que 2 ; la Branche serpente. Et le signe + ou — du coëfficient B, fait connoitre de quel côté de leurs Tangentes tombent les Branches qui font le Nœud, de quel côté elles tournent leur concavité. Voyez ci-dessous *Ex. I. n°.* 3.

Ceci suppose que, dans l'équation proposée, le terme dyy ne manque pas. S'il manque, la Case xy ne sera pas vuide, puisqu'alors le second Rang, réduit à fxx, donneroit l'éq : $fxx = 0$, dont les deux racines $x = 0$, $x = 0$, feroient

CH. XIII. §. 210. PLANCHE XXV.

ſeroient égales, & nous les ſuppoſons inégales. Ainſi, de la Caſe xy il partiroit une déterminatrice, qui paſſant par la Caſe y^3, ou y^4, ou y^5, &c. donneroit $x = \alpha y^2$, ou $x = \alpha y^3$, ou $x = \alpha y^4$, &c. qui marque que l'Axe des ordonnées touche une Branche, ſans Inflexion, ſi l'expoſant d'y eſt 2; avec une Inflexion inviſible, ſi c'eſt un autre nombre pair; ou avec une Inflexion viſible, ſi c'eſt un nombre impair [§. 186].

111. Si l'éq: $dyy + exy + fxx = 0$ a deux racines égales, c'eſt-à-dire, une ſeule racine double $y\sqrt{d} + x\sqrt{f} = 0$, le Point double eſt formé par deux Branches qui ſe touchent, & qui ont, au Point de contact, une Tangente commune, dont l'équation eſt cette racine double. Voilà pourquoi l'équation qui la détermine eſt du ſecond dégré, parce qu'il y a deux Branches, & en quelque ſorte deux Tangentes; mais cette équation n'a qu'une racine [double], parce que ces deux Tangentes coïncident & n'en font qu'une.

Les deux Branches, dont le contact fait le Point double, peuvent ſe terminer à ce Point, ou paſſer au-delà. Elle s'y terminent, quand les Séries qui les repréſentent ſont demi-imaginaires; & alors ce Point eſt un *Rebrouſſement*: elles vont au-delà, quand ces Séries ſont réelles; & alors ce Point-eſt une *Oſculation*.

Il y a pluſieurs ſortes d'Oſculations. Quand les Branches qui ſe touchent tournent l'une contre l'autre leur convexité, comme deux Cercles qui ſe touchent en déhors; on dit que ces Branches *ſe baiſent*, & leur contact ſe nomme proprement *Oſculation*. Quand ces deux Branches tournent leurs convexités d'un même côté, comme deux Cercles qui ſe touchent par dedans; on dit qu'elles *s'embraſſent*, & leur contact ſe nomme *Embraſſement*. Si une des Branches ſubit une Inflexion viſible & l'autre non, elles ſe baiſent d'un côté & s'embraſſent de l'autre; ce qui

Fig. 192. Fig. 193.

PLANCHE XXV. Fig. 194. fait une *Oſculation avec Inflexion*, ou pour abréger, *Oſculinflexion*. Si les deux Branches ont une Inflexion viſible, qu'elles s'embraſſent des deux côtés, c'eſt un *Embraſſement avec Inflexion*, ou une *Embraſſinflexion*. Fig. 195. CH. XIII. §. 110.

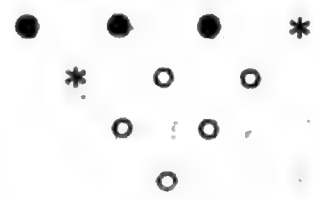
Ajoûtez les *Oſculations imaginaires*, qui ſont des Points iſolés; mais différens de ceux que nous avons indiqué au N°. I. de ce §. en ce que ceux-là manifeſtent leur nature dès le prémier terme de la Série, lequel eſt imaginaire; au lieu que ceux-ci ne ſe découvrent que par les termes ſuivants. Enſorte que, quand on cherche leurs Tangentes, comme elles ſont données par le prémier terme de la Série, on les trouves réelles, quoique les Branches de la Courbe ſoient imaginaires.

Il y a auſſi deux ſortes de Rebrouſſement. L'un, qui eſt le *Rebrouſſement* proprement dit, eſt une demi-Oſculation formée par deux Branches qui tournant leurs convexités l'une contre l'autre, ſe terminent au Point de contact. L'autre, qui eſt un demi-Embraſſement, eſt formé par deux Branches qui tournent leurs concavités d'un même côté & ſe terminent où elles ſe rencontrent. On peut le nommer *Rebrouſſement en bec*, ou ſimplement *Bec*. Fig. 196. Fig. 197.

On diſcernera toutes ces ſortes de Points doubles, en continuant la Série $y = -x\sqrt{\frac{f}{d}}$ &c. On ſubſtituera donc $-x\sqrt{\frac{f}{d}} + u$, [ou faiſant $-\sqrt{\frac{f}{d}} = A$] $Ax+u$ à y dans la propoſée, & on aura une transformée, où la Caſe de la Pointe & celles du prémier Rang manqueront comme dans la propoſée. Mais de plus les Caſes xx & ux ſeront vuides, $y - Ax = o$ étant une racine double du ſecond Rang [§. 107]. La déterminatrice inférieure partira donc de la Caſe uu.

1. Si la Caſe x^3 eſt pleine, ce qui arrive quand $y - Ax$ ne

CH. XIII. §. 220. ne diviſe pas le troiſiéme Rang de la propoſée [§. 107]; la déterminatrice paſſe par les Caſes uu & x^3, & donnera PLANCHE XXV.



une équation qui a deux racines demi-imaginaires, $u = +x\sqrt{Bx}$, $u = -x\sqrt{Bx}$. Les Séries $y = Ax + x\sqrt{Bx}$ &c, $y = Ax - x\sqrt{Bx}$ &c. marquent que la Tangente [repréſentée par l'équat : $y = Ax$] eſt touchée par deux Branches qui tombent de part & d'autre [ce qui eſt indiqué par les termes $+x\sqrt{Bx}$, $-x\sqrt{Bx}$] & ſe jettent d'un côté ſeulement de l'Axe des ordonnées [ſç. du côté poſitif, ſi B eſt poſitif, & du côté négatif, ſi B eſt négatif]. Le Point eſt donc un *Rebrouſſement* tel que celui qui eſt à l'Origine de la Parabole exprimée par l'éq : $yy = ax^3$ [§. 217]. Voyez ci-deſſous, *Ex. I. n°. 4.*

Ce Rebrouſſement eſt le ſeul Point double à ſimple Tangente, qui puiſſe convenir aux Courbes du troiſiéme Ordre. Car ſi, dans leur équation, la Caſe x^3 étoit vuide, la transformée ſeroit diviſible par u, & la propoſée par $y - Ax$ [$= u$]. Elle ne repréſenteroit donc plus une ſimple Courbe [§. 21].

2. Si la racine $y - Ax = 0$ diviſe le troiſiéme Rang, & non le quatriéme, de la propoſée ; il manquera dans la transformée la Caſe x^3, & non pas x^4. La déterminatrice

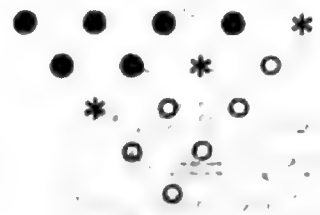


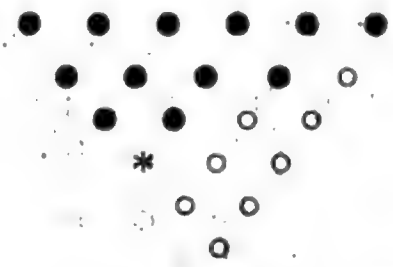
PLANCHE XXV. inférieure paſſe alors par les Caſes uu, ux^2 & x^4. Ainſi elle donne une équation du ſecond dégré, qui a deux racines $u = Bx^2$, $u = B'x^2$. On a donc deux Séries, $y = Ax + Bx^2$ &c. $y = Ax + B'x^2$ &c. CH. XIII. §. 220.

Il ſe peut faire que B & B' ſoient imaginaires. Alors les deux Séries, & les Branches qu'elles repréſentent, & l'*Oſculation* de ces Branches, tout eſt *imaginaire*. Voyez *Ex. II. n°. 6.*

Si B & B' ſont des grandeurs réelles de différents ſignes, les Branches de la Courbe tombent de part & d'autre de la Tangente commune, elles ſont adoſſées l'une contre l'autre : elles font une véritable *Oſculation*. Voyez *Ex. II. n°. 1 & 2.*

Si B & B' ſont des grandeurs réelles inégales de même ſigne, les deux Branches tombent d'un même côté de la Tangente & font un *Embraſſement*. Voyez *Ex. II. n°. 4.*

Mais, quand B & B' ſont égales, on ne peut encore rien décider ſur la nature du Point double, parce que la Série $Ax + Bx^2$ &c. n'eſt pas réguliére. Il faut donc ſubſtituer $Bx^2 + t$ à u dans la prémiére transformée, & on en aura une ſeconde, où il manquera le terme conſtant & les termes x, x^2, x^3, x^4, t, tx, tx^2. La déterminatrice partant de la Caſe tt, traverſera donc la



Caſe x^5, ſi elle n'eſt vuide, & donnera une équation qui aura deux racines, $t = +\sqrt{Cx^5}$, $t = -\sqrt{Cx^5}$, ou $t = \pm xx\sqrt{Cx}$. Dans la double Série $y = Ax + Bx^2 \pm xx\sqrt{Cx}$

Ch. XIII. §. 220. $\pm xx\sqrt{Cx}$ &c., le troiſiéme terme demi-imaginaire fait voir que les ordonnées ne ſont réelles que d'un coté de leur Axe. L'Embraſſement, déſigné par les deux prémiers termes, n'eſt donc qu'un demi-embraſſement, un *Bec*. Voyez *Ex. III*, & *IV*, 1. PLANCHE XXV.

Mais ſi la Caſe x^1 de la ſeconde transformée eſt vuide; la déterminatrice traverſant les Caſes tt, tx^3, x^6 donnera une équation dont les deux racines, $t = Cx^3$, $t = C'x^3$, fourniſſent deux Séries $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c., $y = Ax + Bx^2 + C'x^3$ &c.

Si C & C' ſont imaginaires; les Branches ſont imaginaires, & l'Embraſſement, auſſi imaginaire, ſe réduit à un Point conjugué.

Si C & C' ſont réelles & de différents ſignes; le Point double eſt un Embraſſement. Voyez *Ex. II*, *n°.* 5, & *Ex. IV*, *n°.* 2.

Si C & C' ſont réelles, de même ſigne, & inégales; le Point double eſt encore un Embraſſement, plus intime.

Mais, ſi $C = C'$, la Série $y = Ax + Bx^2 + Cx^3$ &c. n'eſt pas encore réguliére. On ſubſtituera donc $Cx^3 + s$ à t dans la ſeconde transformée, pour en avoir une troiſiéme, dont la déterminatrice inférieure, partant de la Caſe ss, paſſera par la Caſe x^7, ſi elle n'eſt vuide, & donnera $s = \pm\sqrt{D}x^7 = \pm x^3\sqrt{D}x$. Il y aura donc deux Séries $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + x^3\sqrt{D}x$ &c. $y = Ax + Bx^2 + Cx^3 - x^3\sqrt{D}x$ &c. qui, à cauſe du terme $\pm x^3\sqrt{D}x$ demi-imaginaire, déſignent un Rebrouſſement en Bec.

Ou, ſi la Caſe x^7 eſt vuide, la déterminatrice inférieure paſſera par ss, sx^4, x^8, & donnera une équation à deux racines $s = Dx^4$, $s = D'x^4$, ſur leſquelles on fera les mêmes conſidérations que ci-deſſus.

Cela peut aller à l'infini, mais la Méthode ne varie point. Et il n'en réſulte jamais que des Embraſſemens, ſoit réels, ſoit imaginaires, ou des Rebrouſſements en Bec.

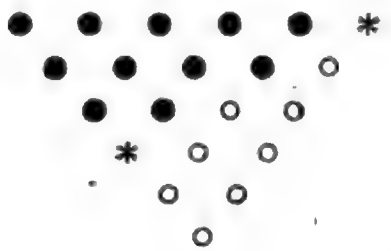
Il

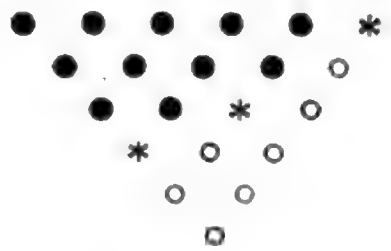
PLANCHE XXV. Il eſt le plus ſouvent aiſé de connoitre, ſans calcul, ſi le Point double eſt un Embraſſement ou un Bec. C'eſt lorſque la racine double $u = Bx$, de l'équation que donne la déterminatrice de la prémiére transformée, ne diviſe pas la ſomme des termes du ſecond ordre, qui ſe trouvent ſur une Droite parallèle à cette déterminatrice. Alors [§. 113], ſi l'expoſant 2 de la multiplicité de la racine $u = Bx^2$ diviſe la différence des expoſants du prémier & du ſecond ordre, c'eſt-à-dire, ſi cette différence eſt un nombre pair, [ce qu'on connoit, ſans calcul, lorſque le nombre des intervalles, qu'il y a entre la déterminatrice & ſa parallèle qui paſſe par les termes du ſecond ordre, eſt un nombre pair]: alors, dis-je, les deux Séries n'ont point de termes demi-imaginaires: elles ſont toutes réelles ou toutes imaginaires: elles déſignent un Embraſſement, réel ou imaginaire. Mais, au contraire, elles déſignent un Bec, elles ont un terme demi-imaginaire, lorſque le nombre des intervalles entre la déterminatrice & ſa prémiére parallèle eſt un nombre impair, lorſque la différence entre les expoſants du prémier & du ſecond ordre eſt impaire; c'eſt-à-dire, lorſque cette différence n'eſt pas diviſible par l'expoſant 2 de la multiplicité de la racine $u = Bx^2$ de l'équation que fournit la déterminatrice. [§. 113]. Voyez *Ex. III*, & *IV*, 1. CH. XIII. §. 210.

Tous ces Points peuvent ſe trouver ſur des Courbes du quatriéme Ordre: ceux qui ſuivent n'apartiennent qu'à des Courbes des Ordres ſupérieurs.

3. Si la racine double $y - Ax = 0$ du ſecond Rang diviſe le troiſiéme & le quatriéme, mais non le cinquiéme; il manquera à la Transformée les Caſes x^3 & x^4, mais non x^5, & il faut diſtinguer deux Cas. Ou la Caſe ux^2 eſt pleine, ce qui a lieu quand $y - Ax$ ne diviſe le troiſiéme Rang qu'une fois; ou elle eſt vuide, ce qui

CH. XIII. §. 220. qui a lieu quand $y - Ax$ diviſe plus d'une fois le troiſiéme Rang [§. 107]. PLANCHE XXV.





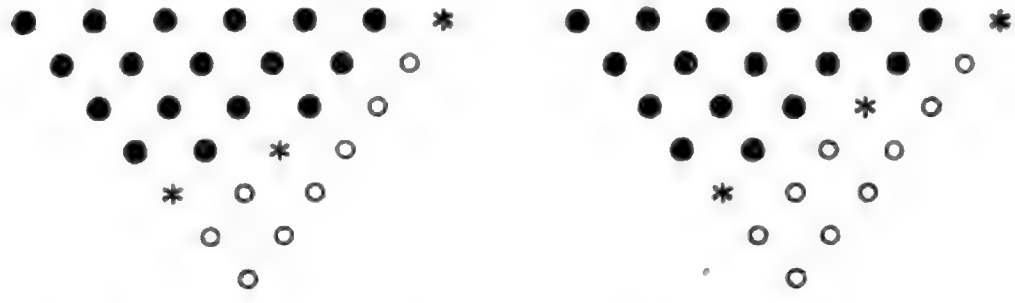
Quand la Caſe ux^2 eſt vuide, la déterminatrice, paſſant par u^2 & x^3, donne $u = \pm\sqrt{Bx^3} = \pm x^2\sqrt{Bx}$. La double Série $y = Ax \pm x^2\sqrt{Bx}$ *&c.* marque un *Rebrouſſement à double Inflexion.* Cette Inflexion, quoiqu'inviſible, diſtingue, dans le Calcul, ce Rebrouſſement du ſimple Rebrouſſement, *n°.* 1. Voyez *Ex. VI.*

Quand la Caſe ux^2 eſt pleine, il y a deux déterminatrices inférieures. L'une, qui paſſe par u^2 & ux^2, donne $u = Bx^2$. L'autre, qui paſſe par ux^2 & x^3, donne $u = B'x^3$. On a donc deux Séries, $y = Ax + Bx^2$ *&c.*, $y = Ax + B'x^3$ *&c.* La prémiére marque une Branche qui tombe toute d'un même côté de la Tangente. La ſeconde marque une Branche qui croiſe ſa Tangente au Point de contact, comme la Parabole exprimée par l'éq : $y = ax^3$ [§. 217]. Le concours de ces deux Branches, qui ont une Tangente commune au Point où elles ſe croiſent, forme une *Oſculinflexion.* Voyez *Ex. V.*

Ces deux Points peuvent convenir aux Courbes du cinquiéme Ordre : ceux, dont on va parler, ne conviennent qu'aux Courbes des Ordres ſupérieurs.

4. Si la racine double $y - Ax = 0$ du ſecond Rang, diviſe le troiſiéme, le quatriéme, & le cinquiéme, mais non pas le ſixiéme; il faut auſſi diſtinguer deux Cas, ſelon

PLANCHE XXV. que cette racine diviſe le troiſiéme Rang une ou pluſieurs fois. CH. XIII. §. 210.



Si elle ne le diviſe qu'une fois, il manque à la Transformée la Caſe de la Pointe, & les Caſes x, x^2, x^3, x^4, x^5, u, & ux. Il y a donc deux déterminatrices, qui paſſent, l'une par uu & ux^2, l'autre par ux^2 & x^6. La prémiére donne $u = Bx^2$, la ſeconde $u = B'x^4$. On a donc deux Séries, $y = Ax + Bx^2$ &c, $y = Ax + B'x^4$ &c. Les expoſants pairs de x dans le ſecond terme marquent que chaque Branche tombe toute d'un même côté de la Tangente commune [§. 217]. Ainſi le Point double eſt une *Oſculation*, ou un *Embraſſement*, ſçavoir un Embraſſement quand B & B' ont un même ſigne, une Oſculation quand ils ont différents ſignes.

Mais ſi $y - Ax$ diviſe plus d'une fois le troiſiéme Rang de la propoſée ; il manquera encore à la transformée la Caſe ux^2, & il n'y a qu'une déterminatrice, qui paſſant par les Caſes uu, ux^3, & x^6, donne une équation du ſecond dégré, dont les racines ſoient $u = Bx^3$, $u = B'x^3$. En faiſant ſur ces racines les mêmes conſidérations qu'on a faites au n°. 2, on verra,

Que ſi B & B' ſont imaginaires, le Point double eſt un Point iſolé.

Que s'ils ſont réels & de différents ſignes, les Séries $y = Ax + Bx^3$ &c. $y = Ax + B'x^3$ &c. marquent une *Oſcula-*

CH. XIII §. 220. *Oſculation* ſemblable à celle de deux Paraboles cubiques, qui à la vuë ne différe preſque pas des Oſculations indiquées ci-deſſus, à moins que B & B' étant fort inégaux, les deux Paraboles ne différent beaucoup en courbure. Voyez *Ex. VII.* 2. PLANCHE XXV. *Fig.* 198.

Que ſi B & B' ſont réels, de même ſigne, mais inégaux, les Séries $y = Ax + Bx^{\frac{1}{2}}$ *&c.* $y = Ax + B'x^{\frac{1}{2}}$ *&c.* déſignent un *Embraſſement avec Inflexion*. Voyez *Ex. VII.* 1. *Fig.* 195.

Et ſi $B = B'$, la Série $y = Ax + Bx^{\frac{1}{2}}$ *&c.* n'eſt pas encore réguliére, il faut la continuer. Mais, par un raiſonnement tout ſemblable à celui qu'on a fait au *n°.* 2 de ce §. on s'aſſurera que le Point double ne peut être qu'un Bec, ou une Embraſſinflexion, ou un Embraſſement imaginaire.

Ainſi l'on peut affirmer,

Que les Courbes du ſecond Ordre ne peuvent avoir de Points doubles [§. 174. *Ex. VI*].

Que celles du troiſiéme Ordre ne ſont ſuſceptibles que du Point conjugué, du Nœud ſimple, & du Rebrouſſement.

Qu'avec ces trois ſortes de Points doubles, les Courbes du quatriéme Ordre peuvent avoir le Nœud avec une ou avec deux Inflexions, l'Oſculation réelle & imaginaire, l'Embraſſement, & le Rebrouſſement en Bec.

Ajoutez, pour les Courbes du cinquiéme Ordre, le Nœud avec un ou deux Serpentements, le Nœud avec Inflexion & Serpentement, & l'Oſculinflexion.

Et, pour les Courbes du ſixiéme Ordre, le Nœud avec une ou deux triples Inflexions, le Nœud avec une triple Inflexion & un Serpentement, le Nœud avec une triple & une ſimple Inflexion, & l'Embraſſinflexion.

Il ſeroit aiſé, mais ſuperflu, de pouſſer ce détail plus loin. La méthode eſt générale, & l'on peut ſuivre cette énume-

PLANCHE XXV. énumeration autant qu'on le voudra, ou autant que des vuës particuliéres le demanderont. Il ne reſte donc qu'à éclaircir tout ceci par des Exemples. CH. XII. §. 210.

L'*Exemple I.* eſt propre à faire mieux connoitre tous les Points doubles dont les Courbes du troiſiéme Ordre ſont ſuſceptibles.

Fig. 199. num. 1. 1. L'éq : $ayy - x^3 + (b - c)xx + bcx = 0$ repréſente une Courbe compoſée d'une Ovale, placée du côté des abſciſſes négatives, dont le diamétre AC eſt égal à c, & de deux Branches qui vont à l'infini du côté des abſciſſes poſitives, partant du Point B éloigné de l'Origine A d'une diſtance $AB = b$. On le voit clairement en donnant à l'équation cette forme $y = \pm\sqrt{(x^3 - (b-c)x^2 - bcx) : a} = \pm\sqrt{(x \times (x-b) \times (x+c) : a)}$. Car on y voit qu'$y$ a deux valeurs égales, mais dont l'une eſt poſitive & l'autre négative; leſquelles, x étant poſitive, ſont imaginaires tant que $x - b$ eſt négative, c'eſt-à-dire, tant que $x < b$ [AB], & qui deviennent réelles dès que $x > b$ [AB]. Mais x étant négative, $x - b$ eſt auſſi négative; ainſi le produit $x \times (x - b)$ eſt poſitif, & $x(x - b) \times (x + c) : a$ eſt une grandeur du même ſigne que $x + c$, c'eſt-à-dire, poſitive ſi x [négative] $< c$ [AC], négative ſi $x > c$ [AC]. Mais ſelon que le produit $x \times (x - b) \times (x + c) : a$ eſt poſitif ou négatif, y qui en eſt la racine quarrée, eſt réelle ou imaginaire. Donc, du côté des abſciſſes négatives, la Courbe ne s'étend pas au-delà de l'abſciſſe AC, & ſa forme eſt celle d'une Ovale, qui, non plus que le reſte de la Courbe, n'a aucun Point double [§. 173].

2. Si, dans cette équation, on fait $c = 0$; elle ſe réduit à $ayy - x^3 + bxx = 0$. Le diamétre de l'Ovale devenant zéro, C tombe ſur A, & l'Ovale eſt réduite à un ſimple Point conjugué; lequel, quoiqu'inviſible, & détaché du

CH. XIII. du reſte de la Courbe, ne laiſſe pas de lui apartenir. Car §. 220. ſi on fait $y = o$; on réduit l'équation à $-x^3 + bxx = o$, qui a trois racines, $x = o$, $x = o$, $x = b$. Donc [§. 15] la Courbe rencontre trois fois l'Axe des abſciſſes, une fois en B & deux fois en A, où eſt le Point conjugué. Ainſi, quand on met l'équation ſur le Triangle analytique, le vuide de la Caſe de la Pointe & du prémier Rang montre qu'il y a un Point double à l'Origine. Mais ſi on veut en chercher la nature par la poſition de ſes Tangentes, on trouvera, en égalant le ſecond Rang à zéro, PLANCHE XXV.

o o o *
— * — o — * —
o o
o

l'éq : $ayy + bxx = o$, dont les racines, étant imaginaires, marquent un Point ſans Tangente, ſans direction, un vrai Point iſolé. [ci-deſſus, n°. 1]. Fig. 199. num. 2.

3. Qu'au lieu de c, on faſſe $b = o$, l'éq : $ayy - x^3 + (b - c)xx + bcx = o$ ſe réduit à $ayy - x^3 - cxx = o$; AB [b] devenant nulle, B vient tomber ſur A ; les deux Branches de la Courbe viennent s'attacher à l'Ovale, qui ne fait plus qu'une Feuille, liée aux Branches, non par une Oſculation, comme on pouroit d'abord le croire, mais par un ſimple Nœud. Car en cherchant les Tangentes de ce Point, on en trouvera deux, déterminées par l'éq : $ayy - cxx = o$, qui a pour racines $y\sqrt{a} - x\sqrt{c} = o$, & $y\sqrt{a} + x\sqrt{c} = o$. On les conſtruira, en prenant $AF = -\sqrt{a}$, $AE = +\sqrt{c}$ & $Ae = -\sqrt{c}$, & menant AD, Ad parallèles à EF, eF. num. 3.

Quoique la ſimple vuë de la Figure faſſe aſſez connoître de quel côté les Branches de la Courbe tournent leur concavité ; on peut s'en aſſurer démonſtrativement par le

PLANCHE XXV. CH. XIII. §. 210.

ſecond terme de la double Série $y = \pm x\sqrt{\frac{c}{a}}$. On ſubſtituera donc $\pm x\sqrt{\frac{c}{a}} + u$ à y dans l'éq : $ayy - x^3 - cxx = 0$, & on aura la transformée $auu \pm 2ux\sqrt{ac} - x^3 = 0$. Celle-ci miſe ſur le Triang : anal : a une déterminatrice inférieure qui donne $\pm 2ux\sqrt{ac} - x^3 = 0$, ou $u = \pm\frac{xx}{2\sqrt{ac}}$. Les Séries, qui expriment les Branches qui ſe croiſent en A, ſont donc $y = +x\sqrt{\frac{c}{a}} + \frac{xx}{2\sqrt{ac}}$ &c. $y = -x\sqrt{\frac{c}{a}} - \frac{xx}{2\sqrt{ac}}$ &c ; par où l'on voit que la Branche touchée par AD tourne en haut ſa concavité, & que la Branche touchée par Ad la tourne en bas.

o o o *
* * o
o o
o

Le ſecond terme de l'une & de l'autre de ces Séries, renfermant la ſeconde puiſſance de x, on en conclurra [ci-deſſus, n°. II] que le Nœud eſt ſimple : ce qu'on peut conclure auſſi de ce que les racines $y\sqrt{a} - x\sqrt{c} = 0$, $y\sqrt{a} + x\sqrt{c} = 0$ du ſecond Rang, ne diviſent point le troiſiéme, qui n'a que le ſeul terme x^3 [§. 186].

4. Dans cette même Courbe, il eſt clair que a reſtant toujours le même, plus c diminuë, & plus diminuent auſſi le diamétre AC de la Feuille & l'angle DAd des Tangentes au Point double. Si donc c diminuë à l'infini & devient zéro, l'éq : $ayy - x^3 - cxx = 0$, réduite à $ayy - x^3 = 0$, ne repréſente plus que la Parabole *ſemicubique*, où la Feuille diſparoit, & les deux Branches venant à ſe toucher, forment

Fig. 199. num. 4.

Digitized by Google

CH. XIII. §. 210. forment un Point de Rebrouſſement. Auſſi le Rang inférieur, qui n'a que le terme ayy, donne, étant égalé à zéro, une équation qui a deux racines égales $y = 0$, $y = 0$; ce qui marque la coïncidence des deux Tangentes. Et la valeur, $= x\sqrt{\frac{x}{a}}$, demi-imaginaire de y, indique le Rebrouſſement [ci-deſſus, n°. III. 1]. PLANCHE XXV.

Exemple II. On a vu au §. 186. *Ex. VI*, un Nœud avec Inflexion, & *Ex. V*, un Nœud avec deux Inflexions. Des Exemples de Nœud avec Serpentement & triple Inflexion n'auroient rien de plus inſtructif.

Mais on aura des Exemples d'Embraſſement & d'Oſculation, tant réelle qu'imaginaire, dans la Courbe, ou plutôt dans les Courbes, que déſigne l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, ſuivant les différens raports de a à b. En mettant cette équation ſur le Triangle analyt.

o o o o *
* o * o
* o o
o o
o

le Rang le plus bas, qui eſt le ſecond, n'a que le ſeul terme $(aa - bb)yy$, qui égalé à zéro a deux racines égales $y = 0$, $y = 0$, leſquelles marquent que l'Origine eſt un Point double [§. 170], dont la Tangente unique eſt l'Axe des abſciſſes [§. 184]. Mais la déterminatrice inférieure donne l'éq: $x^4 - axxy + (aa - bb)yy = 0$, qui a ces deux racines $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)}}$, $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)}}$. Elles ſont l'une poſitive & l'autre négative, ſi $\frac{1}{2}a < \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)}$, c'eſt-à-dire, ſi $a < b$; elles

PLANCHE XXV. elles ſont toutes deux poſitives, mais inégales, ſi $aa > bb$ & $bb > \frac{1}{4}aa$; poſitives & égales, ſi $bb = \frac{1}{4}aa$; imaginaires, ſi $bb < \frac{1}{4}aa$. Donc [ci-deſſus, n°. III, 2], l'Origine de la Courbe eſt une Oſculation réelle, quand $b > a$, & une Oſculation imaginaire, quand $b < \frac{1}{2}a\sqrt{3}$. C'eſt un Embraſſement, quand b tombe entre a & $\frac{1}{2}a\sqrt{3}$. Mais quand $b = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, il faut, pour déterminer la nature de ce Point double, chercher le ſecond terme de la Série $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a}$ &c. On trouve que ce ſecond terme eſt $\pm\frac{4x^3\sqrt{2}}{aa}$. Et la Série $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a} \pm \frac{4x^3\sqrt{2}}{aa}$ &c. déſigne un Embraſſement. CH. XIII. §. 210.

Tout cela ſe voit ſenſiblement en examinant les divers contours que prend la Courbe déſignée par l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, à meſure qu'on change le raport d'a à b.

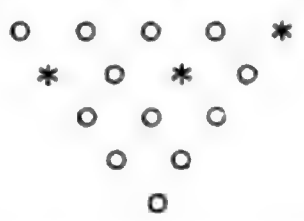
1. D'abord, ſi on ſuppoſe $a = 0$, ou infiniment petit par raport à b, les termes multipliez par a s'évanouïront, & l'équation ſe réduira à $x^4 - bbyy = 0$, qui déſigne deux Paraboles égales adoſſées l'une contre l'autre, leurs équations étant $xx - by = 0$, & $xx + by = 0$. Elles ſe baiſent à l'Origine A, qu'on peut regarder comme un Point d'Oſculation. Fig. 200. num. 1.

2. Si $a > 0$, & $< b$, l'éq: $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$ a quatre racines, $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay \pm y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$, dont il y en a toujours deux imaginaires, ſç. $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$ quand on prend y poſitive, & $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay + y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$ quand on prend y négative. Car, y étant poſitive & $b > a$, $ay + bb$ eſt $> aa$: donc $ay + bb - \frac{1}{4}aa > \frac{3}{4}aa$, & $\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)} > \frac{1}{2}a$: ainſi $y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)} > \frac{1}{2}ay$, & $\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$ eſt une grandeur

CH. XIII. §. 210. deur négative, dont la racine quarrée eſt imaginaire. Et, PLANCHE XXV. y étant négative, ou $\sqrt{(ay+bb-\frac{1}{4}aa)}$ eſt imaginaire, ou elle eſt réelle. Si elle eſt imaginaire, $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay+y\sqrt{(ay+bb-\frac{1}{4}aa)})}$ eſt auſſi imaginaire. Si $\sqrt{(ay+bb-\frac{1}{4}aa)}$ eſt réelle; comme on la prend poſitivement, on aura, en la multipliant par y négative, le produit $y\sqrt{(ay+bb-\frac{1}{4}aa)}$ négatif, lequel ajouté au produit auſſi négatif $\frac{1}{2}ay$ fait une ſomme négative, dont la racine quarrée eſt imaginaire. Ainſi la Courbe n'a que deux Branches du côté des ordonnées poſitives & deux autres Branches du côté des négatives. Les prémiéres vont à l'infini; les autres, qui s'écartent d'abord l'une de l'autre, ſe raprochent enſuite, & ſe réuniſſent au Point B extrémité de l'ordonnée $AB=\frac{bb}{a}-a$. La Courbe eſt donc compoſée d'une Ovale AB, & de deux Branches paraboliques dont l'Aſymptote eſt la Parabole DAd déſignée par l'équation $x^4-ay^3=0$ [§. 142]. Ces deux parties de la Courbe ſe joignent à l'Origine A par une Oſculation. La Parabole oſculatrice de l'Ovale eſt celle dont l'équation eſt $xx=(\frac{1}{2}a-\sqrt{(bb-\frac{1}{4}aa)})y$. Celle des Branches CAc a pour équation $xx=(\frac{1}{2}a+\sqrt{(bb-\frac{1}{4}aa)})y$ [§. 218]. Le Paramétre de la prémiére eſt poſitif, celui de la derniére négatif. Ainſi, les deux Paraboles ſe baiſent au Point A; & il en eſt de même des portions de la Courbe, qui ont en A la même courbure que les Paraboles oſculatrices. *Fig. 206. num. 2.*

3. Plus a augmente, plus diminuë le diamétre AB $[\frac{bb}{a}-a]$ de l'Ovale. Il s'anéantit quand $a=b$. Alors *num. 3.* l'Ovale ſe réduit à un ſeul Point, mais non pas iſolé, puiſqu'il eſt traverſé par les Branches CAc, ſur le contour deſquelles il ſe trouve en A. Il eſt inviſible, parce qu'un

PLANCHE XXV. Point eſt ſans étenduë ; mais il y eſt réellement, & le calcul fait voir que le Point A, qui ne ſemble à la vuë qu'un Point ſimple, eſt véritablement un Point triple. Car la ſuppoſition de $a = b$ réduit l'éq : $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$ à $x^4 - ax^2y - ay^3 = 0$, qui, miſe ſur le Tr : anal : n'a point de plus bas Rang que le troi- CH. XIII. §. 210.



ſiéme : donc l'Origine eſt un Point triple. Quand on en cherche les Tangentes, on trouve, pour les déterminer, l'éq : $ay^3 + ax^2y = 0$, qui a une racine réelle $y = 0$ & deux imaginaires $y = \pm x\sqrt{-1}$. La prémiére donne pour Tangente l'Axe des abſciſſes : & les deux autres indiquent que le Point A, quoique triple, n'a qu'une Tangente ; parce qu'en effet il ne paſſe par A qu'une ſeule Branche qui traverſe un Point ſans Tangente. Mais ce n'eſt pas ici le lieu de parler des Points triples.

Fig. 200. num. 4. 4. Soit $a > b$ & $< 2b\sqrt{\frac{1}{1}}$, c'eſt-à-dire, ſoit bb moyenne entre aa & $\frac{1}{4}aa$, l'Ovale recommence à paroitre, mais du côté des ordonnées poſitives, & renfermé entre les Branches C A c. On le voit par l'analyſe de l'éq : $x^4 - ax^2y - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, & par l'examen de ſes quatre racines $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay \pm y\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$. Elles ſont toutes quatre imaginaires, lorſque y eſt négative. Cela eſt évident, lorſque $\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$ eſt imaginaire, c'eſt-à-dire, quand y négative ſurpaſſe $\frac{1}{4}a - \frac{bb}{a}$. Mais cela eſt vrai encore, quand y eſt plus petite. Alors $\sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$ étant réelle, $\frac{1}{2}a + \sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)}$

CH. XIII. §. 120. $-\frac{3}{4}aa$) fait une ſomme poſitive, dont le produit par y négative eſt négatif. Ainſi ſes racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay + y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ ſont imaginaires. Les deux autres racines $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ le ſont auſſi, puiſque aa étant $> bb$, aa ſera auſſi $> ay + bb$: car ay négative diminuë bb. Donc $\frac{1}{4}aa > ay+bb-\frac{3}{4}aa$ & $\frac{1}{2}a > \sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$. Ainſi $\frac{1}{2}a-\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$ eſt une grandeur poſitive, qui multipliée par y négative fait un produit négatif, dont les racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ ſont imaginaires. On voit donc que les ordonnées négatives n'ont que des abſciſſes imaginaires. PLANCHE XXV.

Mais du côté des ordonnées poſitives, les racines $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay + y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ ſont toujours réelles. Car $bb > \frac{3}{4}aa$ fait que $ay + bb - \frac{3}{4}aa$ eſt toujours poſitive, & ſa racine poſitive, qui eſt réelle, ajoutée à $\frac{1}{2}a$ fait une ſomme poſitive, dont le produit par y poſitive, eſt poſitif, & a ſes racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay+y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ toujours réelles. Elles repréſentent les Branches CAc. Mais les racines $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ ne ſont réelles qu'autant que $y < a - \frac{bb}{a}$. Alors $ay < aa - bb$, & $ay + bb - \frac{3}{4}aa < \frac{1}{4}aa$. Donc $\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)} < \frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}a - \sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)}$ eſt poſitif, auſſi bien que ſon produit par y poſitive. Les racines quarrées $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - y\sqrt{(ay+bb-\frac{3}{4}aa)})}$ ſont donc réelles : comme au contraire, elles ſont imaginaires, ſi $y > a - \frac{bb}{a}$. Ainſi les Branches repréſentées par ces deux racines ſont une Ovale, dont le diamétre $AB = a - \frac{bb}{a}$ eſt pris du côté des ordonnées poſitives. Cet Ovale fait avec les Branches CAc un Embraſſement à l'Origine A.

PLANCHE XXV. La Parabole oſculatrice de l'Ovale a pour équation $xx = (\frac{1}{2}a - \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)})y$, & celle des Branches CAc, $xx = (\frac{1}{2}a + \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)})y$ [§. 218]. Les deux Paramétres ſont poſitifs, mais celui de la Parabole oſculatrice des Branches infinies eſt plus grand que celui de la Parabole oſculatrice de l'Ovale. Donc cette Parabole embraſſe l'autre [§. 214], & conſéquemment les Branches embraſſent l'Ovale. CH. XIII. §. 220.

5. Si l'on fait $b = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, ou $bb = \frac{3}{4}aa$, la figure de la Courbe reſte à peu près la même. Seulement le contact des Branches infinies & de l'Ovale eſt plus intime, parce que les Paramétres $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(bb - \frac{3}{4}aa)}$ deviennent égaux entr'eux & à $\frac{1}{2}a$.

6. Mais ce contact eſt ſur le point de ceſſer. Car pour peu qu'on diminuë b, de façon qu'il devienne $< \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, les deux parties de la Courbe qui ſont d'un côté de l'Axe des ordonnées, reſtant unies l'une à l'autre, ſe détachent de celles qui ſont de l'autre côté, & qui reſtent auſſi unies entr'elles; elles s'en détachent, dis-je, vers l'Origine en conſervant leur continuité vers l'autre bout de l'Ovale, laquelle diſparoit & ſe trouve rompuë, quoique la Courbe conſerve un cours continu.

Fig. 200. num. 5.

On le voit par l'examen des racines $x = \pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay \pm \sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$, qui ſont toutes quatre imaginaires quand y eſt négative, & même quand elle eſt poſitive, mais $< \frac{1}{4}a - \frac{bb}{a}$; qui deviennent toutes quatre réelles quand $y > \frac{1}{4}a - \frac{bb}{a}$ & $< a - \frac{bb}{a}$; & dont les deux $\pm\sqrt{(\frac{1}{2}ay - \sqrt{(ay + bb - \frac{1}{4}aa)})}$ redeviennent imaginaires quand $y > a - \frac{bb}{a}$. On le voit encore plus ſenſiblement en cherchant les *Maxima* & *Minima* de x & de

CH. XIII. §. 220. de y. Ceux de y ſont donnez [§. 196] par l'éq : $4x^3 - 2axy = 0$, qui a deux racines $x = 0$ & $xx = \frac{1}{2}ay$. PLANCHE XXV.

La prémiére $x = 0$ donne $y = 0$ & $y = a - \frac{bb}{a}$; ce qui déſigne le Point double de l'Origine, dont nous parlerons tout-à-l'heure, & l'extrémité B de l'ordonnée primitive $AB = a - \frac{bb}{a}$. La ſeconde $xx = \frac{1}{2}ay$ donne 1°. $y = 0$ & $x = 0$, qui ſe raporte auſſi au Point de l'Origine, & 2°. $y = \frac{1}{4}a - \frac{bb}{a} = EF = ef$, & $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}aa - bb)} = AE = Ae$. Il y a donc trois *Maxima* de y, qui ſont les Points B, F, f. Ceux de x ſont déterminés par l'éq : $axx = 2(aa - bb)y - 3ayy$, d'où l'on tire $y = \frac{5aa - 6bb \pm a\sqrt{(3bb - 2aa)}}{9a} = Gl = gi$, pour les Points l, i, des *Maxima*, & $y = \frac{5aa - 6bb - a\sqrt{(3bb - 2aa)}}{9a} = HL = hl$, pour les Points L, l, des *Minima*.

Quand $bb = \frac{1}{3}aa$, les valeurs de Gl, HL, & gi, hl deviennent égales entr'elles & à $\frac{1}{3}a$. Alors, les deux Points l & L, i & l de *Maximum* & de *Minimum* ſe réuniſſent en un ſeul point d'Inflexion K, k, [n°. 6] lequel diſparoit avec les *Maxima* & *Minima* de x, lorſque $bb < \frac{1}{3}aa$ rend imaginaires les valeurs d'y $\frac{5aa - 6bb \pm a\sqrt{(3bb - 2aa)}}{9a}$ qui déterminent ces *Maxima* & *Minima* [n°. 7]. Fig. 200.

Dans toutes ces Courbes le Point de l'Origine eſt un Point de la Courbe. Car dans l'éq : $x^4 - axxy - ay^3 + (aa - bb)yy = 0$, il n'y a point de terme tout conſtant [§. 14]. Mais dès que $bb < \frac{1}{4}aa$, le Point ne

PLANCHE XXV. Fig. 200. ſe trouve plus ſur le contour de la Courbe [*n°.* 5, 6, 7]. C'eſt donc un Point iſolé. Cependant, ſi on en cherche les Tangentes, on trouvera, pour les déterminer, l'éq : $(aa - bb)\,yy = 0$, dont les racines $y = 0$, $y = 0$, ne ſont pas imaginaires, mais égales; ce qui ſemble indiquer une double Tangente qui ſeroit l'Axe des abſciſſes. Mais quand on cherche ou la Parabole oſculatrice, ou le ſecond terme de la Série [§. 218], on trouve $\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(bb - \frac{1}{4}aa)}$ grandeur imaginaire quand $bb > \frac{1}{4}aa$. Ce Point eſt donc une Oſculation imaginaire [cy-deſſus, III, 2]. CH. XIII. §. 210.

Exemple III. On a vu dans l'Ex. *préc. n°.* 5, que quand $bb = \frac{1}{4}aa$, l'équation, qui ſe réduit à $x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{1}{4}aayy = 0$, déſigne une Courbe compoſée de deux Branches infinies AC, Ac, & d'une Ovale AB embraſſée auſſi étroitement qu'il eſt poſſible par ces Branches, puiſque la Parabole oſculatrice de l'Ovale au point A eſt la même que la Parabole oſculatrice des Branches. Mais ſi, dans cette équation, on change le terme ay^3 en axy^2, on aura une toute autre Courbe, & dont l'Origine eſt un Rebrouſſement en Bec. Dont la raiſon eſt, que dans la Série aſcendante $y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4x^3\sqrt{2}}{aa} - \frac{24x^4}{a^3}$ *&c.* que fournit l'éq : $x^4 - ax^2y - ay^3 + \frac{1}{4}aayy = 0$, il n'y a aucun terme imaginaire, ou demi-imaginaire ; ainſi les Branches qui s'embraſſent d'un côté de l'Axe des ordonnées s'embraſſent auſſi de l'autre côté, & font un Embraſſement complet. Au lieu que la Série $y = \frac{2xx}{a} \pm \frac{4xx\sqrt{ax}}{aa} + \frac{8x^3}{a^3}$ *&c.* que donne l'éq : $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$, a ſes termes alternatifs demi-imaginaires : ce qui montre que les Branches qui s'embraſſent d'un côté

Fig. 200. num. 4.

Fig. 193.

Fig. 194.

Fig. 195.

Fig. 197.

Fig. 198.

Fig. 199.

n°. 2.

n°. 3.

n°. 4.

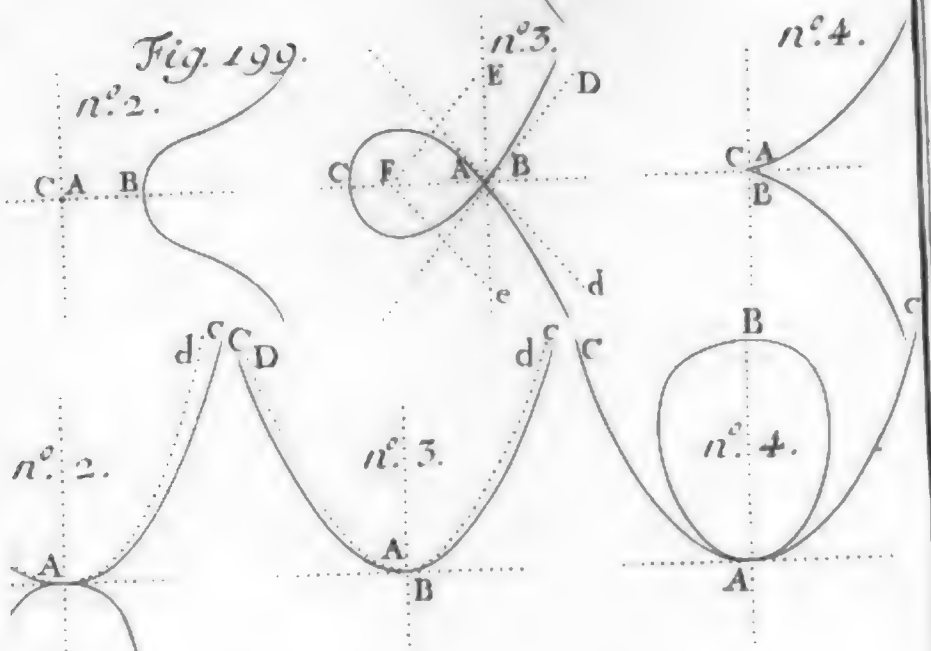
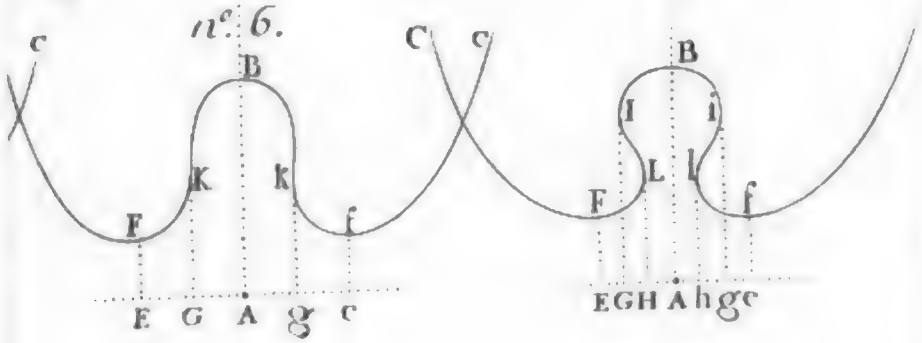


Fig. 200.

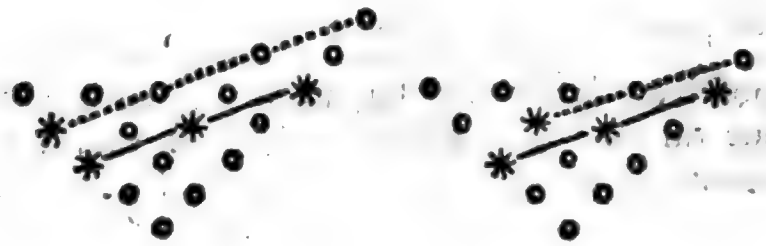
n°. 5.

n°. 6.



Digitized by Google

CH. XIII. §. 210. côté de l'Axe des ordonnées manquent de l'autre côté, & ne font qu'un demi-Embraſſement, c'eſt-à-dire un Bec. On remarque cette différence dès le ſecond terme de la Série; & on pouvoit l'apercevoir ſans calcul, en mettant ſimplement ces équations ſur le Triang. anal. Car elles PLANCHE XXVI.



ont une même déterminatrice, qui donne, pour l'une & l'autre, l'éq : $\frac{1}{4}aayy - ax^2y + x^4 = 0$, dont la racine [double] $\frac{1}{2}y - \frac{xx}{a} = 0$, ne diviſe point le terme unique du ſecond Ordre $-ay^1$ ou $-ax^2y$. Mais dans la prémiére équation il y a deux intervalles, entre la déterminatrice & ſa prémiére parallèle, au lieu qu'il n'y en a qu'un dans la ſeconde équation. Donc [§. 113, ou ci-devant III, 2] la Série que fournit cette ſeconde équation eſt demi-imaginaire, au lieu que celle que fournit la prémiére eſt ou réelle ou imaginaire. Ainſi la ſeconde indique un Bec, & la prémiére un Embraſſement, ou réel ou imaginaire. Et l'on a vu [*Ex. préc. n°.* 5] qu'il étoit réel.

On s'aſſurera parfaitement que la ſeconde Courbe a un Bec à ſon Origine, en reſolvant l'éq : $x^4 - ax^2y - axy^2 + \frac{1}{4}aayy = 0$. Car on trouvera $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{ax}}$: ce qui déſigne deux Branches repréſentées par les racines $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$ & $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$. On voit, en les

exami-

PLANCHE XXVI. examinant, qu'à l'Origine ces Branches ont l'Axe des abſciſſes pour leur Tangente commune, [parce que x étant infiniment petite, y qui eſt $\frac{xx}{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{ax}}$, eſt encore infiniment plus petite] ; que là elles s'embraſſent dans l'angle des coordonnées poſitives, [parce que x étant fort petite & poſitive, $\frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$ & $\frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$ ſont toutes deux poſitives, la ſeconde ſurpaſſant un peu la prémiére]; mais que du côté des abſciſſes négatives elles manquent entiérement, [parce que x étant négative, $\sqrt{ax}$, & conſéquemment $\frac{xx}{\frac{1}{2}a \pm \sqrt{ax}}$, eſt imaginaire]. Ainſi ces Branches forment à l'Origine un Rebrouſſement en Bec. Ch. XIII. § 210.

En continuant cet examen, on voit que la Branche ACc, déſignée par la racine $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a + \sqrt{ax}}$, s'éloigne à l'infini des deux Axes, comme fait la Parabole $y = \frac{xx}{\sqrt{ax}}$, ou $ayy = x^3$, qui eſt ſon Aſymptote. Mais la Branche AED, que repréſente la racine $y = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}}$, s'éloigne infiniment de l'Axe des abſciſſes, & non pas de celui des ordonnées, puiſqu'elle ſe gliſſe le long de l'Aſymptote droite BD, ordonnée de l'abſciſſe $AB = \frac{1}{4}a$. Car $x = \frac{1}{4}a$ rend y [$= \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}} = \frac{xx}{\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a} = \frac{\frac{1}{16}aa}{0}$] infinie. L'abſciſſe étant plus grande que $\frac{1}{4}a = AB$, l'ordonnée eſt négative ; parce que le diviſeur $\frac{1}{2}a - \sqrt{ax}$ eſt négatif. D'abord l'ordonnée eſt infinie Bd, mais elle décroit fort rapidement juſqu'au point f [qui a l'abſciſſe $AF = \frac{4}{9}a$ & l'ordonnée $Ff = -\frac{1}{27}a$], après quoi elle recom- Fig. 201.

Digitized by Google

Ch. XIII. §. 220. recommence à croitre en s'aprochant de ſon Aſymptote courbe, qui eſt l'autre Branche Ae de la Parabole $ayy = x^3$. En ſorte qu'on peut dire que la Branche hyperbolique AED ſe continuë au-delà de l'infini, c'eſt-à-dire, du coté négatif, par la Branche auſſi hyperbolique df, & enſuite par la Branche parabolique fe. PLANCHE XXVI.

Exemple IV. On propoſe la Courbe dont la nature s'exprime par l'éq : $x^4 + x^3y - x^2y^2 - 2ax^2y + axy^2 + aayy = 0$, & l'on demande la nature du Point qui eſt à l'Origine ? L'équation étant miſe ſur le Triang : anal. a, comme la précédente, une déterminatrice inférieure qui donne l'éq : $aayy - 2ax^2y + x^4 = 0$, qui n'a qu'une racine, mais double, $ay - xx = 0$. Il y a donc à l'Origine un Embraſſement, réel ou imaginaire, ou un Rebrouſſement en Bec. L'on s'aſſure que c'eſt ce dernier, parce que la ſomme des termes $axy^2 + x^3y$ du ſecond Ordre n'eſt pas diviſible par la racine $ay - xx$ & que la déterminatrice n'eſt éloignée que d'un intervalle de ſa parallèle qui paſſe par ces termes [§. 113, ou ci-deſſus III, 2]. Ou, ſi l'on aime mieux, on cherchera le ſecond terme de la Série, en ſubſtituant $\frac{xx}{a} + u$ à y; ce qui donne la Transformée $aauu + axuu - xxuu + 3x^3u - \frac{2x^4u}{a}$ Fig. 202.

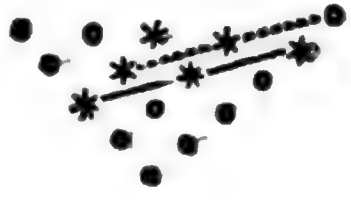


PLANCHE XXVI. $+\frac{2x^5}{a}-\frac{x^6}{aa}=0$, qui placée, à ſon tour, ſur le Tr. anal. a une déterminatrice inférieure, qui donne l'équat: CH. XIII. §. 220.

o o o o o o *
o o o o * *
o o * * o
o * o o
* o o
o o
o

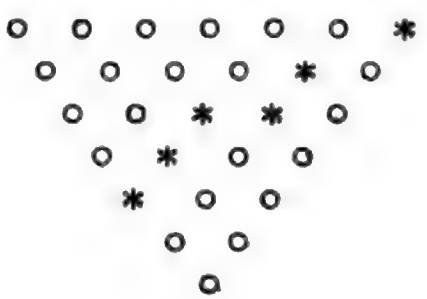
$aauu+\frac{2x^5}{a}=0$, ou $u=\pm\frac{xx\sqrt{-2x}}{a\sqrt{a}}$, terme demi-imaginaire, qui dénote un Bec. La Série $y=\frac{xx}{a}\pm\frac{xx\sqrt{-2x}}{a\sqrt{a}}$ *&c.* fait voir que les x poſitives n'ont que des y imaginaires, à cauſe de la radicale $\sqrt{-2x}$: mais les x négatives ont deux y réelles, qui donnent, à l'Origine, deux Branches, leſquelles s'embraſſant forment un Bec, dont l'Axe des abſciſſes eſt la Tangente.

Remarquez que ce qu'on dit ici, que les abſciſſes poſitives ont des ordonnées imaginaires, ne doit s'entendre que des abſciſſes plus petites que a. La Série, donnée par une déterminatrice inférieure, ne ſert que pour ces abſciſſes : elle ſeroit divergente & fautive, ſi on vouloit l'appliquer à des abſciſſes plus grandes.

2. Si dans l'équation précédente on change ſeulement le ſigne du terme $axyy$; alors on trouve bien la même déterminatrice, qui donne la même équation & la même racine $ay-xx=0$. Mais préſentement la ſomme $-axyy+x^3y$ des termes du ſecond Ordre eſt diviſible par cette racine, le quotient étant $-xy$. On ne peut donc pas employer

CH. XIII. §. 220. employer ici ſans embarras la Régle du §. 113, & il vaut mieux chercher le ſecond terme de la Série, en ſubſtituant PLANCHE XXVI.

$\frac{xx}{a} + u$ à y dans la Propoſée : d'où réſulte la Transformée $aauu + axuu - xxuu + x^3u - \frac{2x^4u}{a} - \frac{x^6}{aa} = 0$, qui étant miſe ſur le Triang. analyt. a une déterminatrice



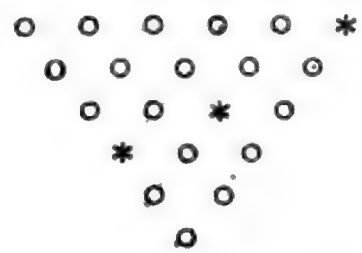
qui donne $aauu + x^3u - \frac{x^6}{aa} = 0$, ou $u = (-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})\frac{x^3}{aa}$. La double Série eſt donc $y = \frac{xx}{a} + (-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5})\frac{x^3}{aa}$ &c, & comme dès le troiſiéme terme elle eſt réguliére, on voit qu'elle n'a aucun terme ni imaginaire, ni demi-imaginaire. Ainſi les deux Branches qui ſe touchent à l'Origine, y font un Embraſſement complet [ci-deſſus III. 2]. Fig. 203.

Exemple V. On trouvera un Exemple d'*Oſculin-flexion* dans la Courbe déſignée par l'éq : $a^3yy - 2abxxy - x^4 = 0$. Elle ſe peut réduire à cette forme $y = (b \pm \sqrt{(bb + ax)})\frac{xx}{aa}$, qui fait voir que chaque abſciſſe poſitive a deux ordonnées, l'une poſitive $(b + \sqrt{(bb + ax)})$ Fig. 204.

PLANCHE XXVI. $ax))\frac{xx}{aa}$, l'autre négative $(b-\sqrt{(bb+ax)})\frac{xx}{aa}$, toutes deux réelles à l'infini, & qui donnent les deux Branches infinies AC, Ac, dont l'Aſymptote courbe eſt la Parabole indiquée par l'éq: $a^3yy = x^5$. Ces deux Branches ſe baiſent à l'Origine, & y font une demi-oſculation touchée par l'Axe des abſciſſes. Quand on prend x négative; les deux valeurs $(b\pm\sqrt{(bb+ax)})\frac{xx}{aa}$ de y, ſont poſitives tant qu'elles ſont réelles, parce que $\sqrt{(bb+ax)} < \sqrt{bb}$, ou b, lorſque x eſt négative: mais ces racines deviennent imaginaires, quand $\sqrt{(bb+ax)}$ eſt imaginaire, quand x négative ſurpaſſe $\frac{bb}{a}$. Ainſi l'ordonnée BD de l'abſciſſe négative $AB = -\frac{bb}{a}$, eſt une limite qui ſépare les ordonnées réelles des imaginaires. On l'auroit trouvée également par la Méthode *de Maximis* [§. 196], qui donne pour le *Maximum* d'x le point D, dont l'abſciſſe $AB = -\frac{bb}{a}$, & l'ordonnée $BD = \frac{b^5}{a^4}$, & pour le *Maximum* d'y le point d, dont l'abſciſſe $db = -\frac{24bb}{25a}$, & l'ordonnée $Ab = \frac{3456b^5}{3125a^4}$. Cette partie de la Courbe, qui tombe dans l'angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives, conſiſte donc en une feuille ou ou fleuron ADdA, dont les Branches ſont à l'Origine un demi-Embraſſement, qui avec la demi-Oſculation des Branches infinies CAc forme une Oſculinflexion. C'eſt auſſi ce qu'on trouvera par nos Méthodes. L'éq: $a^3yy - 2abx^2y - x^5 = 0$ miſe ſur le Tr: anal: a deux déterminatrices inférieures, dont l'une donne $a^3yy - 2abx^2y = 0$,

CH. XII. §. 110.

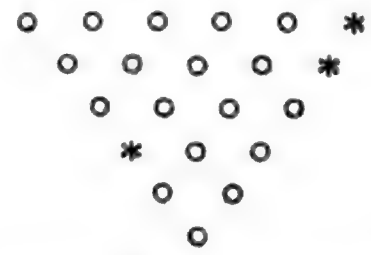
Ch. XIII. §. 220. $= 0$, ou $y = \frac{2bx^2}{aa}$, & l'autre $- 2abx^2y - x^5 = 0$, Planche XXVI.



ou $y = -\frac{x^3}{2ab}$. Il y a donc deux Séries; l'une, dont le prémier terme eſt $\frac{2b}{aa}x^2$, exprime les Branches CAd; l'autre, dont le prémier terme eſt $-\frac{1}{2ab}x^3$, déſigne les Branches cAD: & ces quatre Branches forment l'Oſculinflexion, qu'on voit à l'Origine [ci-deſſus III. 3].

Exemple VI. La Courbe repréſentée par l'éq : $x^5 + bx^4 - a^3yy = 0$, conſiſte en deux Branches infinies AD, Ad, qui ſe baiſent à l'Origine A où elles ont l'Axe des abſciſſes pour Tangente commune, & de là s'étendent à l'infini du côté poſitif, ayant pour Aſymptote la Parabole déſignée par l'éq : $a^3yy = x^5$. Mais ces Branches continuées du côté négatif, y forment une Ovale ou Poire AFBfA. Car en donnant à l'équation cette forme $y = \pm\frac{x^2}{a}\sqrt{\frac{x+b}{a}}$, on voit 1°. que l'Axe des abſciſſes eſt un Diamétre, chaque abſciſſe ayant deux ordonnées égales, une poſitive & une négative; 2°. que prenant l'abſciſſe x poſitive, l'ordonnée y va en augmentant à l'infini; mais 3°. que prenant x négative, y devient imaginaire dès que x négative ſurpaſſe b, parce qu'alors $x + b$ Fig. 205.

PLANCHE XXVI. eſt une grandeur négative. Ainſi la Courbe, de ce côté, ne s'étend pas au-delà de $AB = b$. Si on cherche la nature du Point qui eſt à l'Origine, on trouvera, en mettant l'éq : $x^5 + bx^4 - a^3yy = 0$ ſur le Triang : analyt : CH. XIII. §. 220.



que la déterminatrice inférieure donne $bx^4 - a^3yy = 0$, qui ſe décompoſe en ces deux $xx - ay\sqrt{\frac{a}{b}} = 0$, $xx + ay\sqrt{\frac{a}{b}} = 0$, qui indiquent, pour les Paraboles oſculatrices, deux Paraboles ordinaires, égales, adoſſées l'une contre l'autre de part & d'autre de l'Axe des abſciſſes, qui eſt leur Tangente commune. En examinant cette Courbe, on trouvera [§. 173] qu'elle n'a d'autre Point multiple que celui de l'Origine, mais qu'elle a [§. 199] deux inflexions F, f, dont l'abſciſſe commune eſt $AE = (-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}})b$.

Il eſt clair que b diminuant, la Poire AFBfA diminuë auſſi, & qu'elle diſparoit quand b devient zéro. Alors les deux Branches DA, dA viennent ſe terminer en A, qui de Point d'Oſculation devient Point de Rebrouſſement. Mais dans ce Point, l'Ovale, quoiqu'évanouïe, conſerve quelque veſtige de ſes deux inflexions, puiſque dans l'éq : $x^5 - a^3y^2 = 0$, qui eſt celle de la Courbe, la double racine [$y = 0$] du ſecond Rang eſt cenſée diviſer le troiſiéme & quatriéme Rang, qui manquent. C'eſt-là le Point que nous avons nommé [ci-deſſus III, 3] Point de Rebrouſſement à double inflexion.

Exem-

Ch. XIII. §. 220.

Exemple VII. On trouve dans les Courbes représentées par l'éq : $c^6yy - (a+b)\,c^3x^3y + abx^6 - c^3x^3y^2 = 0$ des Points d'Oſculation, de Rebrouſſement en Bec, & d'Embraſſement, formés par le contact de deux Paraboles cubiques [ci-deſſus III, 4]. Ces Courbes ont [§§. 139. 142] deux Aſymptotes, l'une Droite, qui eſt l'ordonnée CBc de l'abſciſſe $AB = c$, déſignée par l'éq : $c^6yy - c^3x^3y^2 = 0$, ou $c^3 = x^3$, ſoit $x = c$; l'autre curviligne, qui eſt la Parabole ſemicubique fAg, indiquée par l'éq : $abx^6 - c^3x^3y^2 = 0$, ou $yy = \frac{ab}{c^3}x^3$. Si on cherche les *Maxima* [§. 196], on trouvera, pour ceux de x, l'éq : $x^3 = c^3$ [qui ne déſigne que l'Aſymptote Cc] & l'éq : $x^3 = -\frac{c^3(a-b)^2}{4ab}$ qui marque que le Point H dont l'abſciſſe $Ah = -c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$ & l'ordonnée $Hh = -\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$, eſt un *Maximum* de x. Pour ceux de y, on trouve les Points E, I, qui ont pour abſciſſes $x = c\sqrt[3]{(2+\frac{a+b}{\sqrt{ab}})} = Ae$, & $x = c\sqrt[3]{(2-\frac{a+b}{\sqrt{ab}})} = Ai$, & pour ordonnées $y = -a-b-2\sqrt{ab} = eE$, $y = -a-b+2\sqrt{ab} = iI$. Enfin, on trouve pour le Point qui eſt à l'Origine, l'éq : $c^6y^2 - (a+b)\,c^4x^3y + abx^6 = 0$, qui ſe décompoſe en ces deux équations $c^3y - ax^3 = 0$, $c^3y - bx^3 = 0$, qui ſont l'une & l'autre à la Parabole cubique.

Planche XXVI. Fig. 206. num. 1. 2. 3. 4.

n. 1. & 3.

n. 1. & 2.

Donc, ſi a & b ſont de même ſigne, la forme de la Courbe eſt à peu près telle qu'on la voit au n°. 1, compoſée de deux parties détachées, dont l'une dEG a deux Branches infinies, une hyperbolique Ed & une paraboli-

que

PLANCHE XXVI. que EG; & dont l'autre DAIHAF a auſſi deux Branches infinies, une hyperbolique AD & une parabolique AF, & de plus un Fleuron AHIA, auquel elles ſe joignent en A par un *Embraſſement avec inflexion.* CH. XIII. §. 220.

Ce Fleuron, dont la plus grande abſciſſe eſt $Ah = -c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$, & la plus grande ordonnée $il = -a - b + 2\sqrt{ab}$, diminuë d'autant plus que a & b aprochent plus de l'égalité; il diſparoit quand ces deux grandeurs ſont égales, & alors la Courbe [n°. 2] a un Bec à l'Origine.

Mais, quand les ſignes de a & de b ſont différents, la forme de la Courbe change entiérement [n°. 3]. Elle conſerve l'Aſymptote droite Cbc, ordonnée de l'abſciſſe AB $= c$; mais la Parabole ſemi-cubique fAg, qui eſt l'Aſymptote courbe, paſſe du côté des abſciſſes négatives, ſon paramétre $\frac{c^3}{ab}$ étant devenu négatif. Alors la Courbe n'a plus de Fleuron, mais elle conſerve ſes quatre Branches infinies, deux hyperboliques AHD, Ad, & deux paraboliques AF, AG. Les *Minima* des ordonnées diſparoiſſent, parce que leurs abſciſſes $x = \sqrt[3]{(2 \pm \frac{a+b}{\sqrt{ab}})}$ ſont imaginaires, $\sqrt{ab}$ étant imaginaire quand a & b ont différents ſignes. Le *Maximum* des abſciſſes ſubſiſte au point H, dont l'ordonnée $hH = -\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$, & l'abſciſſe $Ah = -c\sqrt[3]{\frac{(a-b)^2}{4ab}}$. Mais cette ordonnée devient infinie, & l'abſciſſe ſe réduit à c, quand $a = -b$. Alors auſſi la Branche AHD, qui coupoit l'Aſymptote CB & paſſoit au-delà, l'accompagne ſans la couper, comme la Branche Ad [n°. 4].

§. 221.

Fig. 202.

Fig. 203.

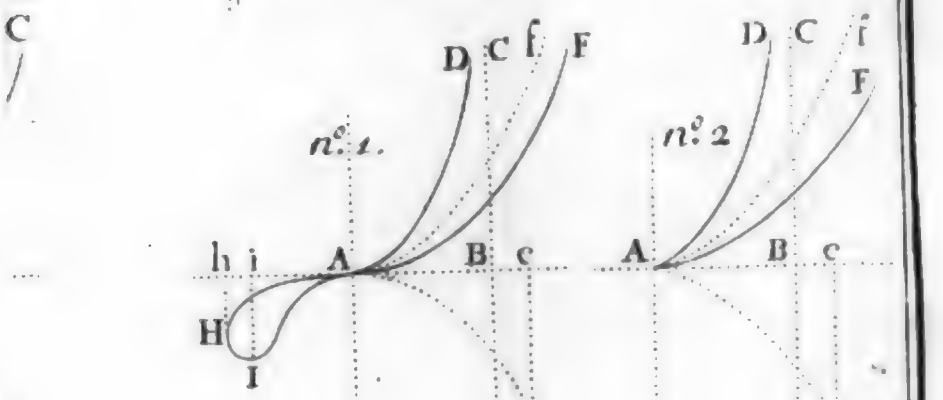
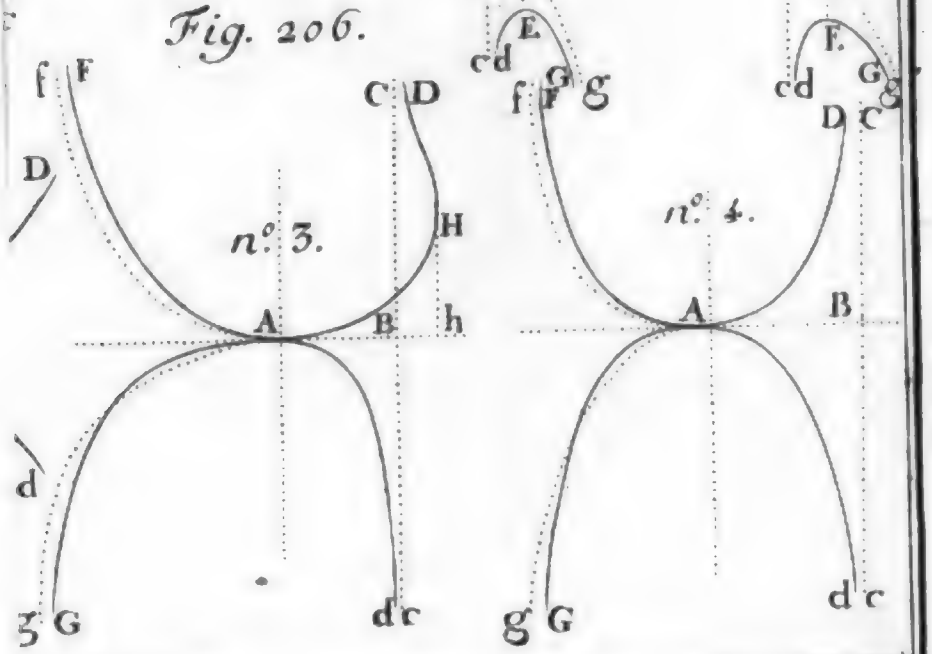


Fig. 206.



Digitized by Google

Digitized by Google

Ch.XIII. §. 221. PLANCHE XXVII.

§. 221. *Des Points triples.*

La diviſion des Points triples eſt fondée ſur les mêmes Principes que celle des Points doubles. En ſuppoſant un Point triple à l'Origine, la Caſe de la Pointe & celles des deux prémiers Rangs ſont vuides, en ſorte que le plus bas Rang de l'équation eſt le troiſiéme $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3$ [§. 170], qui, égalé à zéro, fait une équation du troiſiéme dégré, par laquelle on déterminera les Tangentes du Point triple.

I. Si ſes trois racines ſont réelles & inégales, c'eſt un Point à trois Tangentes. Trois Branches s'y croiſent, & y font des Angles finis, meſurés par ceux des Tangentes. Ce Point ſe nomme *Point triple d'interſection*, ou *Double-Nœud*. Il ſe diviſe, comme le ſimple Nœud, par les Inflexions & Serpentements de ſes Branches. Il peut n'avoir point d'Inflexions; il peut en avoir une, deux, ou trois; & de même un, deux, ou trois Serpentements; ou il peut avoir une Inflexion, & un ou deux Serpentements, ou deux Inflexions & un Serpentement: varietés qui ſe multiplient, quand on ſuppoſe une triple Inflexion, &c.

Le Double-Nœud ſans Inflexion peut ſe trouver dans les Courbes du quatriéme Ordre; parce que la Tangente d'une de ſes Branches n'eſt cenſée la rencontrer que deux fois, & chaque autre Branche une fois: ce qui fait en tout quatre fois. Mais ſi une Branche eſt infléchie au Point de ſection, ſa Tangente eſt cenſée rencontrer la Courbe cinq fois: ce Cas ne peut donc commencer à avoir lieu que dans les Courbes du cinquiéme Ordre. Et ſi l'une des Branches ſerpente, ſa Tangente eſt cenſée rencontrer la Courbe ſix fois: ce qui ſuppoſe une Courbe au moins du ſixiéme Ordre. En général, quand une Branche ſubit une Inflexion du dégré t, ſa Tangente eſt

PLANCHE XXVII. CH. XIII. §. 221.

censée la rencontrer $t+2$ fois, & les deux autres Branches 2 fois; desorte que la Courbe qui a un Point triple de cette forme est au moins de l'Ordre $t+4$.

Ces Formes se discernent en examinant combien de Rangs consécutifs, supérieurs au troisiéme, sont divisibles par chaque racine de l'éq: $gy^3 + hxy^2 + ix^2y + lx^3 = 0$ [§. 186].

Ou, ce qui est encore mieux, en cherchant le second terme des Séries que donnent ces racines. Si l'exposant d'x dans ce second terme est 2, la Branche n'a aucune Inflexion: si c'est 3, ou un nombre impair, elle a une Inflexion visible: si c'est 4, ou un nombre pair plus grand que 2, elle serpente. De plus, le signe de ce second terme aprend de quel côté de la Tangente tombe chaque Branche [§. 204]. Voyez ci-dessous *Ex. I.* 1.

II. Si des trois racines de l'équation tangentielle deux sont imaginaires; il ne reste qu'une Tangente au Point triple. Il est formé par l'adhérence d'un Point conjugué à une Branche de la Courbe, ce qui le rend, à la vuë, semblable à un Point simple. On en a vu un Exemple cy-dessus [§. 220. *Ex. II.* 3]. On peut se le représenter comme une Ovale infiniment petite, touchée ou traversée par une Branche; qui, dans ce Point, peut être sans Inflexion, ou avec Inflexion, ou avec Serpentement, &c. Et ici, comme dans le n°. préc. si l'Inflexion est du dégré t, la Courbe est au moins de l'ordre $t+4$. Voyez ci-dessous *Ex. III.*

III. Si l'équation tangentielle a deux racines égales; le Point triple n'a que deux Tangentes, une simple & une double formée par la coïncidence de deux Tangentes. Il y a donc, en ce Point, deux Branches de même direction traversées par une troisiéme Branche de direction différente, laquelle Branche peut être sans Inflexion, ou avec Inflexion, Serpentement &c. On examinera donc, comme

CH. XIII. §. 221. me au §. préc. quelle eſt la nature du Point double que forment les Branches d'une même direction, & on connoitra par-là la nature du Point triple. PLANCHE XXVII.

1. Si, par ex. la racine double du troiſiéme Rang ne diviſe pas le quatriéme [& ce Cas eſt le ſeul de ceux que nous examinons ici, qui puiſſe avoir lieu dans le quatriéme Ordre des Courbes : autrement l'équation, diviſible en entier par cette racine, ſeroit réductible] ; alors le Point triple [§. 220. III. 1] eſt un Rebrouſſement traverſé par une Branche de direction différente, laquelle Branche ne peut, dans le quatriéme Ordre, avoir d'Inflexion, ni dans le cinquiéme de Serpentement ou d'Inflexion d'un dégré ſupérieur &c. Voyez ci-deſſous *Ex. I.* 3. 4. *Ex. II.*

2. Si la racine double du troiſiéme Rang diviſe le quatriéme & non le cinquiéme ; le Point triple conſiſte [§. 220. III. 2] en une Oſculation, réelle ou imaginaire, un Embraſſement, réel ou imaginaire, ou un Bec, traverſés par une Branche de direction différente, laquelle peut être ſans Inflexion, ou avec Inflexion, ou avec Serpentement, &c. Et c'eſt dès le cinquiéme Ordre que les Courbes ſont ſuſceptibles de ces ſortes de Points triples, dont on diſcernera la nature en continuant les Séries que fourniſſent les deux racines de l'équation tangentielle : calcul, dont la Remarque du §. 113 peut ſouvent diſpenſer en bonne partie. Voyez ci-deſſous *Ex. IV.*

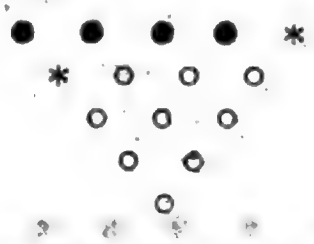
3. Mais ce n'eſt que dans le ſixiéme Ordre, ou dans les Ordres ſupérieurs, qu'un Rebrouſſement à double Inflexion, ou une Oſculinflexion [§. 220. III. 3] peut être traverſée par une Branche de direction différente. Voyez ci-deſſous *Ex. V.*

IV. Enfin ſi l'équation $gy^3 + hxyy + ixxy + lx^3 = 0$, n'a qu'une ſeule racine triple $y\sqrt[3]{g} + x\sqrt[3]{l} = 0$, ſoit $y =$

PLANCHE XXVII. Ax [en faisant, pour abréger, $A = -\sqrt[3]{\frac{l}{g}}$], le Point triple est formé par trois Branches qui se touchent, & qui n'ont qu'une Tangente, mais triple, c'est-à-dire, formée par la coïncidence de trois Tangentes, & dont l'équation est $y = Ax$. CH. XIII. §. 221.

On connoitra la nature de ce Point, en cherchant le second terme de la Série $y = Ax + \&c$: ce qui se fait en substituant $Ax + u$ à y dans l'équation proposée. On aura une transformée, dont la Pointe restera vuide, aussi bien que les deux prémiers Rangs, & trois Cases du troisiéme, qui n'aura de pleines que la seule Case u^3.

1. Si, dans le quatriéme Rang, la Case x^4 est remplie, la déterminatrice traversera les Cases u^3, x^4, & donnera



une équation cubique, dont deux racines sont imaginaires; la troisiéme étant $u = \sqrt[3]{Bx^4} = x\sqrt[3]{Bx}$. La triplicité de ce Point est donc invisible, on ne voit qu'une seule Branche sans Inflexion. Mais on peut supposer qu'il résulte de l'évanouïssement d'une double Feuille, devenuë infiniment petite. Voyez ci-dessous *Ex. I.* 2.

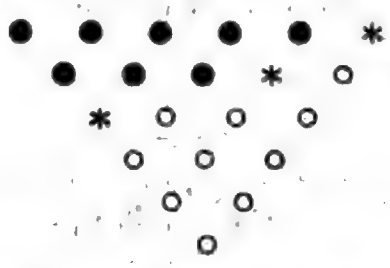
Ce prémier Point triple à Tangente triple, peut convenir aux Courbes du quatriéme Ordre. Les suivants ne se trouvent que sur les Courbes des Ordres supérieurs.

2. Si la racine $y - Ax = 0$ du troisiéme Rang divise le quatriéme & non le cinquiéme; il faut voir si elle divise ce quatriéme Rang une ou plusieurs fois.

1). Si

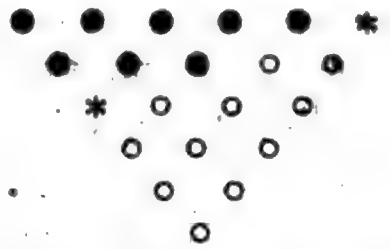
CH. XIII. §. 221. PLANCHE XXVII.

1). Si elle ne le diviſe qu'une fois, il manque au quatriéme Rang de la transformée la Caſe x^4, mais non la Caſe ux^3, & alors il y a deux déterminatrices inférieures, qui donnent $u = \pm x\sqrt{Bx}$ & $u = B'x^2$. Les Séries



$y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c, $y = Ax + B'x^2$ &c. marquent un Rebrouſſement [§. 220. III, 1] traverſé par une Branche ſans Inflexion, & ſous la même direction que celles qui font le Rebrouſſement. Voyez ci-deſſous *Ex. VI.* 1.

2). Si la racine $y - Ax = 0$ diviſe plus d'une fois le quatriéme Rang, il manque à ce Rang, dans la transformée, la Caſe ux^3, & la déterminatrice paſſant par les



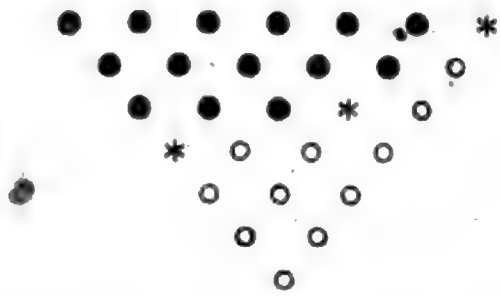
Caſes u^3 & x^5, donne une équation cubique, qui a deux racines imaginaires, & une réelle $u = \sqrt[3]{B}x^5 = x\sqrt[3]{B}x^2$. La Série $y = Ax + x\sqrt[3]{Bx^2}$ &c. marque une Branche avec Inflexion [§. 217]; mais la triplicité du Point eſt inviſible. On la peut ſuppoſer formée par l'évanouiſſement d'une Feuille. Voyez ci-deſſous *Ex. VI.* 2.

PLANCHE XXVII.

Ces deux ſortes de Points triples peuvent convenir aux Courbes du cinquiéme Ordre. Ceux qui ſuivent ſont reſervez aux Ordres ſupérieurs. CH. XIII. §. 121.

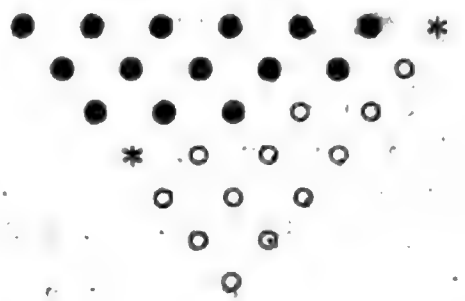
3. Quand la racine triple du troiſiéme Rang, diviſe le quatriéme & cinquiéme, mais non le ſixiéme; il faut diſtinguer le Cas, où elle ne diviſe le quatriéme Rang qu'une fois, de celui où elle le diviſe pluſieurs fois.

1). Si elle ne le diviſe qu'une fois, la Caſe nx^3 reſte pleine dans la transformée, qui a deux déterminatrices, d'où l'on tire les équations $n = \pm x\sqrt{Bx}$ & $n = B'x^3$. Les



Séries $y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c. $y = Ax + B'x^3$ &c. marquent un Rebrouſſement traverſé, ſous une même direction, par une Branche infléchie au Point de contact. Voyez ci-deſſous *Ex. VII.* 1.

2). Si la racine $y - Ax = 0$ diviſe plus d'une fois le quatriéme Rang de la propoſée, la Caſe nx^3 eſt vuide dans la transformée, dont la déterminatrice inférieure, paſſant par les Caſes n^1, n^2x^2, nx^4, & x^6, donne une



équation

CH. XIII. §. 221. équation cubique, dont les trois racines ſoient $u = Bx^2$, $u = B'x^2$, $u = B''x^2$. PLANCHE XXVII.

1)). Deux de ces racines peuvent être imaginaires. Alors on n'a qu'une Série $y = Ax + Bx^2$ &c, & le Point triple eſt formé par l'adhérence d'un Point conjugué à une Branche ſans Inflexion. Tel eſt, en particulier, le Cas où les deux Caſes u^2x^2 & ux^4 ſont vuides. Voyez ci-deſſous *Ex. VII.* 2.

2)). Si les trois racines Bx^2, $B'x^2$, $B''x^2$ ſont réelles & inégales; on a trois Séries, qui ayant le même prémier terme Ax, marquent trois Branches qui ſe touchent en un même Point ſans Inflexion; ſoit qu'elles s'embraſſent toutes trois, ce qui a lieu, quand B, B', B'' ont un même ſigne; ſoit qu'une des trois baiſe les deux autres, ce qui a lieu quand une des grandeurs B, B', B'' a un ſigne contraire à celui des deux autres.

3)). Si de ces trois racines deux ſont égales, la troiſiéme déſigne une Branche ſans Inflexion, qui paſſe par un Point double, de même direction, indiqué par la racine double, lequel peut être un Embraſſement, réel, ou imaginaire, ou demi-imaginaire, c'eſt-à-dire un Rebrouſſement en bec. Ces Cas ſe déterminent, & on prouve qu'il n'y en a pas d'autres, par une ſuite de raiſonnemens ſemblable à celle qui a été employée au §. préc. III. 2.

4)). Enfin, ſi ces trois racines ſont égales, on ne peut encore rien décider ſur la nature du Point triple: mais il faut, dans la transformée en u & x, ſubſtituer $Bxx + t$ à u; ce qui donnera une ſeconde transformée en t & x, dont la déterminatrice, partant de la Caſe t^1, fournira une équation cubique, ſur laquelle repetant le raiſonnement qu'on vient de faire, on trouvera toûjours que le Point triple eſt, ou un Embraſſement de trois Branches, ou un Embraſſement imaginaire traverſé par une Branche de même direction, ou un Embraſſement demi-

PLANCHE XXVII. demi-imaginaire, c'eſt-à-dire, un Bec, traverſé auſſi par une Branche de même direction. Sur tous ces Cas, voyez l'*Ex. VIII.* CH. XII. §. 214

Eclairciſſons la nature de ces Points par des Exemples.

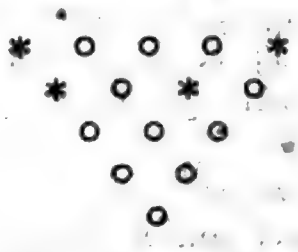
Exemple I. 1. On a déja vû des Points triples d'interſection aux §. 170, *Ex. III*; 171. *Ex. II*; 172; 173, *Ex. IV*; 192; auxquels nous joindrons celui de la Courbe déſignée par l'éq: $y^4+x^4-2ay^3+2bx^2y=0$. Elle eſt compoſée de trois Feuilles AB, AD, Ad, qui ſe réuniſſent à l'Origine par un Double-Nœud, où ſe croiſent les Branches BAD, DAd, dAB. En effet, l'équation de la Courbe étant réduite à cette Forme $x=\pm\sqrt{(-by\pm y\sqrt{(bb+2ay-yy)})}$, on voit qu'elle a quatre racines, deſquelles, y étant poſitive, les deux $\pm\sqrt{(-by-y\sqrt{(bb+2ay-yy)})}$ ſont imaginaires, ce qui eſt ſous le ſigne radical étant ou négatif, ou imaginaire, lorſque $bb+2ay-yy$ eſt négatif. Mais les deux autres racines $\pm\sqrt{(-by+y\sqrt{(bb+2ay-yy)})}$ ſont réelles, ſi $\sqrt{(bb+2ay-yy)}>b$, ou $bb+2ay-yy>bb$, c'eſt-à-dire, $2ay-yy>0$, ou $2ay>yy$, ſoit $2a>y$. Par conſéquent, du côté des ordonnées poſitives, la Courbe a une Feuille, dont la longueur eſt $AB=2a$. Mais y étant négative, les quatre valeurs d'x, $\pm\sqrt{(by\mp y\sqrt{(bb-2ay-yy)})}$ ſont toutes quatre réelles, tant que $\sqrt{(bb-2ay-yy)}$ eſt réelle; parce que b, ou $\sqrt{bb}$, ſurpaſſe néceſſairement $\sqrt{(bb-2ay-yy)}$. Or cette grandeur eſt réelle, lorſque bb ſurpaſſe $2ay+yy$, ou que $bb+aa>aa+2ay+yy$, ſoit $\sqrt{(bb+aa)}>a+y$, ou $y<\sqrt{(bb+aa)}-a$. Donc, du côté des ordonnées négatives, juſqu'à l'ordonnée $AC=\sqrt{(bb+aa)}-a$, il y a quatre abciſſes x qui forment les deux Feuilles AD, Ad. Fig. 207.

Ainſi l'Origine A eſt un Point triple d'interſection. C'eſt auſſi ce que montre l'équation miſe ſur le Tr. anal.

Son

CH. XIII. §. 221. Son plus bas Rang donne $-2ay^3+2bx^2y=0$, qui a trois racines $y=0$, $y=+x\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y=-x\sqrt{\frac{b}{a}}$. La prémiére, indique une Tangente parallèle aux abſciſſes : c'eſt celle de la Branche dAD. Les deux autres montrent des Tangentes obliques aux coordonnées : ce ſont celles des Branches BAd, BAD. PLANCHE XXVII.

Pour ſavoir ſi ces Branches ont quelque Inflexion & de quel côté de leurs Tangentes elles tombent, on cherchera le ſecond terme des Séries $y=0$ &c. $y=+x\sqrt{\frac{b}{a}}$ &c. $y=-x\sqrt{\frac{b}{a}}$ &c. Celui de la prémiére Série (& c'eſt proprement ſon prémier terme, car on ne compte pas 0 pour un terme) eſt donné par la déterminatrice inférieure, qui traverſe les Caſes x^2y & x^4, donnant l'éq: $x^4+2bx^2y=0$, ou $y=-\frac{x^2}{2b}$. Ce terme indique que la Branche dAD eſt ſans Inflexion, & qu'elle tourne ſa concavité vers les ordonnées négatives.



Pour avoir le ſecond terme des deux autres Séries, on ſubſtituera $\pm x\sqrt{\frac{b}{a}}+u$ à y, dans la propoſée $y^4+x^4-2ay^3+2bx^2y=0$, & la transformée $\frac{aa+bb}{aa}x^4\pm 6x^3u\sqrt{\frac{b}{a}}+\frac{6b}{a}xxuu\pm 4xu^3\sqrt{\frac{b}{a}}+u^4-4bx^3u\mp 6xu^2\sqrt{ab}$

PLANCHE XXVII. CH. XIII. §. 221.

$-2au^3 = 0$ mise sur le Tr. anal. n'a qu'une déterminatrice inférieure utile, qui donne $-4bxxu + \frac{aa+bb}{aa}x^4 = 0$,

* * * * *
* * * o
o o o
o o
o

ou $u = \frac{aa+bb}{4aab}xx$. Les Séries $y = +x\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{aa+bb}{4aab}xx$ &c. $y = -x\sqrt{\frac{b}{a}} + \frac{aa+bb}{4aab}xx$ &c. font voir que les Branches BAd, BAD tombent, par raport à leurs Tangentes, du côté des ordonnées positives, de maniére qu'elles n'ont aucune Inflexion [ci-dessus, I.].

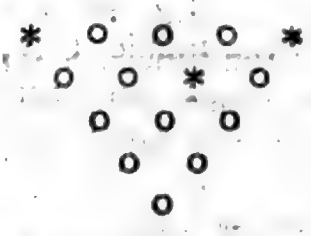
2. Si dans l'équation proposée on fait $b = 0$, elle se reduit à $y^4 + x^4 - 2ay^3 = 0$. Alors l'ordonnée AC [$= \sqrt{(aa+bb)} - a$] devient zéro, aussi bien que ses abscisses CD, Cd [$= \pm\sqrt{(-ab + b(aa+bb))}$]. Les deux Feuilles AD, Ad, s'évanouissent, & les Tangentes des Branches BAd, BAD [désignées par les éq : $y = +x\sqrt{\frac{b}{a}}$, $y = -x\sqrt{\frac{b}{a}}$, que la supposition de $b = 0$ réduit à $y = 0$, $y = 0$], se confondent avec l'Axe des abscisses, Tangente de la Branche dAD. La Courbe se réduit donc à une simple Ovale AB, qui garde pourtant à son Origine A des vestiges de la double Feuille. Car cette Origine est toujours un Point triple, puisque dans son éq : $y^4 + x^4 - 2ay^3 = 0$, le plus bas Rang est le troisiéme. La Tangente de ce Point est donnée par l'équat : $-2ay^3 = 0$, qui a trois racines égales $y = 0$, $y = 0$, $y = 0$. Et comme cette racine triple du troisiéme Rang ne

Fig. 207.

Fig. 208.

CH. XIII. §. 221. ne diviſe pas le quatriéme y^4+x^4, la triplicité de ce Point eſt inviſible [ci-deſſus IV. 1]. PLANCHE XXVII.

3. Mais ſi, dans la même équation $y^4+x^4-2ay^3+2bx^2y=0$, on ſuppoſe $a=0$; alors AB [$2a$] ſe réduit à rien, & la Feuille ABA diſparoit. L'ordonnée AC [$\sqrt{(aa+bb)}-a$] devient égale à b, auſſi bien que ſes abſciſſes CD, Cd [$\pm\sqrt{(-ab+b\sqrt{(aa+bb)})}$]. La Courbe n'a plus que les deux Feuilles AD, Ad, qui ſe joignent en A par un Point triple formé d'un Rebrouſſement dAD, traverſé par la Branche dABD ſous une autre direction. La nature de ce Point ſe lit dans l'éq: $y^4+x^4+2bx^2y=0$, miſe ſur le Tr. anal. Car elle y a deux Fig. 207. Fig. 209.



déterminatrices inférieures, qui donnent, l'une $2bx^2y+x^4=0$, ſoit $y=-\frac{x^2}{2b}$, l'autre $2bx^2y+y^4=0$, ſoit $x=\pm y\sqrt{-\frac{y}{2b}}$. La prémiére marque une Branche ſans Inflexion, touchée par l'Axe des abſciſſes, & tournant ſa concavité du côté des ordonnées négatives. La ſeconde indique deux Branches qui ſont un Rebrouſſement touché par l'Axe des ordonnées [ci-deſſus III. 1].

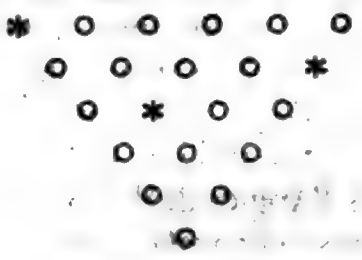
4. Dans cette derniére équation, le ſimple changement du ſigne du terme x^4, lui fait repréſenter une Courbe très différente. La précédente étoit finie: celle-ci a quatre Branches infinies & hyperboliques, dont les Aſymptotes ſe croiſent au point B, extrémité de l'ordonnée AB $=-\frac{1}{3}b$ [§. 143]. L'Origine eſt ici, comme dans la Fig. 210.

PLANCHE XXVII. derniére Courbe ; un Point triple formé par un Rebrouſſement traverſé d'une Branche ſous une autre direction : mais ici c'eſt la convexité de cette Branche qui eſt tournée vers le Rebrouſſement, au lieu que là c'étoit ſa concavité. La déterminatrice, qui déſigne cette Branche, donnoit là $y = -\frac{x^2}{2b}$, ici elle donne $y = +\frac{x^2}{2b}$. C'eſt toute la différence de ces deux Points. CHAP. §. III.

Exemple II. Si l'on veut un Rebrouſſement traverſé, ſous une direction différente, par une Branche infléchie, on en trouvera un Exemple fort ſimple dans la Courbe qu'exprime l'éq : $y^5 + ax^4 - b^2xy^2 = 0$. Elle conſiſte en une Branche infinie CA, infléchie à l'Origine A, qui forme dans l'Angle des coordonnées poſitives une Feuille ADEA, puis rebrouſſant du Point A donne une ſeconde Branche infinie AFG qui ſubit en F une ſeconde Inflexion. Les Branches infinies AC, AFG, ſont paraboliques & ont pour Aſymptote courbe la Parabole cAg déſignée par l'éq : $y^5 + ax^4 = 0$ [§. 142]. Les *Maxima* de la Feuille, ſont les Points D, E, qui ont pour ordonnées Ad $= \frac{1}{2}b\sqrt[7]{\frac{27b}{2a}}$, Ee $= b\sqrt[7]{\frac{24b}{625a}}$, & pour abſciſſes Dd $= \frac{1}{2}b\sqrt[7]{\frac{9b^3}{8a^3}}$, Ae $= b\sqrt[7]{\frac{108b^3}{3125a^3}}$ [§. 196]. Si l'on cherche la nature du Point A on trouvera que c'eſt un Point triple, puiſque le plus bas Rang de l'équation miſe ſur le Tr. anal. eſt le troiſiéme, qui conſiſte dans le ſeul terme $-bbxyy$. Ce terme égalé à zéro a deux racines, une ſimple $x = 0$ & une double $y = 0$. Donc l'Axe des ordonnées ne touche qu'une Branche de la Courbe & l'Axe des abſciſſes en touche deux. Mais puiſque la racine $x = 0$, diviſe le quatriéme Rang $+ax^4$, & non le cinquié- Fig. 211.

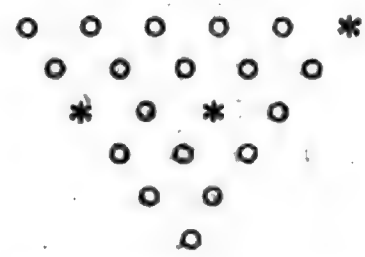
me

CXXIII. §. 221. me y^3, la Branche que touche l'Axe des ordonnées ſubit une Inflexion au Point A [§. 186]. C'eſt auſſi ce que marque la déterminatrice qui traverſe les Caſes xy^2 & y^4, laquelle donne l'éq : $x = \frac{y^4}{bb}$; au lieu que celle qui paſſe par les Caſes xy^2 & x^4, & qui donne l'éq : $y = \pm\frac{x}{b}\sqrt{ax}$, indique un Point de Rebrouſſement touché par l'Axe des abſciſſes [ci-deſſus III. 1]. PLANCHE XXVII.

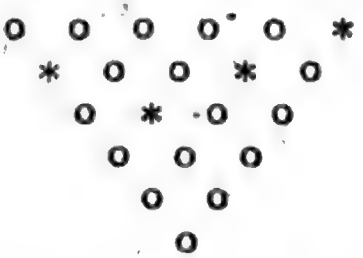


Exemple III. L'éq : $y^3 - byy + xxy + \frac{x^5}{aa} = 0$ repréſente une Courbe compoſée de deux Branches paraboliques AB, AC, étenduës dans les angles des coordonnées de différents ſignes, & touchées à l'Origine par l'Ovale AD qui forme avec ces Branches une *Oſculinflexion*. La longueur de cette Ovale eſt $AD = b$. Ainſi faiſant $b = 0$, l'Ovale diſparoit & ne conſerve que ſes Branches infinies. Mais alors l'Origine eſt un Point triple formé par l'adhérence d'un Point ou d'une Ovale infiniment petite à une Branche infléchie. Cela eſt marqué par l'équation tangentielle $y^3 + x^2y = 0$ qu'on trouve en mettant l'équation ſur le Triangle anal. Elle a une racine réelle $y = 0$, qui donne pour Tangente l'Axe des abſciſſes, & deux imaginaires $y = \pm x\sqrt{-1}$, qui marquent le Point adhérent [ci-deſſus, 11]. Et comme la racine réelle $y = 0$ eſt cenſée diviſer le quatriéme Rang qui manque, la Bran- Fig. 212.

PLANCHE XXVII. che de la Courbe ſubit une Inflexion à l'Origine. C'eſt auſſi ce que déſigne la Série qui repréſente cette Branche [§. 217]. Elle commence par le terme $\frac{x^5}{aa}$ donné par la déterminatrice qui traverſe les Caſes x^2y & x^5. CH. XIII. §. 221.



Exemple IV. L'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$ repréſente diverſes Courbes, qui ont toutes deux Branches paraboliques AC, DF [§. 142]. Mais elles diffèrent extrémement, près de l'Origine A, ſelon le raport des grandeurs a, b, c. Si on cherche la Tangente de la Courbe en ce Point-là, on égalera à zéro le plus bas Rang, qui conſiſte dans le ſeul terme $acxy^2$, & comme cette équation a une racine ſimple $x = 0$ & une double $y = 0$, on conclurra que les deux Axes ſont Tangentes. Mais pour déterminer la nature de ce Point, on mettra l'équation ſur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices, dont l'une Fig. 213. num. III. IV.



donne l'éq: $-ay^4 + acxy^2 = 0$, ou $x = \frac{yy}{c}$ relative à la Branche que touche l'Axe des ordonnées. Elle fait voir que

CH. XIII. §. 221. que cette Branche eſt ſans Inflexion à l'Origine, & qu'elle tourne ſa concavité vers les abſciſſes poſitives lorſque c eſt poſitif, & vers les abſciſſes négatives quand c eſt négatif. C'eſt la Branche BADE [$n°$. I & IV] ou BADE [$n°$. II & III]. L'autre déterminatrice, rélative aux Branches que touche l'Axe des abſciſſes, donne l'éq : $acxy^2 + 2bx^3y + x^5 = 0$, ou $acy^2 + 2bx^2y + x^4 = 0$, qui a deux racines. PLANCHE XXVII.

Si $ac > bb$, ces racines ſont imaginaires, & les Branches, que devroit toucher l'Axe des abſciſſes, ſe réduiſent à un point adhérant à la Branche BADE [$n°$. I].

Si $ac = bb$, les deux racines ſont égales, & les Branches qu'elles déſignent forment un Bec EEF [$n°$. II] traverſé par la Branche BADE. C'eſt un Bec & non un Embraſſement; parce qu'entre la déterminatrice, qui paſſe par les termes xy^2, x^3y & x^5, & ſa parallèle qui paſſe par les termes, ou plutôt par le terme y^4, du ſecond Ordre, il y a trois intervalles [§. 113 & ci-deſſus III, 2].

Si ac eſt poſitif & $< bb$, les racines de l'éq : $acy^2 + 2bx^2y + x^4 = 0$ ſont inégales & négatives. Ainſi les deux Branches qu'elles déſignent tournent leur concavité d'un même côté, ſç. du côté des ordonnées négatives, & forment un Embraſſement ELDEAIF traverſé par la Branche BADE [$n°$. III].

Enfin, ſi ac eſt négatif, les racines de l'éq : $acy^2 + 2bx^2y + x^4 = 0$ ſont l'une poſitive, l'autre négative. Donc les Branches qu'elles indiquent ont leurs convexités oppoſées, & forment une Oſculation BAIC, EDLF, toujours traverſée par la Branche BADE [$n°$. IV].

Ainſi l'éq : $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$ fournit des Exemples de tous les Points triples mentionés ci-deſſus, $n°$. III, 2.

Cela deviendroit très-ſenſible par la réſolution de l'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$, ſi l'on pouvoit aiſément réſoudre une équat: du 4e, ou du 5e dégré. Mais on pourra s'en

PLANCHE XXVII. s'en convaincre auſſi, en faiſant $x = \frac{uz}{a}$ & $y = \frac{uzz}{aa}$, ſup- CH. XIII. §. 111.

poſitions qui transforment l'équation propoſée en $\frac{u^5z^5}{a^5} - \frac{au^4z^4}{a^4} + \frac{2bu^4z^3}{a^3} + \frac{acu^3z^3}{a^3} = 0$, ſoit $uu - \frac{uz^3}{aa} + 2bu + ac = 0$, laquelle déſigne une Courbe du quatriéme Ordre.

Fig. 212. num. 1. 2. 3. 4. Cette Courbe a deux Branches paraboliques bc, ef, dont l'Aſymptote courbe eſt la Parabole cubique exprimée par l'éq : $uu - \frac{uz^3}{aa} = 0$, ou $aau = z^3$, & deux Branches hyperboliques ba, ed, dont l'Aſymptote droite eſt l'Axe des abſciſſes & l'Aſymptote courbe l'Hyperbole $- \frac{uz^3}{aa} + ac = 0$, ou $uz^3 = aac$, d'un paramétre poſitif quand c eſt poſitif [n°. 1, 2, 3] & d'un paramétre négatif quand c eſt négatif [n°. 4]. Cela ſuffit pour donner quelque idée du cours de cette Courbe ; ſurtout ſi on ajoûte qu'elle rencontre l'Axe des ordonnées dans les Points indiquez par l'éq : $uu + 2bu + ac = 0$, à quoi ſe réduit ſon équation, quand on fait $z = 0$. Ainſi la Courbe ne rencontre point l'Axe des ordonnées, lorſque $ac > bb$, parce qu'alors [n°. 1] les racines de l'éq : $uu + 2bu + ac = 0$ ſont imaginaires. La Courbe touche cet Axe, quand $ac = bb$, ce qui rend égales les racines de cette équation [n°. 2]. La Courbe coupe ſon Axe en deux Points, lorſque $ac < bb$, parce qu'alors l'éq : $uu + 2bu + ac = 0$, a deux racines inégales, & ces deux Points ſont d'un même côté de l'Origine [n°. 3], lorſque ac eſt poſitif, les deux racines étant alors de même ſigne; au lieu que ces deux Points ſont de part & d'autre de l'Origine [n°. 4] quand ac eſt négatif, les deux racines ayant alors différents ſignes.

Cette

CH. XIII. § 121. Cette Courbe du 4e. Ordre étant décrite, on décrira par ſon moyen celle du 5e. Ordre repréſentée par l'éq: $x^5 - ay^4 + 2bx^3y + acxy^2 = 0$, en prenant, ſur la prémiére, une abſciſſe quelconque z & ſon ordonnée u, & donnant, pour la ſeconde, à l'abſciſſe $x\left[=\frac{uz}{a}\right]$ l'ordonnée $y\left[=\frac{uzz}{aa}\right]$. Il ſeroit facile d'en donner une Conſtruction géométrique : mais elle n'eſt pas néceſſaire ici. Il ſuffit de voir quelles parties de la Courbe du 5e. Ordre ſont produites par les diverſes parties de la Courbe du quatriéme. PLANCHE XXVII. Fig. 213

D'abord, 1°. ſi celle-ci ne rencontre point l'Axe des ordonnées, la Branche infinie ab produit la Branche finie AB. Car ſi l'on prend z infinie, puiſqu'à l'infini la Branche ab ſe confond avec ſon Aſymptote courbe dont l'équation eſt $uz^3 = a^3c$, on aura $y\left[=\frac{uzz}{aa}=\frac{uz^3}{aaz}=\frac{a^3c}{aaz}\right]$ $=\frac{ac}{z}$ infiniment petite, & $x=\left[\frac{uz}{a}=\frac{uz^3}{azz}=\frac{a^3c}{azz}=\right]$ $\frac{aac}{zz}$ infiniment plus petite encore. Donc, au point de la Branche ab qui eſt infiniment éloigné de l'Origine, répond le point A ſur l'Origine où la Courbe touche l'Axe des ordonnées, puiſque x eſt infiniment plus petite que y. Mais, ſi l'on prend z finie, u le ſera auſſi, & de même $x\left[=\frac{uz}{a}\right]$ & $y\left[=\frac{uzz}{aa}\right]$. Par ex. le point b duquel l'ordonnée bg eſt $=\sqrt{ac}$, & l'abſciſſe $Og=\sqrt[3]{(2aab+2aa\sqrt{ac})}$, donne le point B, dont l'abſciſſe $A\beta=$ $\sqrt[3]{(2acc+2bc\sqrt{ac})}$ & l'ordonnée $\beta B=\sqrt[3]{\frac{c(2b+2\sqrt{ac})^2\sqrt{ac}}{a}}$. n. 1. & 1.

PLANCHE XXVII. Ainſi toute la Branche infinie ab ne donne que la Branche finie AB. Mais la Branche infinie bc, dont les abſciſſes & les ordonnées croiſſent à l'infini, produit la Branche infinie BC, dont les coordonnées vont auſſi à l'infini. Il en eſt de même des Branches DE, EF produites par les Branches de, ef; avec cette différence que les coordonnées z & u des Branches de, ef étant négatives, les abſciſſes $x\left[=\frac{uz}{a}\right]$ des Branches DE, EF ſeront poſitives, & leurs ordonnées $y\left[=\frac{uzz}{aa}\right]$ négatives. Ainſi dans ce 1r. Cas la Courbe du 5e. Ordre CBADEF n'a que deux Branches infinies ABC, DEF qui partent toutes deux de l'Origine A. Ce Point A eſt pourtant un Point triple, mais ſa triplicité eſt inviſible. CH. XIII. §. 221.

n. 2 & II. 2°. Si la Courbe du 4e. Ordre touche en e ſon Axe des ordonnées, les Branches abc produiſent, comme dans le Cas précéd. la Branche ABC. Mais la Branche de produit une Feuille DEE. Car le point d infiniment éloigné donne, comme ci-deſſus, le point D où la Courbe touche l'Axe des ordonnées. Et le Point e, où l'abſciſſe z eſt nulle, ou infiniment petite, & l'ordonnée u [Oe] finie, donne à la Courbe du 5e. Ordre une abſciſſe x $\left[=\frac{uz}{a}\right]$ infiniment petite, & une ordonnée $y\left[=\frac{uzz}{aa}\right]$ infiniment plus petite. Le point e donne donc un Point E, où la Courbe touche l'Axe des abſciſſes. Ainſi la Branche infinie de produit une Feuille DEE. Et la Branche infinie ef produiſant, comme cy-deſſus, une Branche infinie EF touchée en E par l'Axe des abſciſſes, la Courbe CBADEEF a, à l'Origine, un Point triple qui conſiſte en un Bec EEF traverſé par la Branche BADE de direction différente.

3°. Si

Ch. XIII. §. 221. 3°. Si la Courbe abcdef coupe l'Axe des ordonnées en deux points i, l, d'un même côté de l'Origine, on verra, comme dans les Cas précédents, que les Branches abc produiſent la Branche ABC, que la Branche di produit la Feuille DEI, & que la Branche lf produit la Branche infinie LF. Mais l'arc iel produit un Fleuron IAEDL. Car les points i, l, dont les abſciſſes ſont infiniment petites & les ordonnées finies, donnent, comme ci-deſſus, les points I, L, dont les abſciſſes ſont infiniment petites, & les ordonnées infiniment plus petites; c'eſt-à-dire, des Points où la Courbe touche, à l'Origine, l'Axe des abſciſſes. Et les autres Points, comme e, dont l'abſciſſe z [Oh] eſt poſitive, & l'ordonnée u [he] négative, donnent des Points E, dont l'abſciſſe $x \left[= \frac{uz}{a} \right]$ & l'ordonnée $y \left[= \frac{uzz}{aa} \right]$ ſont négatives, ce qui produit le Fleuron IAEDL. Ainſi l'Origine de la Courbe CBADELDEAIF eſt un Point triple, qui conſiſte en un Embraſſement traverſé par une Branche de direction différente. PLANCHE XXVII. Fig. 213. num. 3. & III.

4°. Enfin, ſi la Courbe abcdef coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine O, la Courbe CIABI LEDLF a, à l'Origine, un Point triple formé par une Oſculation traverſée par une Branche de direction différente. Car les mêmes raiſons que ci-deſſus font voir que les Branches infinies ic, lf, produiſent les Branches infinies IC, LF, & que les Branches infinies abi, led, produiſent les Feuilles ABI, LED. num. 4. & IV.

Exemple V. On trouve une Oſculinflexion traverſée par une Branche de direction différente dans la Courbe que repréſente l'éq : $x^6 + aay^4 + aax^3y + a^3xyy = 0$. En la mettant ſur le Tr. anal. elle a trois déterminatrices inférieures, qui donnent ces trois équations, Fig. 214.

Planche XXVII. $a^2y^4 + a^1xyy = o$, $a^3xyy + aax^3y = o$, & $aax^3y + x^6 = o$, ou $x = -\frac{yy}{a}$, $y = -\frac{xx}{a}$, & $y = -\frac{x^3}{aa}$. La Ch. XIII. §. 111.

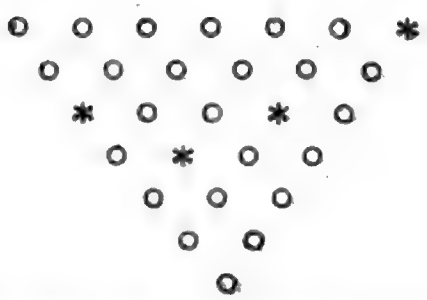


Fig. 214. n°. 1. & 2. prémiére marque une Branche ſans Inflexion BAHG, touchée par l'Axe des ordonnées & tournant ſa concavité vers les abſciſſes négatives. La ſeconde indique une Branche, auſſi ſans Inflexion, GHFE, touchée par l'Axe des abſciſſes, & tournant ſa concavité vers les ordonnées négatives. Et la troiſiéme déſigne une Branche infléchie BCDE, touchée auſſi par l'Axe des abſciſſes. Ces trois Branches forment ainſi une Oſculinflexion traverſée par une Branche de direction différente. [ci-deſſus III. 3].

On s'aſſurera que ces Branches ont bien la poſition indiquée par les équations des déterminatrices, en analyſant l'équation de cette Courbe de la même maniére qui a été employée dans l'Ex. préc. Si on ſubſtituë $\frac{uz}{a}$ à x, & $\frac{uzz}{aa}$ à y dans la propoſée $x^6 + aay^4 + aax^3y + a^3xyy = o$, on la transformera en $u^3z + uz^3 + a^3u + a^4 = o$, qui repréſente une Courbe du 4e. Ordre [n°. 2], laquelle a quatre Branches hyperboliques [§. 138]. Deux ba, efgh ont pour Aſymptote droite l'Axe des abſciſſes, & pour Aſymptote courbe l'Hyperbole dont l'éq : eſt $uz^3 + a^4 = o$, ou $u = -\frac{a^4}{z^3}$. Deux autres bc, ed ont pour

Aſymp-

Ch. XIII. §. 111. Aſymptote droite l'Axe des ordonnées, & pour Aſymptote courbe l'Hyperbole déſignée par l'éq: $u^3z + a^3u = 0$, ou $z = -\frac{a^3}{uu}$. Ainſi la Courbe a, à peu près, la figure qu'on voit ici [n°. 2]. Son ordonnée primitive Of eſt $-a$. Et le *Maximum* e des abſciſſes eſt déterminé par l'abſciſſe Oi, racine de l'éq: $4(z^3+a^3)^3 + 28a^6z = 0$, & par l'ordonnée $ie = -\frac{3a^4}{2(z^3+a^3)}$. Planche XXVII.

Cette Courbe [n°. 2] ſert à décrire l'autre [n°. 1], en prenant dans la prémiére une abſciſſe quelconque z & ſon ordonnée u, & donnant, pour la ſeconde, à l'abſciſſe x [$= \frac{uz}{a}$] une ordonnée y [$= \frac{uzz}{aa}$]. Sans entrer ici dans un détail, qui ſeroit ſuperflu après ce qui a été dit dans l'Ex. préc. il ſuffira de remarquer que la Branche abc, infinie de part & d'autre, produit la Feuille ABC, qui touche, au Point A, les deux Axes: que la Branche infinie def produit le Fleuron DEF, dont les deux Branches touchent, au Point A, l'Axe des abſciſſes: & que la Branche infinie fgh produit la Feuille FGH, qui touche les deux Axes au Point A. La Courbe entiére eſt donc compoſée de trois Feuilles ABC, DEF, FGH, ou de trois Branches BAHG, GHDE, & EFACB, qui forment à l'Origine une Oſculinflexion traverſée par une Branche de direction différente.

Voici maintenant des Exemples de Points triples dont les trois Branches ont au Point de contact une même direction. Et d'abord,

Exemple VI. 1. Un Rebrouſſement DAE, touché par une Branche BAC, ſe voit à l'Origine de la Courbe repréſentée par l'éq: $aay^3 - bx^3y + x^5 = 0$. Son cours Fig. 215.

PLANCHE XXVII. consiſte en une Branche BAC, qui étenduë à l'infini dans l'angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives, touche à l'Origine A l'Axe des abſciſſes, forme dans l'angle des coordonnées poſitives un Fleuron ACDA & revient toucher l'Axe des abſciſſes en A, d'où rebrouſſant en AE, elle ſe jette à l'infini dans l'angle des abſciſſes poſitives & des ordonnées négatives. L'Aſymptote des Branches infinies eſt la Parabole $a^2y^3 + x^5 = 0$. Les Points principaux ſont, le *Maximum* C des abſciſſes, qui a pour abſciſſe $Ac = \frac{18b^3}{125a^2}$, & pour ordonnée $cC = \frac{108b^5}{3125a^4}$; le *Maximum* D des ordonnées, qui a pour abſciſſe $Dd = \frac{8b^3}{243a^4}$ & pour ordonnée $Ad = \frac{4b^3}{27a^2}$; mais ſur-tout l'Origine A qui eſt un Point triple, dont les trois Branches ſont touchées par l'Axe des abſciſſes. Car les Tangentes ſont données par l'équation du plus bas Rang $a^2y^3 = 0$, qui n'a qu'une racine triple $y = 0$. Et comme cette racine diviſe, mais une ſeule fois, le quatriéme Rang bx^4y, ſans diviſer le cinquiéme x^5, on conclurra [ci-deſſus IV, 2, 1)] que ce Point A eſt un Rebrouſſement DAE, touché, ou traverſé par une Branche BAC de même direction. CH. XIII. §. 221.

C'eſt auſſi ce qu'on voit bien clairement en mettant l'équation ſur le Tr. anal. Car elle a deux déterminatri-

o o o o o *
o o o * o
* o o o
o o o
o o
o

ces

CH. XIII. §. 221. ces inférieures, qui donnent les éq : $a^2y^3 - bx^3y = 0$, PLANCHE XXVII ou $y = \pm\frac{x}{a}\sqrt{bx}$, & $-bx^3y + x^5 = 0$, ou $y = \frac{x^2}{b}$, dont la prémiére déſigne le Rebrouſſement, & la ſeconde la Branche qui le touche.

2. Si dans cette équation, on fait $b = 0$, le Fleuron ACDA s'évanouït & la Courbe eſt réduite à une Parabole dont l'éq: eſt $a^2y^3 + x^5 = 0$, qui, pour la Figure, reſſemble aſſez à la Parabole cubique; mais qui porte à l'Origine un Point triple, veſtige du Fleuron qui a diſparu. Sa Tangente en ce Point eſt déterminée par l'éq: $a^2y^3 = 0$, dont la racine triple $y = 0$ eſt cenſée diviſer, tant de fois qu'on voudra, le quatriéme Rang qui manque [ci-deſſus IV, 2, 2)].

Exemple VII. L'éq : $x^6 + 2aax^3y - b^3y^3 = 0$ Fig. 216. repréſente une Courbe qui a du raport avec la précédente. On peut commencer ſon cours par la Branche infinie BA, qui étenduë dans l'angle des abſciſſes négatives & des ordonnées poſitives vient à l'Origine toucher & couper l'Axe des abſciſſes : infléchie en ce point, elle paſſe dans l'angle oppoſé & y forme le Fleuron ACDA, qui la ramène à l'Origine, où touchant de nouveau l'Axe des abſciſſes, elle rebrouſſe, & pouſſe dans l'angle des coordonnées poſitives une Branche infinie AE. Ce cours de la Courbe eſt rendu manifeſte en réſolvant ſon équation & lui donnant cette forme $x = \sqrt[3]{(-aay \pm y\sqrt{(a^4 + b^3y)})}$. Car on voit que, y étant poſitive, x a deux valeurs, une poſitive $\sqrt[3]{(-aay + y\sqrt{(a^4 + b^3y)})}$ & une négative $\sqrt[3]{(-aay - y\sqrt{(a^4 + b^3y)})}$, qui croiſſent toutes deux à l'infini & donnent les Branches infinies AE, AB. Mais, y étant négative, les valeurs d'x ne ſont réelles,

PLANCHE XXVII. réelles, qu'autant que $a^4 + b^3y$ eſt poſitive, c'eſt-à-dire, CH. XIII. §. III. juſqu'à l'ordonnée $Ad[y] = -\frac{a^4}{b^3}$. Dans cet intervalle, elles ſont toutes deux poſitives & donnent le Fleuron ACDA, dont les *Maxima* D, C ſont déterminés par leurs ordonnées $Ad = -\frac{a^4}{b^3}$, $cC = -\frac{8a^4}{9b^3}$, & par leurs abſciſſes $dD = \frac{aa}{b}$, $Ac = \frac{4aa}{3b\sqrt{2}}$. Ainſi le Point triple de l'Origine eſt un Rebrouſſement DAE touché par une Branche infléchie BAC.

C'eſt auſſi ce qu'on peut conclure de nos *Principes*. Car l'équation du plus bas Rang $b^3y^3 = 0$, n'a qu'une racine, mais triple, $y = 0$. Donc à ce Point; il n'y a qu'une Tangente pour les trois Branches de la Courbe, & cette Tangente eſt l'Axe des abſciſſes. La racine triple diviſant, une ſeule fois, le quatriéme Rang $2aax^3y$, & diviſant auſſi, ou étant cenſée diviſer, le cinquiéme Rang qui manque, mais non pas le ſixiéme Rang x^6; le Point triple doit être un Rebrouſſement traverſé par une Branche infléchie [ci-deſſus IV, 3, 1)].

Mais on le voit encore mieux en mettant l'équation ſur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices inférieures qui donnent les éq: $-b^3y^3 + 2aax^3y = 0$, ou $y = \pm\frac{ax}{b}\sqrt{\frac{2x}{b}}$, & $2aax^3y + x^6 = 0$, ou $y = -\frac{x^3}{2aa}$, dont la prémiére marque le Rebrouſſement & la ſeconde la Branche infléchie qui le touche.

o o o o o o *
o o o o o o
o o o * o
* o o o
&c.

Exemple

Fig. 208.

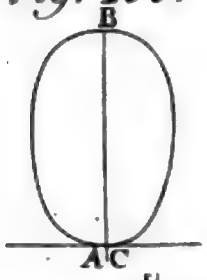


Fig. 209.

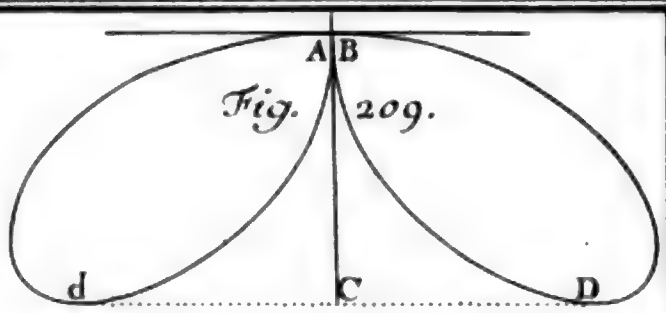


Fig. 211.

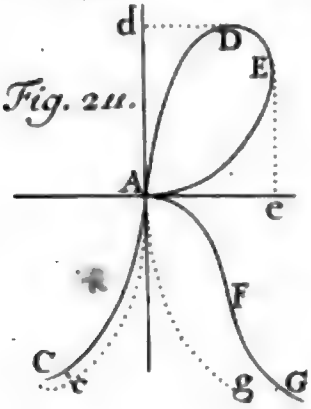


Fig. 210.

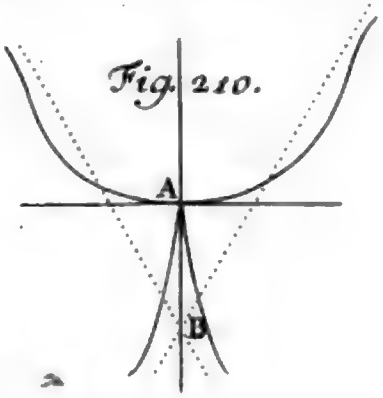
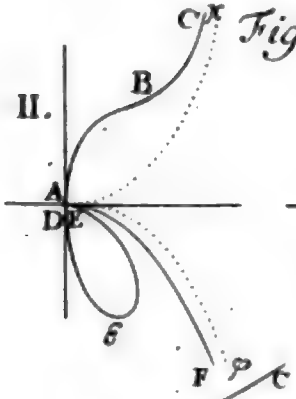
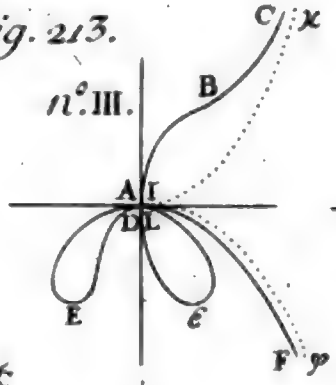
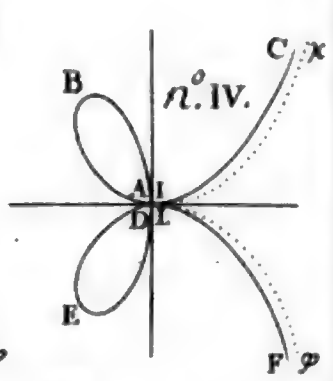
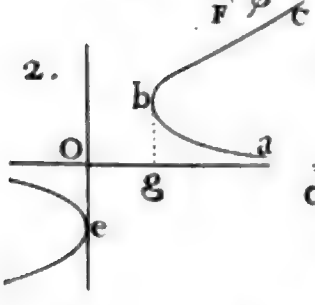


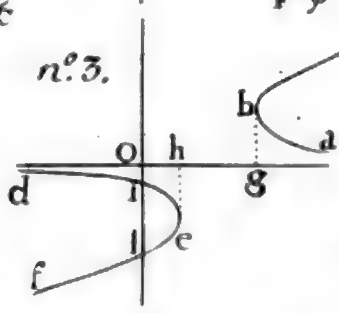
Fig. 213.

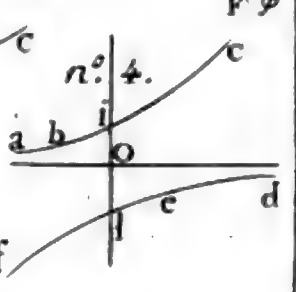












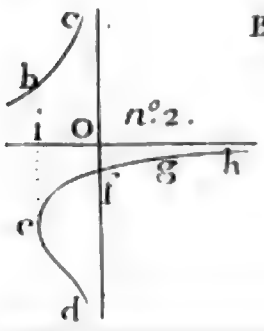


Fig. 215.

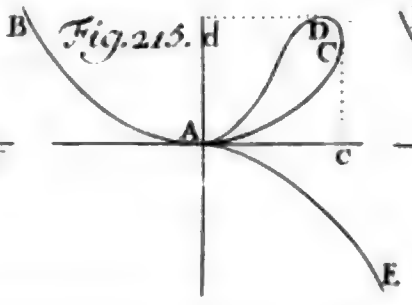
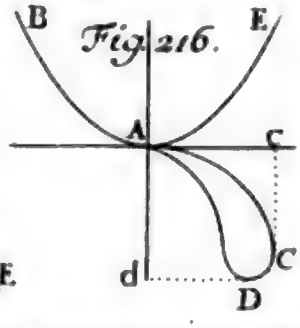


Fig. 216.



Ch. XIII. §. 211. *Exemple VIII.* Les Courbes que déſigne l'éq : $x^3y^2 = ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6$ fourniſſent des Exemples de tous les Points triples dont il eſt queſtion, ci-deſſus IV, 3, 2). Qu'on ſubſtituë dans cette équation xxu à y, & qu'on diviſe la transformée par x^6, on aura $xuu = au^3 + bu^2 + cu + d$, équation qui repréſente des Courbes du troiſiéme Ordre. Elles ont quatre Branches hyperboliques, dont deux b a, g h ont pour Aſymptote courbe l'Hyperbole exprimée par l'éq : $xuu = d$ [§. 138], ce qui fait voir qu'elles embraſſent l'Axe des abſciſſes, qui eſt leur Aſymptote droite, ſe jettant du côté négatif, ſi d eſt négative [n°. 1, 3, 5]; du côté poſitif, ſi d eſt poſitive [n°. 2, 4, 6]. Les deux autres Branches hyperboliques d e, g f, ont pour Aſymptote droite l'Oblique e f déſignée par l'éq : $x = ou + b$, & pour Aſymptote courbe l'Hyperbole ordinaire [§. 143]. Ces Courbes rencontrent leur ordonnée primitive en autant de points que l'éq : $au^3 + bu^2 + cu + d = 0$ a de racines. Ce qui fait ſix Cas principaux. Planche XXVIII. Fig. 217. n. 1. 2. 3. 4. 5. 6.

1°. Celui où les trois racines ſont réelles, inégales & de même ſigne : alors les trois points b, c, d, où la Courbe coupe l'Axe des ordonnées, ſont d'un même côté de l'Origine. num. 1.

2°. Celui où ces trois racines étant réelles & inégales, il y en a une d'un ſigne & deux d'un autre ſigne : alors, des trois points b, d, g, il y en a un d'un côté de l'Origine, & deux de l'autre. num. 2.

3°. Celui où il y a deux racines réelles & égales, & une troiſiéme réelle de même ſigne : dans ce cas, la Courbe touche l'Axe des ordonnées en d, & le coupe du même côté de l'Origine en b. num. 3.

4°. Celui où la troiſiéme racine a un ſigne différent de celui des racines égales : alors la Courbe touche l'Axe num. 4.

Digitized by Google

PLANCHE XXVIII. des ordonnées d'un côté en b, & le coupe d'un autre côté de l'Origine en g. CH. XIII. §. 221.

num. 5. 5°. Celui où les trois racines ſont égales : alors la Courbe touche & coupe l'Axe en un même Point b d, qui eſt un Point d'inflexion.

num. 6. 6°. Celui où il n'y a qu'une racine réelle & deux imaginaires ; en ce cas la Courbe ne coupe qu'en un Point g l'Axe des ordonnées.

Je paſſe ſous ſilence quelques varietés, qui pourroient ſubdiviſer ces Cas, mais qui ne ſont pas eſſentielles.

On peut, par le moyen de ces Courbes du 3e. Ordre, décrire géométriquement celles du 6e. que définit l'éq: $x^3y^2 = ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6$, en prenant, ſur les prémiéres, une abſciſſe quelconque x & ſon ordonnée u, & donnant, pour les autres, à la même abſciſſe x une ordonnée y [$= xxu$].

n.1. & 1. La Courbe abcde fgh produit la Courbe AB*B*C*C*DE FGH. Les Branches hyperboliques b a, g h donnent des Branches paraboliques B A, G H, aſymptotes de la Parabole ſemi-cubique αBν, dont l'éq : eſt $yy = dx^3$, ou $y = \pm x\sqrt{dx}$. Car l'abſciſſe x des points a, h étant ſuppoſée infinie, leur ordonnée u [$= \sqrt{\frac{d}{x}}$] eſt infiniment petite ; mais l'ordonnée y des points A, H eſt [$xxu = xx\sqrt{\frac{d}{x}}$] $= x\sqrt{dx}$. Les Branches hyperboliques d e, g f donnent les Branches paraboliques D E, G F, aſymptotes de la Parabole cubique αBφ, dont l'éq : eſt $y = \frac{x^3}{a}$. Car l'abſciſſe x des points e, f étant priſe infinie, poſitive ou négative, leur ordonnée u [$= \frac{x}{a}$] eſt auſſi infinie du même ſigne :

Ch. XIII. §. 221. PLANCHE XXVIII.

ſigne: mais l'ordonnée y des points E, F eſt $[xxu=] \frac{x^3}{a}$.

Fig. 217.

Ainſi les quatre Branches hyperboliques de la Courbe *n°.* I, produiſent les quatre Branches paraboliques de la Courbe *n°.* I. Mais les deux arcs, qui ſont entre b c, & c d, produiſent les Fleurons B*B*C, C*C*D, dont les Branches touchent l'Axe des abſciſſes à l'Origine; parce qu'à l'abſciſſe x infiniment petite des points b, c, d, répondent des ordonnées u finies Ob, Oc, Od : mais à une pareille abſciſſe, dans l'autre Courbe, répondent des ordonnées y $[=xxu]$ infiniment plus petites que l'abſciſſe x. La Courbe produite eſt donc compoſée de quatre Branches paraboliques & de deux Fleurons.

La Courbe a b c d e f g h du *n°.* 2 produit la Courbe ABCDE FGH du *n°.* II. qui, avec un ſeul Fleuron BCD produit par l'arc b c d, a quatre Branches paraboliques, BA, GH, DE, GF produites par les Branches hyperboliques b a, g h, d e, g f. Les deux prémiéres ont pour Aſymptote courbe la Parabole ſemi-cubique $\alpha B\nu$: les deux derniéres la Parabole cubique $\epsilon B\varphi$. *n.* 2. & II.

La Courbe ABCDE FGH du *n°.* III, produite par la Courbe a b c d e f g h du *n°.* 3, a auſſi quatre Branches paraboliques B A, G H, D E, G F produites comme dans les Cas précédens & ayant les mêmes Aſymptotes. A ces Branches ſe joint un Fleuron B C D, produit par l'arc b c d. *n.* 3. & III.

La Courbe A B E F G H [*n°.* IV] produite par la Courbe a b e f g h [*n°.* 4] n'a point de Fleuron, mais ſeulement les quatre Branches paraboliques, qui paſſent toutes quatre par l'Origine, & y touchent l'Axe des abſciſſes. *n.* 4. & IV.

La Courbe A B E F G H du *n°.* V, produite par la Courbe a b c f g h du *n°.* 5, eſt auſſi ſans Fleuron, & a les quatre Branches paraboliques B A, G H, D E, G F : mais il n'y a que la 1^e^. & la 3e. qui paſſent par l'Origine. *n.* 5. & V.

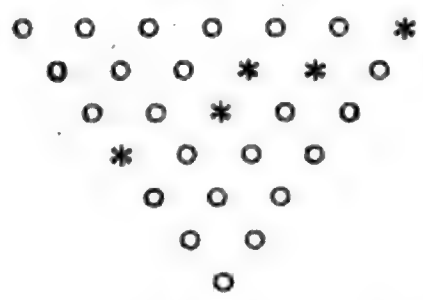
PLANCHE XXVIII. num. 6. & VI.

Il en eſt de même de la Courbe ABE FGH du *n°.* VI, produite par la Courbe a b e f g h du *n°.* 6, ſi ce n'eſt que ce ſont les Branches GF, GH qui paſſent par l'Origine. CH. XIII. §. 221.

Ainſi la Courbe du *n°.* I dégénére en celle du *n°.* III, quand le Fleuron C*C*D diſparoit, & celle-ci, par l'évanouiſſement du Fleuron B C D dévient la Courbe du *n°.* V. De même la Courbe du *n°.* II, ſe change en celle du *n°.* IV, quand le Fleuron B C D ſe réduit à rien, & la Courbe du *n°.* IV ſe transforme en celle du *n°.* VI, quand le Bec A B E ſe retire & s'émouſſe.

Toutes ces Courbes ont à l'Origine un Point triple. Celui du *n°.* I eſt un Embraſſement de trois Branches : celui du *n°.* II un Embraſſement & Oſculation ; celui des *n°.* III & IV un Bec touché par une Branche qui l'embraſſe ou le baiſe : enfin ceux des *n°.* V & VI n'ont qu'une Branche, mais on peut ſuppoſer au *n°.* V les Fleurons du *n°.* I devenus infiniment petits, & au *n°.* VI un Point adhérent.

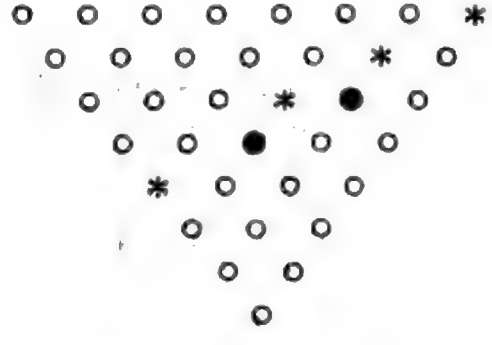
Tout cela ſe lit dans l'éq : $x^3yy = ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6$ miſe ſur le Tr. anal. Elle a deux déterminatrices



ſupérieures, qui donnent les éq : $ay^3 = x^3y^2$ & $x^3y^2 = dx^6$, ou $y = \frac{x^3}{a}$, $y = \pm x\sqrt{dx}$, des Paraboles aſymptotes des Branches infinies. Elle a auſſi une déterminatrice

CH. XIII. §. 221. trice inférieure qui donne l'éq : $ay^3 + bxxyy + cx^4y + dx^6 = 0$, dont les racines ſont réelles ou imaginaires, égales ou inégales, de même ou de différents ſignes, à l'imitation de celles de l'éq : $au^3 + buu + cu + d = 0$, en laquelle elle ſe transforme par la ſubſtitution de xxu à y. PLANCHE XXVIII.

C'eſt donc ici le Cas du n°. IV, 3, 2) ci-deſſus, & pour démêler les différents Points qu'il renferme, il faut chercher le ſecond terme des Séries $y = Bx^2$ &c. dont le prémier terme eſt donné par l'éq : $ay^3 + bx^2yy + cx^4y + dx^6 = 0$. On ſubſtituera donc $Bxx + u$ à y dans la propoſée, & on mettra la transformée ſur le Tr. anal. Le ſeul terme x^3y^2 remplira les Caſes x^3u^2, x^5u & x^7 [§. 105] : mais les termes y^3, x^2yy, x^4y, x^6, qui étoient ſur la déterminatrice, laiſſeront vuides, ou la ſeule Caſe x^6, ou les deux x^6, x^4u, ou les trois x^6, x^4u, x^2u^2 ; ſelon que Bx^2 eſt une racine ſimple, double, ou triple de l'éq : $ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6 = 0$ [§. 107].



Si Bxx eſt une racine ſimple, il ne manque que la Caſe x^6, & la déterminatrice inférieure, paſſant par les Caſes x^4u & x^7, donnera $u = Cx^3$.

Si Bxx eſt une racine double, il manque les Caſes x^6 & x^4u, & la déterminatrice paſſant par les Caſes x^2u^2 & x^7, donnera $u = \pm\sqrt{C}x^3 = \pm x^2\sqrt{C}x$.

Si Bxx eſt une racine triple, il manque les Caſes x^6,

PLANCHE XXVIII. x^4u & x^2u^2 : la déterminatrice paſſe par les Caſes u^3 & x^7, & donne $u = \sqrt[3]{Cx^7} = xx\sqrt[3]{Cx}$. CH. XIII. §. 221.

Donc ſi l'éq : $ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6 = 0$ a trois racines inégales, on a trois Séries $y = Bxx + Cx^3$ &c, $y = B'xx + C'x^3$ &c, $y = B''xx + C''x^3$ &c, qui marquent un Embraſſement de trois Branches [$n°$. I], ſi B, B', B'' ont le même ſigne ; ou un Embraſſement & une Oſculation [$n°$. II], ſi le ſigne d'une de ces trois grandeurs eſt différent de celui des deux autres.

Si l'éq : ay^3 &c $= 0$ a une racine ſimple & une racine double, les Séries ſont $y = Bxx + Cx^3$ &c, $y = B'xx + x^2\sqrt{C'x}$ &c, $y = B'xx - x^2\sqrt{C'x}$ &c. ce qui marque un Rebrouſſement en Bec, embraſſé [$n°$. III] ou baiſé [$n°$. IV] par une autre Branche, ſelon que B & B' ont un même ou un différent ſigne.

Si l'éq : ay^3 &c $= 0$ n'a qu'une racine triple, il n'y a qu'une Série $y = Bxx + xx\sqrt[3]{Cx}$ &c, les deux autres étant imaginaires : ce qui déſigne une Branche réelle avec un Embraſſement imaginaire [$n°$. V].

Enfin, ſi l'éq : $ay^3 + bx^2y^2 + cx^4y + dx^6 = 0$, n'a qu'une racine ſimple, les deux autres étant imaginaires ; on n'a qu'une Série $y = Bxx + Cx^3$ &c. qui marque une ſeule Branche réelle avec un Point adhérent [$n°$. VI].

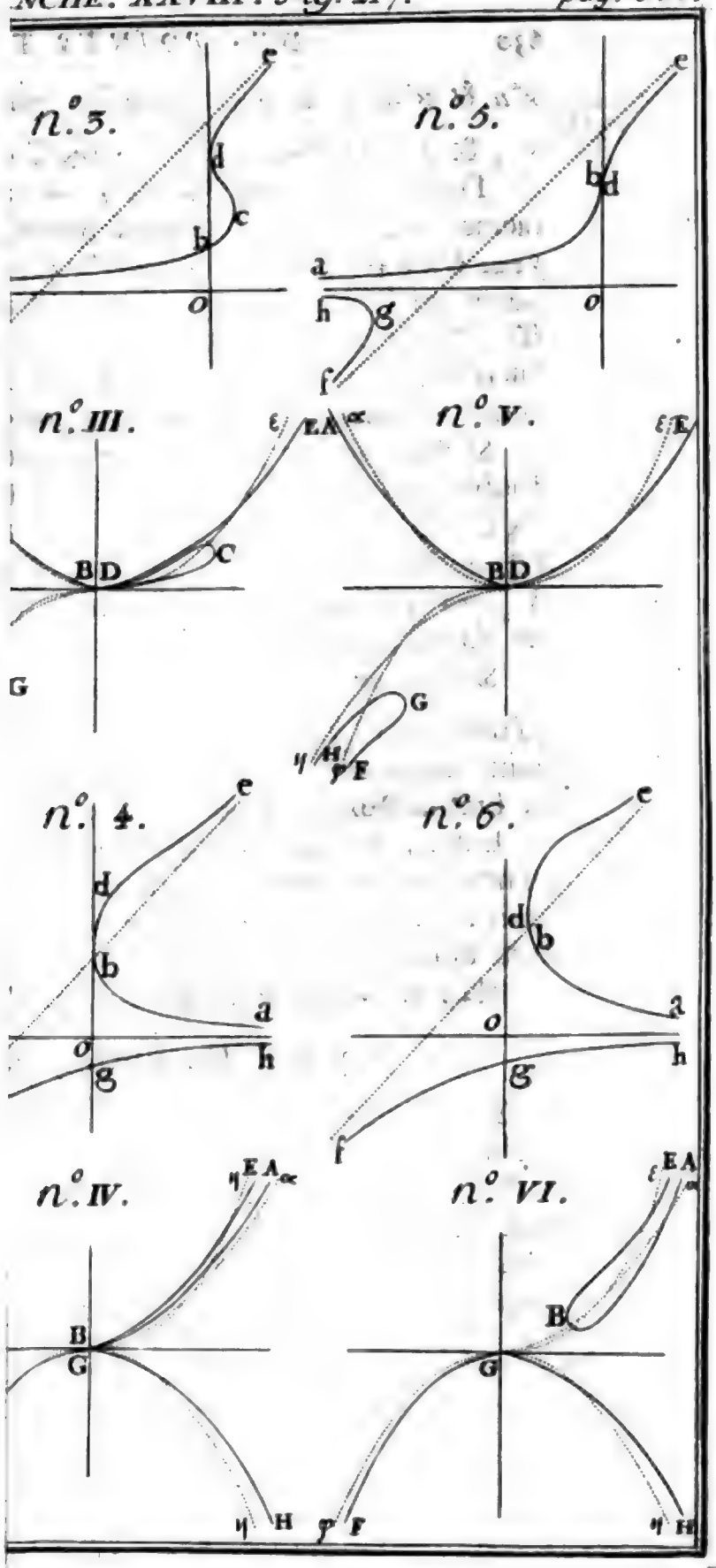
Mais en voilà bien aſſez ſur les Points triples.

§. 222. *Des Points quadruples.*

Si l'Origine eſt priſe ſur un Point quadruple, le Rang le plus bas de l'équation miſe ſur le Triangle analytique, eſt le quatriéme $my^4 + nxy^3 + ox^2y^2 + px^3y + qx^4$. Ce Rang égalé à zéro donne une équation du 4e. dégré, que nous apellerons E, & dont les racines ſont les équations tangentielles du Point quadruple. Leurs varietés préſentent huit Cas.

Cas I.

Digitized by Google



Digitized by Google

Ch. XIII. §. 222. PLANCHE XXVIII.

Cas I. Si l'éq : *E* a ſes *quatre racines réelles & inégales* ; le Point quadruple a quatre Tangentes & quatre Branches qui ſe croiſent à angles finis, & forment un *Point quadruple d'interſection*, un *Triple-Nœud*, ou *Double Point de Croix*. Ce Point peut avoir une, deux, trois, ou quatre Branches avec Inflexion ou Serpentement de tous les dégrés. Mais ſi quelque Branche a une Inflexion du dégré t, la Courbe ſera au moins de l'Ordre $t+5$, parce que la Tangente de la Branche infléchie eſt cenſée la rencontrer en $t+2$ points, & les trois autres Branches en 3 points, ce qui fait $t+5$ points. Ainſi dans le cinquiéme Ordre aucune Branche d'un Triple-Nœud ne peut être infléchie, & dans le ſixiéme Ordre aucune ne peut ſerpenter. Voyez ci-deſſous *Ex. I*, 1.

Au reſte ici, comme dans les Points doubles & triples, on connoitra de quel côté chaque Branche tourne ſa concavité, en cherchant le ſecond terme de la Série qui la repréſente, & dont le prémier eſt donné par une racine de l'éq : *E*.

Cas II. Si des quatre racines de l'éq : *E*, *deux* ſont *imaginaires & deux réelles inégales* ; celles-ci déſignent deux Tangentes & deux Branches qui ſont un *Point de Croix*, & celles-là marquent un *Point inviſible* poſé ſur l'interſection des Branches qui ſe croiſent, & dont aucune ne peut être infléchie dans le cinquiéme Ordre, ni ſerpenter dans le ſixiéme. Voyez *Ex. I.* 2.

Cas III. Mais ſi les *quatre racines* de l'éq : *E* ſont *imaginaires ;* le *Point* quadruple eſt *conjugué*. Voyez *Ex. I.* 3.

Cas IV. Si l'éq : *E* a *une racine double & deux ſimples ;* le Point quadruple eſt formé par le concours d'un *Nœud avec un Point double à directions coïncidentes*, lequel ſera [§. 220, III] ou un Rebrouſſement, ou un Bec, ou un Embraſſement, ou une Oſculation réelle ou imaginaire, ou une Oſculinflexion, ou une Embraſſinflexion, ou &c.

PLANCH. XXIX. &c. Mais, à s'en tenir aux Courbes du cinquiéme & du ſixiéme Ordre ; CH. XIII. §. 222.

1. Si la racine double du 4e. Rang ne diviſe pas le 5e. ce Point double ſera un Rebrouſſement [§. 220, III, 1], qui devient Point quadruple à cauſe des deux Branches qui le traverſent, & deſquelles aucune ne peut être infléchie dans le cinquiéme Ordre. Voyez *Ex. I.* 4.

2. Si cette racine double diviſe le 5e. Rang & non le 6e, le Point quadruple peut être une Oſculation réelle ou imaginaire, un Embraſſement, ou un Bec, traverſé par deux Branches, qui peuvent être infléchies, mais qui ne peuvent ſerpenter, dans le ſixiéme Ordre des Courbes. On déterminera la nature du Point double qui concourt à former le Point quadruple, par les Régles du §. 220, III, 2. Voyez *Ex. II.* 1.

Cas V. Si l'éq : *E* a *une racine double & deux imaginaires ;* celles-ci n'indiquent qu'un *Point adhérent au Point double à directions coïncidentes ;* ce qui en fait un Point quadruple. Voyez *Ex. I.* 5. & *Ex. II.* 2.

Cas VI. Si l'éq : *E* a *deux racines doubles*, le Point quadruple n'a que deux Tangentes, & il eſt formé par le concours de *deux Points doubles dont chacun a ſa direction particuliére.* Sans paſſer le ſixiéme Ordre, on a cinq de ces Points [§. 220. III. 1. 2], qui, combinés deux à deux, font quinze eſpéces de Points quadruples renfermés ſous ce Cas. Voyez *Ex. I.* 6, *Ex. II.* 3, *Ex. V*, & *Ex. VI.*

Cas VII. Si l'éq : *E* a *une racine ſimple & une racine triple ;* ce Point quadruple eſt formé par un *Point triple à directions coïncidentes traverſé par une Branche de direction différente.* La Branche eſt déſignée par la racine ſimple, & le Point triple par la racine triple [§. 221, IV]. En ſe renfermant dans les cinquiéme & ſixiéme Ordres, il peut être,

1. D'une

Digitized by Google

Ch. XIII. §. 222.

1. D'une triplicité invisible, resultante de l'évanouissement de quelque Feuille : ce qui a lieu quand la racine triple du 4e. Rang ne divise pas le 5e. [§. 221. IV. 1]. Voyez ci-dessous *Ex. I.* 7. PLANCHE XXIX.

2. Un Rebroussement touché par une Branche : ce qui arrive quand la racine triple du 4e. Rang divise une fois le 5e, sans diviser le 6e. [§. 221. IV. 2. 1)]. Voyez ci-dessous *Ex. III.* 1.

3. Un Point d'une triplicité invisible, résultante de l'évanouissement d'une Feuille adhérente à une Branche infléchie : c'est le cas où la racine triple du 4e. rang divise plus d'une fois le 5e. sans diviser le 6e. [§. 221. IV. 2. 2)]. Voyez ci-dessous *Ex. III.* 2.

Cas VIII. Enfin, si l'éq : E n'a qu'*une seule racine quadruple* $y - Ax = 0$; le Point quadruple de l'Origine n'a qu'une seule Tangente, dont la situation est donnée par l'éq : $y - Ax = 0$. En substituant dans la proposée $Ax + u$ à y, on aura une transformée, dans le 4e. Rang de laquelle il n'y aura que la Case u^4 qui soit pleine.

1. Si la racine $y - Ax = 0$ du 4e. Rang ne divise pas le 5e. de la proposée, la Case x^5 restera pleine dans la transformée ; & la déterminatrice inférieure donnera $u^4 = Bx^5$, ou $u = \pm\sqrt[4]{Bx^5} = \pm x\sqrt[4]{Bx}$. La Série $y = Ax \pm x\sqrt[4]{Bx}$ &c. indique un Rebroussement ; mais qui est Point quadruple, parce qu'il est censé renfermer quelque Feuille évanouissante. Voyez *Ex. I.* 8.

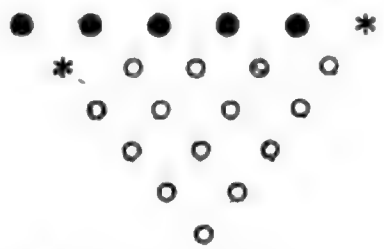
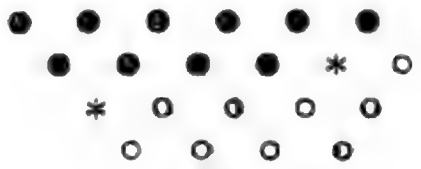


PLANCHE XXIX. Les Courbes du cinquiéme Ordre ſont ſuſceptibles de ce Point ; mais ceux dont on va parler ne peuvent convenir qu'aux Courbes du ſixiéme Ordre, ou des Ordres ſupérieurs. CH. XIII. §. 222.

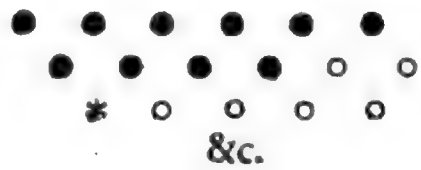
2. Si la racine quadruple du 4e. Rang diviſe une fois le 5e. & non le 6e. il manquera à la transformée la Caſe x^5, mais non les Caſes ux^4 & x^6. Ainſi elle a deux déterminatrices inférieures, qui donnent $u^4 = Bux^4$ & $ux^4 = B'x^6$, ſoit $u = x\sqrt[3]{Bx}$ & $u = B'xx$. Il y a donc



&c.

deux Séries $y = Ax + x\sqrt[3]{Bx}$ &c. $y = Ax + B'x^2$ &c. qui déſignent deux Branches ſans Inflexion, leſquelles s'embraſſent ou ſe baiſent, ſelon que B & B' ont le même ſigne ou des ſignes oppoſés. Le Point de contact de ces deux Branches eſt cenſé quadruple, parce que l'éq : $u^4 = Bux^4$, ou $u^3 = Bx^4$, renferme deux racines imaginaires avec la racine réelle $u = x\sqrt[3]{Bx}$, Voyez *Ex. III.* 3.

3. Si la racine $y - Ax = 0$ diviſe plus d'une fois le 5e. Rang, ſans diviſer le 6e. de la propoſée ; la déterminatrice inférieure de la transformée paſſera par les Caſes u^4, u^2x^3 & x^6, & donnera une équation du ſecond dé-



&c.

gré,

CH. XIII. §. 222. gré, qui a deux racines $u = \pm x\sqrt{Bx}$, $u = \pm x\sqrt{B'x}$. Il y a donc deux doubles Séries $y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c., $y = Ax \pm x\sqrt{B'x}$ &c. Voyez ci-deſſous *Ex. IV.* Mais il faut remarquer, PLANCHE XXIX.

1°. Que ſi B & B' ſont imaginaires ; les deux Séries ſont imaginaires, & l'Origine eſt un Point conjugué, qui ne différe que dans le Calcul de celui qui a été indiqué au n°. III de ce §.

2°. Que ſi B & B' ſont des grandeurs réelles & de différens ſignes, le Point quadruple eſt formé par deux Rebrouſſements oppoſés au ſommet ; ce qui fait, à l'œuil, comme une Oſculation, avec cette différence pourtant, qu'ici les Branches de même courbure ſont de part & d'autre de la Tangente commune, au lieu que dans l'Oſculation elles ſont d'une même part.

3°. Si B & B' ſont des grandeurs réelles, inégales & de même ſigne ; le Point quadruple eſt formé par quatre Branches qui ſont un double Rebrouſſement, c'eſt-à-dire, un Rebrouſſement renfermé dans un autre Rebrouſſement de même ſommet & de même Tangente.

4°. Enfin ſi $B = B'$, la Série $y = Ax \pm x\sqrt{Bx}$ &c. n'eſt pas encore réguliére. Il en faut chercher un nouveau terme, en ſubſtituant dans la transformée $\pm x\sqrt{Bx} + t$ à u. La valeur de t peut être fort diverſe, mais elle ne donnera qu'un double Rebrouſſement, ou un Bec ; ce qui ſera facile à diſtinguer par le troiſiéme terme de la Série, & ſouvent ſans calcul par la Remarque du §. 113.

On ne peut, ſans ſortir du ſixiéme Ordre, au-delà duquel nous ne voulons pas aller, ſuppoſer que la racine quadruple du 4e. Rang diviſe le 6e. parce qu'alors toute l'équation ſeroit diviſible par cette racine. Ainſi venons aux Exemples.

PLANCHE XXIX. CH. XIII. §. 222.

Exemple I. Les Courbes désignées par l'éq: $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$, fournissent des Exemples de tous les Points quadruples dont les Courbes du cinquiéme Ordre sont susceptibles. En supposant $y = xu$, on transforme cette équation en $x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4$, qui représente une Courbe du quatriéme Ordre, laquelle a deux Branches paraboliques, & coupe l'Axe des ordonnées en autant de points qu'a de racines réelles l'équat: $(P) \ldots a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 = 0$. Soit DCQRSEF cette Courbe du quatriéme Ordre décrite sur les Axes AB, AG. Qu'on prenne l'abscisse AB = 1, & qu'on mène l'ordonnée indéfinie CBE. Ensuite, que d'un point quelconque M de la Courbe DQRSF, on tire l'ordonnée MP, & la Droite Mm parallèle à AB & qui coupe en m l'ordonnée CBE. Enfin qu'on mène la Droite Am qui rencontre MP en N, & le Point N sera un Point de la Courbe CNAqArAsAE représentée par l'éq: $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$. Car les Triangles semblables ABm, APN donnent AP[x]: PN[y] = AB[1]: Bm ou PM[u]. Donc $u = \frac{y}{x}$, & cette valeur substituée dans l'éq: $x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4$, la transforme en $x = a + b\frac{y}{x} + c\frac{y^2}{x^2} + d\frac{y^3}{x^3} + e\frac{y^4}{x^4}$, ou $x^5 = ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4$.

Fig. 218. num. 1.

On voit que la Courbe produite CAqArAsAE passe autant de fois par l'Origine que la Courbe productrice DQRSF par l'Axe des ordonnées. Ainsi,

1. L'éq: $(P) \ldots a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 = 0$ ayant quatre racines réelles inégales, l'éq: $(Q) \ldots ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0$ [qui est le 4e. Rang de l'équation proposée égalé à zéro] aura aussi quatre racines inégales:

Ch. XIII. §. 222. gales : car P ſe transforme en Q, quand on fait $u = \frac{y}{x}$. PLANCHE XXIX. Fig. 218. num. 1. Donc, comme les quatre racines de P déſignent les quatre Points G, H, I, K où la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées, de même les quatre racines de Q marquent que quatre Branches de la Courbe produite paſſent par l'Origine A, & y forment un Triple-Nœud [ci-deſſus, *Cas I.*].

num. 2. 2. Si les éq: P & Q ont deux racines réelles inégales & deux imaginaires ; la Courbe productrice ne coupe ſon Axe des ordonnées qu'en deux Points G, K, & la Courbe produite ne paſſe que deux fois par A. Elle y forme un ſimple Nœud, ſur lequel on doit concevoir un Point adhérent, puiſque l'Origine eſt un Point quadruple [ci-deſſus, *Cas II*].

num. 3. 3. Si les éq: P & Q n'ont que des racines imaginaires ; la Courbe productrice ne rencontre point ſon Axe, & la Courbe produite ne paſſe point par l'Origine. L'Origine eſt pourtant un Point de la Courbe, puiſque $x = 0$ & $y = 0$ ſatisfont à ſon équation. Elle eſt même un Point quadruple, puiſque ſon plus bas Rang eſt le quatriéme [§. 170]. C'eſt donc un Point quadruple conjugé [ci-deſſus *Cas III.*]

num. 4. 4. Si les éq : P & Q ont deux racines ſimples & une double ; la Courbe productrice coupe deux fois, & touche une fois ſon Axe, & la Courbe produite paſſe deux Branches CAq, sAE par l'Origine, & elle y a, outre cela, un Point de Rebrouſſement qAs [ci-deſſus *Cas IV*, 1].

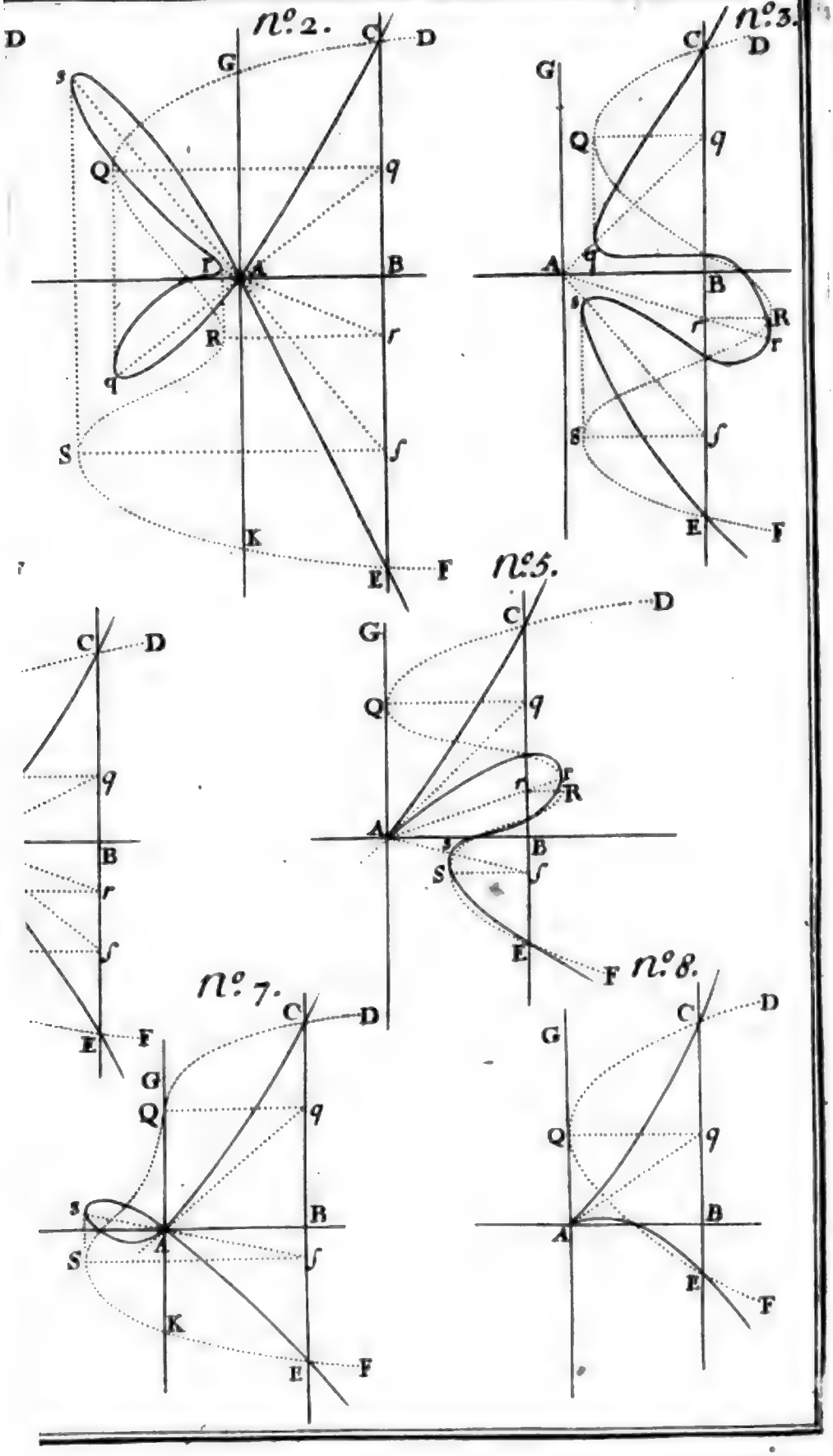
num. 5. 5°. Si les éq : P & Q ont une racine double & deux imaginaires ; la Courbe productrice touche ſon Axe ſans le couper, & la Courbe produite n'a, à l'Origine, qu'un Rebrouſſement CAr, auquel eſt ſuppoſé adhérer un Point, qui le rend Point quadruple [ci-deſſus, *Cas V.*]

PLANCHE XXIX. *Fig.* 218. *num.* 6. 6. Mais ſi les éq: P & Q ont deux racines doubles; la Courbe productrice touche deux fois ſon Axe, & la Courbe produite a, à l'Origine, deux Rebrouſſements CAr, rAE, [ci-deſſus, *Cas VI*]. CH. XIII. §. 212.

num. 7. 7. Si les éq: P & Q ont une racine ſimple & une triple; la Courbe productrice coupe ſon Axe en un Point K, & en un autre Point Q, qui eſt Point d'Inflexion, elle le coupe & touche en même tems. Et la Courbe produite a, à l'Origine, ſur la Branche CAs, un Point triple, dont la triplicité inviſible réſulte de l'évanouiſſement d'une Feuille Aq. [*n°.* 4], lequel Point triple eſt traverſé par une Branche ſimple sAE [ci-deſſus, *Cas VII*, 1].

num. 8. 8. Enfin, ſi les éq: P & Q n'ont qu'une ſeule racine quadruple; la Courbe productrice touche l'Axe des ordonnées en un Point de Serpentement Q [§. 193], & la Courbe produite forme en A un Rebrouſſement, mais qui, étant cenſé renfermer les trois Feuilles Aq, Ar, As, de la Courbe *n°.* 1, eſt un Point quadruple [ci-deſſus *Cas VIII*, 1].

PL. XXX. *Exemple II.* Les Courbes du ſixiéme Ordre repréſentées par l'éq: $x^6 + ax^4y + cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0$, ont, à leur Origine, des Points quadruples, le plus bas Rang de leur équation étant le quatriéme. En faiſant $x = uz$ & $y = uz$, elle ſe transforme en $uu + au + c + dz + ezz = 0$, qui repréſente une Ellipſe quand e eſt négative, & une Hyperbole quand e eſt poſitive [§. 154]. Mais la diverſe poſition de ces Courbes par raport à leurs Axes fait ſeize Cas différents. Car ſuivant que l'éq: $uu + au + c = 0$ a ſes racines imaginaires ou réelles, égales ou inégales, de même ou de différents ſignes, la Courbe peut ou 1°. couper l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine, ou 2°. le couper de même part, ou 3°. le toucher,



Digitized by Google

Digitized by Google

CH. XIII. § 222. cher, ou 4°. ne le point rencontrer. Et ſuivant la nature des racines de l'éq : $c + dz + ezz = 0$, il en eſt de même par raport à l'Axe des abſciſſes. Ces quatre différentes poſitions, par raport à chaque Axe, combinées enſemble, font ſeize Cas repréſentés dans les 16 *nos.* de la *Figure*, où l'on a joint les Courbes du ſixiéme Ordre produites par celles du ſecond. Sans entrer dans un détail, long mais facile, on verra, par un Raiſonnement ſemblable à celui de l'*Ex. IV.* du §. préced., que les Courbes des *nos.* 1 & 5 ont, à l'Origine, une Oſculation traverſée par deux Branches de direction différente : que celles des *nos.* 2 & 6, y ont un Embraſſement auſſi traverſé par deux Branches : celles des *nos.* 3 & 7, un Bec traverſé de même, & celles des *nos.* 4 & 8, un Point traverſé pareillement par deux Branches. Que les Courbes des *nos.* 9, 10, 11, & 12, préſentent un Rebrouſſement combiné avec une Oſculation, un Embraſſement, un Bec, & un Point : & qu'enfin les Courbes des *nos.* 13, 14, 15 & 16, donnent l'Oſculation, l'Embraſſement, le Bec, & le Point, combinés avec un Point, de ſorte que ce dernier eſt un Point quadruple conjugué. PLANCHE XXX. Fig. 219.

C'eſt préciſément ce que donne l'équation miſe ſur le Triang. anal. Son plus bas Rang égalé à zéro donne l'éq:

o o o o o o *
o o o o * o
* * * o o
o o o o
&c.

$cx^2y^2 + dxy^3 + ey^4 = 0$, qui a toujours une racine double $y = 0$, qui diviſe le 5e. Rang ax^4y une fois, & outre cela elle a les deux racines de l'éq : $(P) \ldots cx^2 + dxy + eyy = 0$, analogues à celles de l'éq : $(Q) \ldots c + dz + ezz = 0$.

1. Si

PLANCHE XXX. *Fig.* 219.

1. Si ces deux racines ſont inégales & réelles [comme dans les 8 prémiers n^{os}. de la *Figure*], c'eſt le *Cas IV.* 2, ci-deſſus. Deux Branches de direction différente traverſent une Oſculation, réelle, ou imaginaire, un Embraſſement, ou un Bec. CH. XIII. §. 222.

n. 1. & 5. C'eſt une Oſculation réelle, quand les racines de l'éq: $x^6 + ax^4y + cx^2y^2 = 0$ donnée par la déterminatrice inférieure, ou, ce qui eſt la même choſe, quand les racines de l'éq: $(R)\ldots x^3 + ax^2y + cy^2 = 0$, analogues à celles de l'éq: $(S)\ldots uu + au + c = 0$ ſont réelles & de différents ſignes: ce qui a lieu quand la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine.

n. 2. & 6. C'eſt un Embraſſement, quand les racines des éq: R & S ſont réelles, & de même ſigne, mais inégales: ce qui arrive quand la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées en deux points d'un même côté de l'Origine.

n. 3. & 7 C'eſt un Bec, quand les racines de R & S ſont égales, c'eſt-à-dire quand la Courbe productrice touche l'Axe des ordonnées.

n. 4. & 8. C'eſt une Oſculation imaginaire, quand les racines de R & S ſont imaginaires: ce qui a lieu quand la Courbe productrice ne rencontre point l'Axe des ordonnées.

n. 13, 14, 15 & 16. 2. Si les racines des éq: P & Q ſont imaginaires, la Courbe productrice ne rencontre point l'Axe des abſciſſes, & on eſt dans le *Cas V*, ci-deſſus. Un Point inviſible adhére à une Oſculation réelle [*n*°. 13], ou à un Embraſſement [*n*°. 14], ou à un Bec [*n*°. 15], ou à une Oſculation imaginaire [*n*°. 16], ſuivant que les racines des éq: R & S ſont réelles de différents ſignes, ou réelles de même ſigne mais inégales, ou égales, ou imaginaires, c'eſt-à-dire ſelon que la Courbe productrice, ou coupe l'Axe des ordonnées de part & d'autre de l'Origine [*n*°. 13], ou

CH. XIII. §. 222. ou le coupe d'une même part [n°. 14], ou le touche [n°. 15], ou ne le rencontre point [n°. 16]. PLANCHE XXX. Fig. 219.

3. Enfin, ſi les racines de P ou de Q ſont égales, la Courbe productrice touche l'Axe des abſciſſes, & on a une partie des Points mentionnés au *Cas VI*, ci-deſſus. n. 9. 10. 11. & 12. L'équation du plus bas Rang a deux racines doubles $y=0$ & $y\sqrt{e}+x\sqrt{c}=0$. La prémiére diviſe le 5e. Rang ; la ſeconde ne le diviſe pas. Ainſi celle-ci déſigne un Rebrouſſement [ci-deſſus *Cas IV.* 1]. L'autre [*Cas IV.* 2] marque une Oſculation [n°. 9], ou un Embraſſement [n°. 10], ou un Bec [n° 11], ou une Oſculation imaginaire [n°. 12], ſelon que les racines de R & S ſont ou de différents ſignes, ou de même ſigne, égales, ou imaginaires ; c'eſt-à-dire, ſelon que la Courbe productrice coupe de part & d'autre [n°. 9], ou de même part [n°. 10], ou touche [n°. 11], ou ne rencontre pas [n°. 12] l'Axe des ordonnées.

Exemple III. Joignons à ces Courbes celles que donnent les mêmes Courbes productrices, quand l'Origine eſt priſe ſur un de leurs points. Cela fait trois Cas principaux. 1°. Ou la Courbe coupe ſes deux Axes, [n°s. 1, 2, 3], 2°. ou elle touche l'Axe des ordonnées [n°s. 4, 5], 3°. ou elle touche l'Axe des abſciſſes [n°s. 6, 7]. Dans le prémier Cas, il manque à l'éq : $uu+au+c+dz+ezz=0$ de l'Exemple préced. le terme c ; dans le ſecond Cas, il manque les termes c & au ; & dans le troiſiéme, les termes c & dz. Ainſi la Courbe produite ſera repréſentée, dans le prémier Cas, par l'éq : $x^6+ax^4y+dxy^3+ey^4=0$, dans le ſecond par $x^6+dxy^3+ey^4=0$, & dans le troiſiéme par $x^6+ax^4y+ey^4=0$. PLANCHE XXXI. Fig. 220.

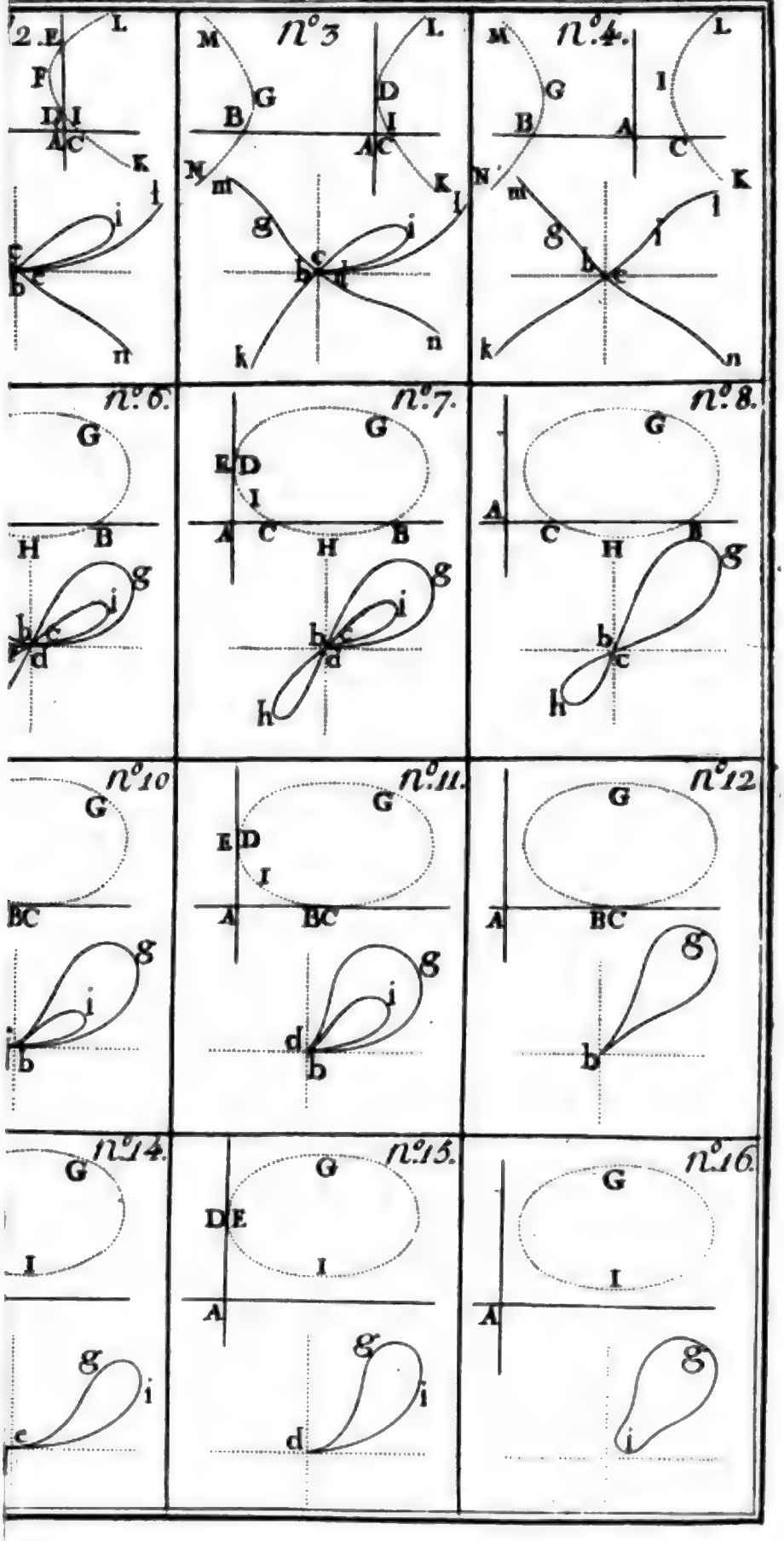
1. La prémiére de ces trois équations appartient au *Cas VII.* 2, ci-deſſus. Le 4e. & plus bas Rang dxy^3+ey^4 égalé à zéro, a une racine ſimple $dx+ey=0$, qui ne n. 1. 2. 3.

PLANCHE XXXI. divise pas le 5e. Rang ax^4y, & une racine triple $y=0$, qui divise une fois le 5e. Rang & ne divise pas le 6e. x^6. Donc le Point de l'Origine est un Rebroussement touché par une Branche [c'est ce que désigne la racine triple] & traversé par une autre Branche [qu'indique la racine simple]. CH. XIII. §. 212.

num. 4. 5. 2. La seconde équation apartient aussi au *Cas VII*, 3, cy-dessus. La racine simple $dx+ey=0$, & la racine triple $y=0$, du 4e. Rang sont censées diviser, tant de fois qu'on voudra, le 5e. Rang qui manque, & ni l'une ni l'autre ne divise le 6e. x^6. Il y aura donc, à l'Origine, deux Branches infléchies, dont celle qui touche l'Axe des abscisses, désignée par la racine $y=0$, a un Point triple formé par l'évanouissement d'une Feuille. En effet, les Courbes nos. 7, 3 de la *Fig.* 219, dégénérent en celles des nos. 4, 5 de cette *Fig.* 220. par l'évanouissement des Feuilles cid, qui disparoissent avec les grandeurs a & c.

num. 6. 7. 3. Mais la troisiéme équation apartient au *Cas VIII*. 2, ci-dessus. Le 4e. Rang ey^4 égalé à zéro, n'a qu'une racine quadruple $y=0$, qui divise une fois le 5e. Rang ax^4y & non le sixiéme x^6. Donc l'Origine est un Embrassement [n°. 6] ou une Osculation [n°. 7].

L'Exemple IV sera pris de l'éq: $x^6+x^5y-2bx^3y^2+acy^4=0$. On peut construire les Courbes qu'elle représente, en la réduisant à $auu+auz-2buz+czz=0$, par la substitution de $\frac{uz}{a}$ à x, & de $\frac{uzz}{aa}$ à y. Cette équation-ci représente une Courbe du troisiéme Ordre, qui a [§. 142] deux Branches paraboliques, dont l'Asymptote a pour éq: $uu+cz=0$, & deux Branches hyperboliques [§. 139], dont l'Asymptote droite est l'ordonnée de l'abscisse $-a$, & l'Asymptote courbe l'Hyperbole désignée par l'éq: $u(z+a)+2ab=0$. Cette même Courbe



Digitized by Google

CH. XIII. §. 221. be a, à ſon Origine, un Point double, ſuivant la nature duquel ſa forme varie conſidérablement. Le plus bas Rang, qui eſt le ſecond, égalé à zéro, donne $aun - 2buz + czz = 0$, équation du ſecond dégré, qui a deux racines imaginaires ſi $bb < ac$, deux racines égales ſi $bb = ac$, & deux racines inégales ſi $bb > ac$, de même ou de différents ſignes ſelon que a & c ſont de même ou de différents ſignes. PLANCHE XXXI.

Dans le 1r. Cas, l'Origine eſt un Point conjugué [§. 220. I], & la Courbe eſt compoſée de deux parties ſéparées CHI, DEFG, avec un Point iſolé A. Fig. 221. num. 1.

Dans le 2d. Cas, l'Origine eſt un Rebrouſſement [§. 220. III. 1], & la partie DE va juſqu'à l'Origine en A, d'où elle rebrouſſe en FG. num. 2.

Dans le 3e. Cas, l'Origine eſt un Nœud [§. 220. II], que fait la partie DAE AFG, en donnant une Feuille AE. num. 3.

Et dans le 4e. Cas, l'Origine eſt l'interſection des Branches CAI, DEAG, qui ſe croiſent en A [§. 220. II]. num. 4.

Maintenant, ſi l'on cherche quelles Courbes ſont produites par celles-là, en donnant à chaque abſciſſe $x[= \frac{uz}{a}]$ une ordonnée $y[= \frac{uzz}{aa}]$, & dont par conſéquent l'équation eſt $x^6 + x^5y - 2bx^3y^2 + acy^4 = 0$, on verra par le même raiſonnement qui a été fait au §. préc. *Ex. IV.* que l'Aſymptote ordonnée CD des Courbes productrices devient dans les Courbes produites une Aſymptote oblique cd, qui coupe en deux également les Angles des coordonnées de différents ſignes : que les Branches hyperboliques ED, CH produiſent les Branches hyperboliques ed, ch; & les Branches paraboliques FG, HI, les paraboliques fg, hi. Et quant à l'Origine, on verra que celle

PLANCHE XXXI. du $n°.$ 1 eſt un Point conjugué, celle du $n°.$ 2 un Bec, celle du $n°.$ 3 un double Rebrouſſement, & celle du $n°.$ 4 deux Rebrouſſements oppoſés. Or c'eſt préciſément ce qu'on tire de la Régle du *Cas VIII*, 3, ci-deſſus. CH. XIII. §. 222.

Car c'eſt à ce Cas que ſe raporte l'éq : $x^6 + x^5y - 2bx^3y^2 + acy^4 = 0$, puiſque ſon plus bas Rang acy^4 égalé à zéro n'a qu'une racine $y = 0$, mais quadruple, qui diviſe deux fois le $5^e.$ Rang $-2bx^3y^2$, ſans diviſer le $6^e.$ $x^6 + x^5y$. La déterminatrice donne l'éq: $acy^4 - 2bx^3y^2 + x^6 = 0$, qui a deux racines $yy = \frac{b+\sqrt{(bb-ac)}}{ac}x^3$ & $yy = \frac{b-\sqrt{(bb-ac)}}{ac}x^3$.

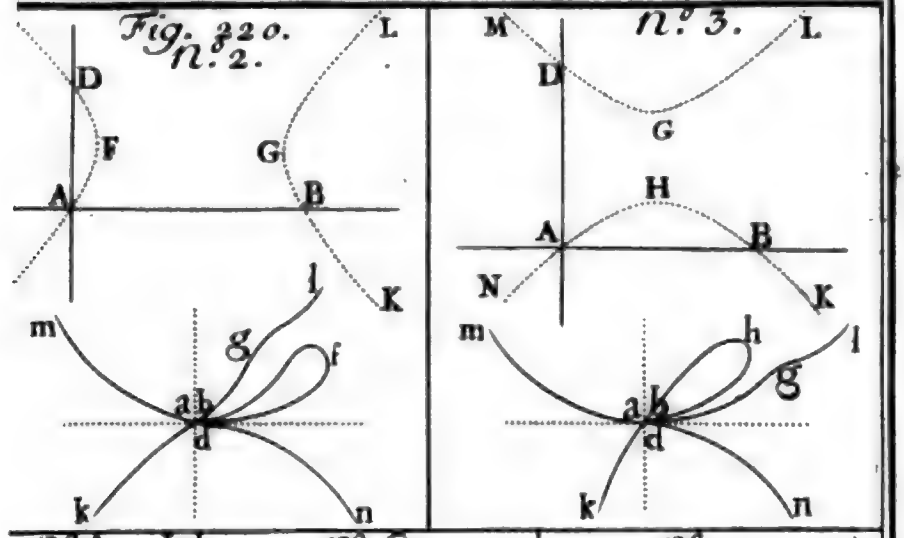
o o o o o * *
o o o * o o
* o o o o
o o o o
&c.

Fig. 221. *num.* 1. Ces racines ſont imaginaires, ſi $bb < ac$, & l'Origine eſt un Point conjugué [*Cas VIII.* 3, 1° ci-deſſus].

num. 2. Elles ſont égales, ſi $bb = ac$, & l'Origine [*Cas VIII.* 3. 4°] eſt ou un Bec ou un double Rebrouſſement. On voit que c'eſt un Bec, parce qu'entre la déterminatrice qui paſſe par les termes du prémier ordre y^4, x^3y^2, x^6, & ſa parallèle menée par le terme unique du ſecond ordre x^5y, il n'y a qu'un intervalle, & que ce terme x^5y n'eſt diviſible par aucune des deux racines $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}}$ de l'équation de la déterminatrice, [§. 113].

num. 3. Les racines $yy = \frac{b\pm\sqrt{(bb-ac)}}{ac}x^3$ de la déterminatrice ſont réelles, inégales & de même ſigne, lorſque $bb > ac$,

Fig. 220.



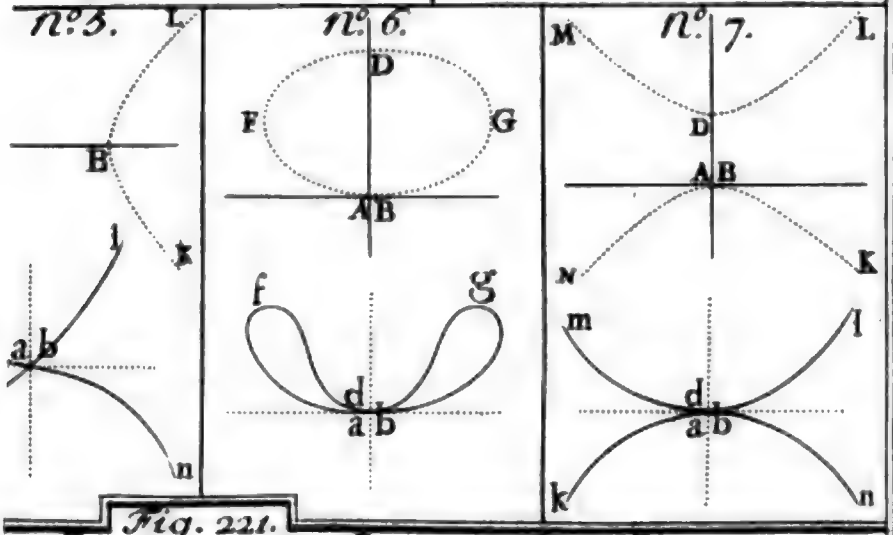
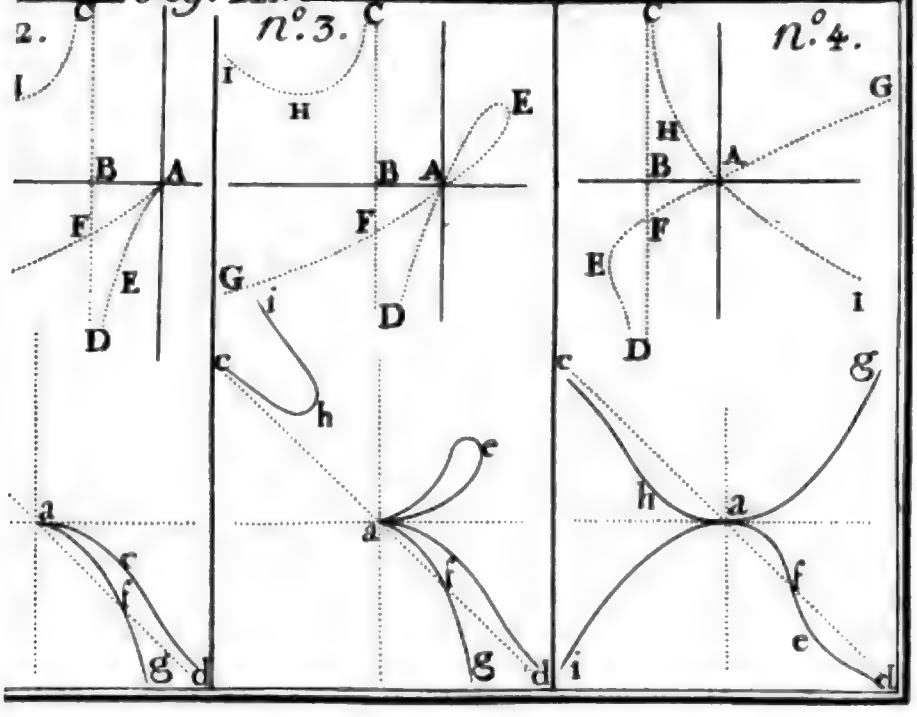


Fig. 221.

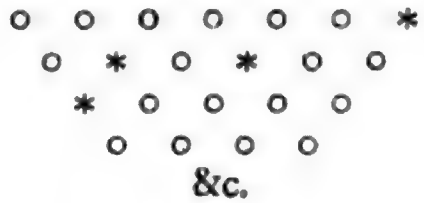


Digitized by Google

CH. XIII. §. 222. $bb > ac$, & que a & c ont le même ſigne. Alors l'Origine eſt un double-Rebrouſſement [*Cas VIII*, 3, 3°. ci-deſſus]. PLANCHE XXXI. *Fig.* 221.

Enfin ces racines ſont réelles, inégales, & de différents ſignes, quand a & c ont des ſignes différents. Alors l'Origine eſt un Point quadruple formé par deux Rebrouſſements oppoſés au ſommet [*Cas VIII*, 3, 2°, ci-deſſus]. *num.* 4.

Si dans la même équation, lorſque $ac = bb$, il y avoit eu un nombre pair d'intervalles entre la déterminatrice & ſa parallèle menée par les termes du ſecond ordre, la Courbe au lieu d'avoir un Bec à l'Origine, y auroit eu un double-Rebrouſſement [*Cas VIII*, 3, 4°. ci-deſſus]. Si, par ex. au lieu du terme x^5y, on avoit eu $-axy^4$ PLANCHE XXXIII. *Fig.* 222.



&c.

[$+axy^4$ donneroit une Courbe imaginaire], la Série auroit été $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b}} \pm \frac{xx}{2b}\sqrt{\frac{a}{b}}$ &c, où le double ſigne des deux prémiers termes marque quatre Branches qui font un double-Rebrouſſement à l'Origine. On le voit encore en réduiſant l'éq : $x^6 - axy^4 - 2bx^3y^2 + bby^4 = 0$ à cette forme $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b \pm \sqrt{ax}}}$, qui fait voir que la Courbe a quatre Branches, deux paraboliques AE, AF & deux hyperboliques AC, AD. Les prémiéres, indiquées par les racines $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b + \sqrt{ax}}}$, ont pour Aſymptote la Parabole déſignée par l'éq : $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{\sqrt{ax}}}$;

PLANCHE XXXIII. ou $ay^4 = x^5$. Les dernières, indiquées par les racines $y = \pm x\sqrt{\frac{x}{b - \sqrt{ax}}}$, ont pour Asymptote droite l'ordonnée CBD de l'abscisse $AB = \frac{bb}{a}$. CH. XIII. §. 211.

PLANCHE XXXII. Fig. 223. *Exemple V.* Les mêmes Courbes du troisiéme Ordre qui ont servi à construire celles du sixiéme dans *l'Ex. préc.* en donneront d'autres, si on porte l'Origine sur un autre point de l'Axe des abscisses, comme à l'extrémité de l'abscisse $AO = d$. Cette transposition s'exécute en substituant $t + d$ à z dans l'éq: $auu + uuz - 2buz + czz = o$ de cette Courbe. La transformée [en faisant, pour abréger, $a + d = f$] sera $fuu + uut - 2but - 2bdu + ctt + 2cdt + cdd = o$. Ce qu'il importe de considérer ici, ce sont les Points où ces Courbes rencontrent l'Axe des ordonnées. On les détermine par l'éq: $(P) \ldots fuu - 2bdu + cdd = o$, à laquelle se réduit l'équation de la Courbe, quand on fait $t = o$. Cette équation, quand f & c nn. 1. 5. 9. 13. ont différents signes, a deux racines réelles de différents signes, &, dans ce Cas, les Courbes coupent l'Axe des ordonnées en deux Points M, N, situés de part & d'autre de l'Origine. Mais quand, f & c ayant le même signe, $fc < bb$, nn. 2. 6. 10. 14. l'équation P a deux racines réelles, inégales, de même signe, & les Courbes coupent l'Axe des ordonnées en deux Points M, N, placés d'un même côté de l'Origine. Elles nn. 3. 7. 11. 15. touchent leur Axe des ordonnées en un seul Point E, lorsque l'éq: P n'a qu'une racine double, ce qui a lieu quand nn. 4. 8. 12. 16. $fc = bb$. Et elles ne rencontrent point leur Axe des ordonnées quand $fc > bb$, parce qu'alors les racines de l'éq: P sont imaginaires.

Chaque Courbe donnant ainsi quatre Cas différents, les quatre Courbes en donneront seize, représentés dans les seize n^{os}. de la *Fig.* 223, avec les Courbes du sixiéme Ordre,

Digitized by Google

CH. XII. §. 221. dre, qui ſe conſtruiſent par celles du troiſiéme, en donnant à l'abſciſſe $x \left[= \frac{ut}{f} \right]$ l'ordonnée $y \left[= \frac{utt}{ff} = \frac{xt}{f} \right]$. Leur équation eſt donc $fx^6 + fx^5y - 2fbx^3y^2 - 2bdx^4y + ffcy^4 + 2fcdxy^3 + cddx^2y^2 = 0$, qui nait de la ſubſtitution de $\frac{fy}{x}$ à t, & de $\frac{xx}{y} \left[= \frac{fx}{t} \right]$ à u dans l'éq : $fuu + uut - 2but - 2bdu + ctt + 2cdt + cdd = 0$. Ces Courbes ont les mêmes Branches infinies & les mêmes Aſymptotes que celles de l'*Ex. précéd.* Mais on trouvera, comme dans l'*Ex. IV.* du §. précéd. qu'à l'Origine les Courbes des *n°.* 1, 2, 3, 4, ont une Oſculation imaginaire; celles des *n°.* 5, 6, 7, 8, une Oſculation réelle; celles des *n°.* 9, 10, 11, 12, un Embraſſement; & celles des *n°.* 13, 14, 15, 16, un Bec; combinés avec une Oſculation réelle dans les *n°.* 1, 5, 9, 13, avec un Embraſſement dans les *n°.* 2, 6, 10, 14, avec un Bec dans les *n°.* 3, 7, 11, 15, & avec une Oſculation imaginaire dans les *n°.* 4, 8, 12, 16. Et ce ſont là tous les Points quadruples indiqués dans ce §. *Cas VI*: ſi ce n'eſt que les deux Becs, combinés au *n°.* 15, n'en font qu'un ſeul, parce qu'ils tombent préciſément l'un ſur l'autre.

PLANCHE XXXII. Fig. 223.

Cela eſt exactement conforme aux Règles. Si l'on met ſur le Triang: anal: l'éq: $fx^6 + fx^5y - 2fbx^3yy - 2bdx^4y + ffcy^4 + 2fcdxy^3 + cddxxyy = 0$ ſon plus bas

o o o o o * *
o o o * * o
* * * o o
o o o o

&c.

Rang donnera l'éq: $ffcy^4 - 2fcdxy^3 + cddxxyy = 0$, qui a deux racines doubles $y = 0$ & $fy + dx = 0$, qui indiquent deux Tangentes.

La

PLANCHE XXXII. La prémiére eſt l'Axe même des abſciſſes, & le prémier terme de la Série rélative aux Branches qu'il touche ſe tire de l'éq: $fx^6 - 2bdx^4y + cddxxyy = 0$, ou $(Q)\ldots fx^4 - 2bdxxy + cddyy = 0$, que donne la déterminatrice; & dont les racines ſont analogues à celles de l'éq: $(P)\ldots fuu - 2bdu + cdd = 0$ mentionée ci-deſſus. CH. XIII. §. 222.

Si les racines de ces éq: P & Q ſont réelles & de différents ſignes, le Point touché par l'Axe des abſciſſes eſt une Oſculation réelle [n°s. 1, 5, 9, 13]: ſi elles ſont réelles, inégales, & de différents ſignes c'eſt un Embraſſement [n°s. 2, 6, 10, 14]: ſi elles ſont égales, c'eſt un Bec [n°s. 3, 7, 11, 15], parce qu'il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & ſa prémiére paralléle, & que la racine double [$bxx - cdy = 0$] de l'éq: Q, qui dans ce Cas devient $bbx^4 - 2bcdx^2y + ccddyy = 0$, ne diviſe pas la ſomme $fx^5y - 2fbx^3y^2 + 2fcdxy^3$ des terme du ſecond ordre [§. 213]: enfin, ſi les racines des éq: P & Q ſont imaginaires, les Branches que l'Axe des abſciſſes devroit toucher ſont imaginaires, & ſont une Oſculation imaginaire [n°s. 4, 8, 12 & 16].

L'autre racine $fy + dx = 0$, ou $y = -\frac{dx}{f}$ ne donne que la poſition de la Tangente oblique. Pour connoitre la nature du Point qu'elle touche, on cherchera le ſecond terme de la Série, en ſubſtituant dans l'équation propoſée $-\frac{dx}{f} + u$ à y. La transformée $(f-d)x^6 + fx^5u + 2bdx^4u - 2fbx^3uu + ffu^4 - 2fcdxu^3 + cddx^2u^2 = 0$, étant miſe ſur le Triangle analytique la déter-

o o o o o * *
o o o * * o
* * * o o
o o o o
&c.

minatrice

CH. XIII. §. 222. minatrice donne l'éq: $(f \text{ —— } d)\, x^6 + 2bdx^4u + cddx^2u^2 = 0$, ou [puiſque $f - d = a$] $ax^4 + 2bdx^3u + cdduu = 0$, qui a deux racines $u = \frac{-b+\sqrt{(bb-ac)}}{cd}xx$ & $u = \frac{-b-\sqrt{(bb-ac)}}{cd}xx$. PLANCHE XXX. Fig. 223.

Si elles ſont imaginaires, ce qui a lieu quand $bb < ac$; la Courbe eſt une de celles des n°. 1, 2, 3, 4, où les Branches que devroit toucher la Tangente oblique ſont imaginaires.

Si elles ſont réelles & de différentes ſignes, ce qui a lieu quand a & c ont différents ſignes; le Point touché par la Tangente oblique eſt une Oſculation, comme aux n°. 5, 6, 7, 8.

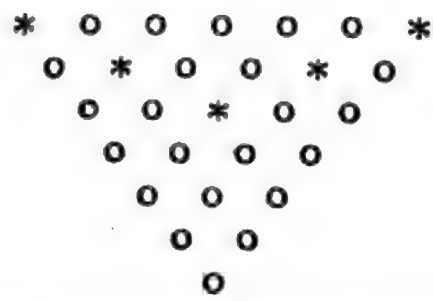
Si elles ſont réelles, inégales, & de même ſigne, ce qui a lieu quand $bb > ac$, a & c ayant le même ſigne; le Point que touche la Tangente oblique eſt un Embraſſement, n°. 9, 10, 11, 12.

Si elles ſont égales, ce qui a lieu quand $bb = ac$; la Tangente oblique touche un Bec, n°. 13, 14, 15, 16: car il n'y a qu'un intervalle entre la déterminatrice & ſa prémiére paralléle, & la racine double $u + \frac{bxx}{cd} = 0$ des termes du prémier ordre ne diviſe pas la ſomme $fx^3u - 2fbx^2uu - 2fcdxu^3$ des termes du ſecond ordre.

Mais on remarquera que dans le n°. 15, la Tangente oblique ceſſe de l'être. Car, dans ce Cas, $fc = bb$ & $bb = ac$. Donc $fc = ac$, $f = a$, & d [$= f - a$] $= 0$. L'éq: $fy + dx = 0$, qui détermine la poſition de la Tangente oblique, ſe réduit donc à $fy = 0$, ou $y = 0$, qui montre que cette Tangente ſe confond avec l'Axe des abſciſſes.

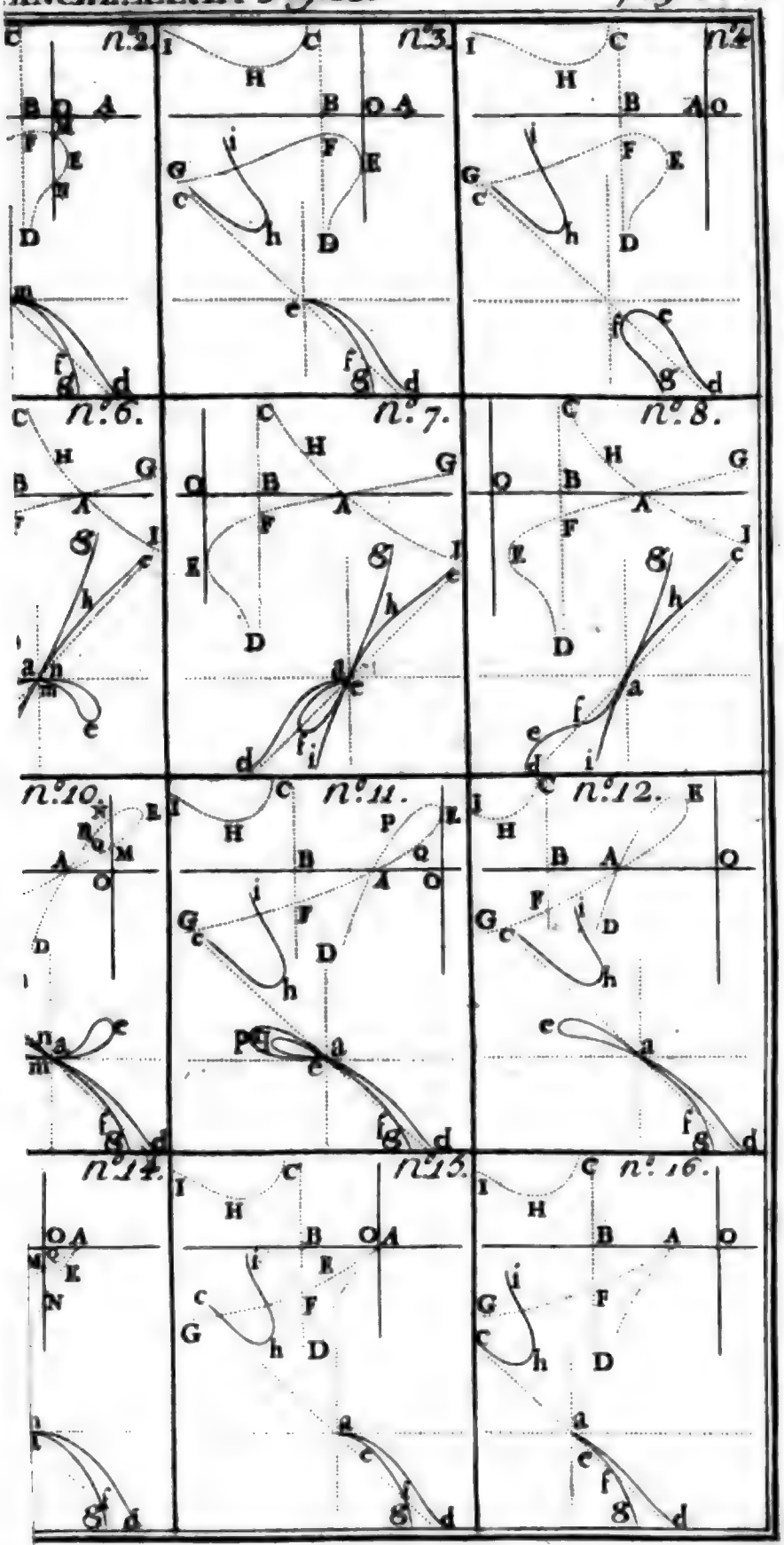
Exemple VI. Ainſi pour avoir des Exemples de tous les Points quadruples qui ſe raportent au *VI Cas* ci-deſſus,

PLANCHE XXXIII. deſſus, il n'en faut plus qu'un, ſav. du Point où ſe combinent deux Becs ſous des directions différentes. L'éq: $aax^6 - 2aabx^4y + aabbxxyy - 2abbxy^4 + bby^6 = 0$ nous le fournira. Quand on la met ſur le Tr: anal: l'équation de ſon plus bas Rang, $aabbxxyy = 0$, montre par ſes deux racines doubles $x = 0$, $y = 0$, que la CH XIII. §. 222.



Courbe touche à l'Origine ſes deux Axes. La déterminatrice rélative aux Branches touchées par l'Axe des abſciſſes, donne l'éq: $aabbxxyy - 2aabx^4y + aax^6 = 0$, qui a une ſeule racine, mais double, $by - xx = 0$. Le Point eſt donc un Embraſſement, ou un Bec [§. 220], & on conclura que c'eſt un Bec, parce qu'il y a trois intervalles entre la déterminatrice & ſa paralléle menée par le terme $-2abbxy^4$ du ſecond ordre, lequel n'eſt pas diviſible par la racine $by - xx = 0$ [§. 113 & 220.]. Un raiſonnement pareil fera conclurre que l'Axe des ordonnées touche auſſi un Bec. Ainſi l'Origine eſt un Point quadruple formé par le concours de deux Becs ſous deux directions différentes.

On le vérifie par la conſtruction qu'on peut faire de cette Courbe, en mettant dans ſon équation $\frac{zy}{a}$ pour x. Cette ſubſtitution la transforme en $z^6yy - 2aabz^4y + a^4bbzz - 2a^4bbzy + a^4bbyy = 0$, qui exprime une Courbe du huitiéme Ordre, mais facile à conſtruire, puiſque dans ſon équation y ne monte qu'au ſecond dégré. Les raci-


n.2.
n.3.
n.4.
n.6.
n.7.
n.8.
n.10.
n.11.
n.12.
n.14.
n.15.
n.16.

Digitized by Google

Ch. XIII. §. 228. racines $y = \frac{a^4bbz \pm a^3bzz\sqrt{2bz + aabz^4}}{a^4bb + z^6}$, & mieux encore les Séries deſcendantes $y = \frac{aab}{zz} \pm \frac{a^3b}{z^3}\sqrt{\frac{2b}{z} + \frac{a^4bb}{z^5}}$ &c. qui donnent la valeur d'y en z, font voir que cette Courbe n'a que deux Branches hyperboliques AGE, AFD, qui partant de l'Origine A, où elles forment un Rebrouſſement, s'étendent le long de l'Axe des abſciſſes AB, qui eſt leur Aſymptote droite, ayant pour Aſymptote courbe une Branche de l'Hyperbole $y = \frac{aab}{zz}$ [§. 138]. Au moyen de cette Courbe on conſtruit la propoſée, en prenant l'ordonnée AC $= -a$, & menant l'abſciſſe indefinie CQ. Car ſi par un Point quelconque M de la Courbe AMEDNA, on mene une ordonnée MP prolongée juſqu'en Q où elle rencontre l'abſciſſe CQ, & qu'on tire par les Points Q & A la droite QAM prolongée juſqu'en m où elle rencontre l'abſciſſe prolongée Mμm du Point M, on aura un Point m de la Courbe cherchée. Les triangles ſemblables QPA, Aμm donnant Aμ ou PM [y]: μm [x] = QP ou AC [a]: AP [z], on aura $z = \frac{ax}{y}$, & cette valeur, ſubſtituée dans l'éq: $z^6yy - 2aabz^4y + a^4bbzz - 2a^4bbzy + a^4bbyy = 0$ de AGEDFA, la transforme en $aax^6 - 2aabx^4y + aabbxxyy - 2abbxy^4 + bby^6 = 0$, équation de AgAfA. Pl. XXXIII. Fig. 224.

Cette conſtruction fait voir aſſez clairement que la Courbe AgAfA a deux Becs à ſon Origine. Car ſi on ſuppoſe les Points H & I infiniment proches de A, c'eſt-à-dire HK infiniment proche de AC; AL eſt infiniment plus petite que KL: donc auſſi hη eſt infiniment plus petite que Aη, & iι infiniment plus petite que Aι. Ainſi les deux Branches Ah, Ai touchent l'Axe des ordonnées & forment un Bec hAi.

PLANCHE XXXIII. Et ſi on ſuppoſe les Points M, N infiniment éloignés de A, c'eſt-à-dire MQ infiniment éloignée de AC, PQ ſera infiniment plus petite que AP: donc Aμ ſera infiniment plus petite que mμ, & Aν infiniment plus petite que nν. Ainſi les Branches Am, An touchent l'Axe des abſciſſes, & forment un ſecond Bec mAn. CH XIII. §. 222.

223. C'EST par les mêmes Principes qu'on pourroit détailler les diverſes eſpèces de *Points quintuples*. En ſe renfermant dans les Courbes du ſixiéme Ordre, qui ſont les plus ſimples qui puiſſent avoir un Point quintuple, on en trouvera onze eſpèces, dont les Courbes définies par l'éq: $x^6 = ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5$ fourniſſent des Exemples. Ces Courbes ſe peuvent conſtruire comme celles du §. préc. *Ex. I.* En ſubſtituant xu à y, leur éq: ſe transforme en $x = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5$, qui exprime une Courbe du cinquiéme Ordre, à deux Branches paraboliques, dont l'Aſymptote eſt déſignée par l'éq: $x = fu^5$, & dont par conſéquent l'une va du côté des abſciſſes poſitives, & l'autre du côté des négatives. Cette Courbe rencontre ſon Axe des ordonnées en autant de points que l'éq: $(P) \ldots a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 = 0$, ou l'équation analogue $(Q) \ldots ax^5 + bx^4y + cx^3y^2 + dx^2y^3 + exy^4 + fy^5 = 0$, a de racines réelles. Appliquant donc ici les conſidérations faites au §. préc. *Ex. I.* ſur un Exemple tout ſemblable, on diſtinguera onze Cas. Fig. 225. num. 1.

1. Celui où les éq: P & Q ont cinq racines réelles. Alors la Courbe productrice CQRSTD coupe l'Axe des ordonnées en cinq points G, H, I, K, L; & la Courbe produite CAqArAſAtAd paſſe cinq fois par l'Origine, ſous cinq directions différentes, faiſant un *Quadruple Nœud*, & quatre Feuilles Aq, Ar, Aſ, At. num. 2.

2. Celui où les équ: P & Q ont trois racines réelles & deux imaginaires. Ici la Courbe productrice ne coupe l'Axe

Ch. XIII. §. 222. l'Axe des ordonnées qu'en trois points G, H, L; & la Courbe produite ne paſſe que trois fois par l'Origine, ſous trois directions différentes, faiſant un Double-Nœud & deux Feuilles Aq, Arſt A. Cependant le Point A eſt quadruple, parce que ſur le *Double-Nœud*, on doit concevoir un *Point double inviſible*, indiqué par les racines imaginaires de l'éq: Q PLANCHE XXXIII. fig. 225.

3. Dans le Cas où les éq: P & Q ont une ſeule racine réelle & quatre imaginaires, la Courbe productrice ne coupe qu'en un ſeul Point I l'Axe des ordonnées, & la Courbe produite ne paſſe qu'une fois par l'Origine A. Mais on doit concevoir ſur cette Branche un *Point quadruple inviſible*, indiqué par les quatre racines imaginaires de l'éq: Q. num. 3.

4. Si les éq: P & Q, ont une racine double & trois ſimples réelles; la Courbe productrice touche ſon Axe une fois en R, & le coupe trois fois en G, K, L, & la Courbe produite fait à l'Origine un *Triple-Nœud avec un Rebrouſſement*. num. 4.

5. Si les éq: P & Q ont une racine double & une ſimple, réelles, & deux imaginaires; la Courbe productrice touche ſon Axe en Q & le coupe en I. La Courbe produite a à l'Origine *un Rebrouſſement traverſé d'une Branche de direction différente*, *avec un Point double inviſible*, indiqué par les deux racines imaginaires de l'éq: Q. num. 5.

6. Si les éq: P & Q ont deux racines doubles & une ſimple; la Courbe productrice touche ſon Axe deux fois en Q & S, & le coupe une fois en L. Et la Courbe produite a à l'Origine *deux Rebrouſſements de directions différentes traverſés par une Branche ſous une troiſiéme direction*. num. 6.

7. Si les éq: P & Q ont une racine triple & deux ſimples; la Courbe productrice coupe ſon Axe des ordonnées en K & L, & le coupe & touche en Q Point d'Inflexion. num. 7.

PLANCHE XXXIII. Fig. 225. flexion. La Courbe produite fait à l'Origine un *Double-Nœud*, dont une Branche CAſ a, au point A, une *triplicité inviſible* réſultante de l'évanouiſſement de deux Feuilles. Car comme le point Q de la Courbe productrice renferme virtuellement les deux ſinuoſités GQH, HRI de la Courbe *n°.* 1, de même le Point A de la Branche CAſ de la Courbe produite renferme virtuellement les deux Feuilles Aq, Ar, de la Courbe CAqArAſAtAd du même *n°.* 1. CH. XIII. § 223.

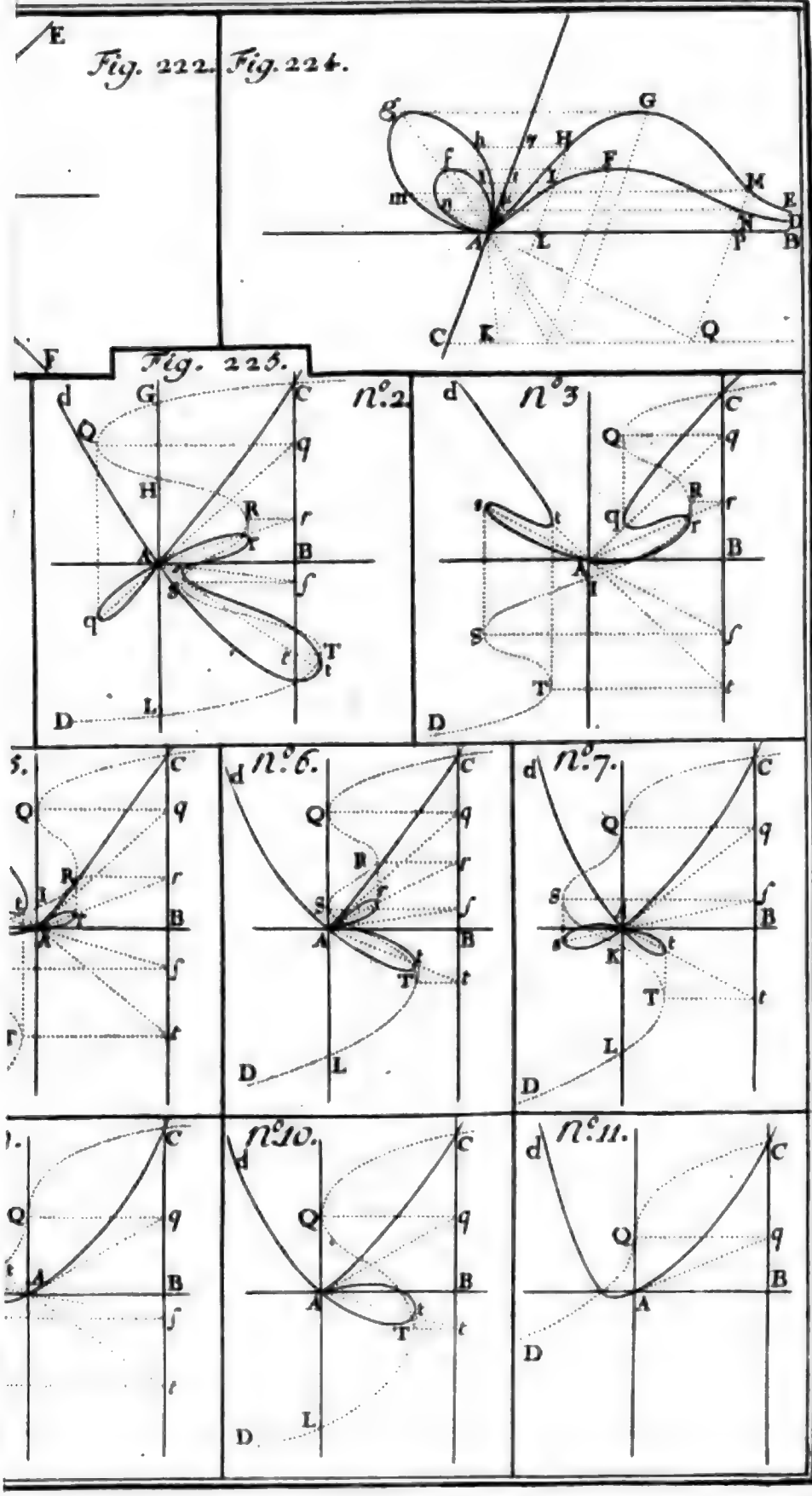
num. 8. 8. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine triple & une double; la Courbe productrice touche ſon Axe en T, & le coupe & touche en Q. Et la Courbe produite a à l'Origine un *Rebrouſſement traverſé par une Branche* CAſ, dont le Point A a, comme au Cas précéd. une *triplicité inviſible* qui renferme virtuellement les deux Feuilles Aq, At de la Courbe n°. 4.

num. 9. 9. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine triple & deux imaginaires; la Courbe productrice coupe & touche en *Q* l'Axe des ordonnées & ne le rencontre point ailleurs. La Courbe produite ne paſſe qu'une fois par A: mais non ſeulement le Point A de la Branche qui y paſſe eſt d'une *triplicité inviſible*, renfermant virtuellement deux Feuilles; mais encore il faut y concevoir un *Point double inviſible*, qui fait de ce Point un Point quintuple.

num. 10. 10. Si les éq: *P* & *Q* ont une racine quadruple & une ſimple; la Courbe productrice coupe l'Axe des ordonnées en L, & le touche en Q par un Point de Serpentement. La Courbe produite a, à l'Origine, une *Branche qui traverſe un Point de Rebrouſſement cenſé renfermer trois Feuilles évanouiſſantes.* Car puiſque le Point de Serpentement G eſt cenſé renfermer les trois ſinuoſités, GQH, HRI, ISK de la Courbe *n°.* 1, qui y ſont devenues infiniment petites, le Rebrouſſement CAt eſt auſſi cenſé renfermer les trois Feuilles Aq, Ar, Aſ devenues infiniment petites.

11.

Digitized by Google


E
Fig. 222.
Fig. 224.
G
H
F
M
E
D
B
A
L
C
K
Q
F
Fig. 223.
n°2.
n°3
n°6.
n°7.
n°10.
n°11.
d
G
C
Q
q
H
R
r
B
A
S
T
t
D
L

Digitized by Google

CH. XIII. §. 223.

11. Enfin, ſi les éq: P & Q ont une ſeule racine quintuple; la Courbe productrice coupe & touche l'Axe des ordonnées au Point Q de double Inflexion. Et la Courbe produite ne paſſe qu'une fois par l'Origine A: mais ce Point eſt un *Point quintuple d'une multiplicité inviſible*, qui renferme virtuellement quatre Feuilles évanouïſſantes. Car comme le Point de double Inflexion Q eſt cenſé renfermer les quatre ſinuoſités GQH, HRI, ISK, KTL de la Courbe *n°.* 1, qui ſont devenues infiniment petites, de même le Point A de la Courbe produite renferme les quatre Feuilles Aq, Ar, Aſ, At, devenues infiniment petites. C'eſt donc réellement un Point quintuple, dont la multiplicité échappe aux Sens, mais ſe laiſſe apperçevoir par l'Analyſe.

PLANCHE XXXIII. *Fig.* 225. *num.* 11.

APPEN-

Digitized by Google

APPENDICE.

Nos. I. & II.

De l'évanouiſſement des inconnues.

QUand un Problème renferme pluſieurs inconnues, dont les rélations ſont tellement compliquées qu'on ſe trouve obligé de former pluſieurs équations; alors, pour découvrir les valeurs de ces inconnues, on les fait toutes évanouïr, moins une, qui combinée ſeule avec les grandeurs connues donne, ſi le Problème eſt déterminé, une *Equation finale*, dont la réſolution fait connoître d'abord cette inconnue, & enſuite par ſon moyen toutes les autres.

L'Algébre fournit pour cela des Règles, dont le ſuccès eſt infaillible, pourvû qu'on ait la patience de les ſuivre. Mais le Calcul en devient extrémement long, lorſque le nombre des équations & des inconnues eſt fort grand, & auſſi lorſque ces inconnues montent dans les équations propoſées à des dégrés fort élevés. Dans ce ſecond Cas on tombe, par les Méthodes ordinaires, dans un autre inconvénient; c'eſt d'être conduit à des équations plus compoſées qu'il ne faut, & qui renferment des racines ſuperflues, qu'il n'eſt pas toujours aiſé de démêler de celles qui donnent la vraye Solution du Problème. On ſe propoſe dans les deux Nos. ſuivants de remédier à ces inconvénients.

N°. I.

Digitized by Google

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient pluſieurs inconnues z, y, x, v, *&c.* & autant d'équations

$$\begin{aligned} A^1 &= Z^1 z + Y^1 y + X^1 x + V^1 v + \&c. \\ A^2 &= Z^2 z + Y^2 y + X^2 x + V^2 v + \&c. \\ A^3 &= Z^3 z + Y^3 y + X^3 x + V^3 v + \&c. \\ A^4 &= Z^4 z + Y^4 y + X^4 x + V^4 v + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, *&c.* ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puiſſances d'A, mais le prémier membre, ſuppoſé connu, de la prémiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, *&c.* ſont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, *&c.* ceux de y; X^1, X^2, *&c.* ceux de x; V^1, V^2, *&c.* ceux de v; &c. dans la prémiére, ſeconde, &c. équation.

Cette Notation ſuppoſée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1 Y^2 - A^2 Y^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$, & $y = \frac{Z^1 A^2 - Z^2 A^1}{Z^1 Y^2 - Z^2 Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choſes différentes. Chaque terme eſt compoſé des lettres $ZYXV$ *&c.* toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on diſtribue, comme expoſants, les n prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres poſſibles. Ainſi, lorſqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1\times2\times3=$] 6 termes, compoſés des trois lettres ZYX, qui reçoivent ſucceſſivement les expoſants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les ſignes + ou —, ſelon la Règle ſuivante. Quand un expoſant eſt ſuivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un expoſant plus petit que lui, j'apellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il eſt pair ou nul, le terme aura le ſigne +; s'il eſt impair, le terme aura le ſigne —. Par ex. dans le terme $Z^1Y^2V^3$ il n'y a aucun dérangement: ce terme aura donc le ſigne +. Le terme $Z^3Y^1X^2$ a auſſi le ſigne +, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3Y^2X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1, aura le ſigne —.

Le dénominateur commun étant ainſi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui ſe forme en changeant, dans tous ſes termes, Z en A. Et la valeur d'y eſt la fraction qui a le même dénominateur & pour numérateur la quantité qui réſulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une maniére ſemblable la valeur des autres inconnues.

Généralement parlant, le Probléme eſt déterminé. Mais il

il peut y avoir des Cas particuliers, où il reſte indéterminé; & d'autres où il devient impoſſible. C'eſt lorſque le dénominateur commun ſe trouve égal à zéro; c'eſt-à-dire, s'il n'y a que deux équations, lorſque $Z^1Y^2 - Z^2Y^1 = 0$, s'il y en a trois, lorſque $Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1 = 0$, &c. Alors, ſi les grandeurs A^1, A^2, A^3, *&c.* ſont telles que les numérateurs ſoient auſſi égaux à zéro, le Problème eſt indéterminé; car les fractions $\frac{0}{0}$, qui devroient donner la valeur des inconnues, ſont indéterminées. Mais ſi les grandeurs A^1, A^2, A^3, *&c.* ſont telles que, le dénominateur commun étant zéro, les numérateurs ou quelques-uns d'entr'eux ne ſoient pas zéro, le Problème eſt impoſſible, ou du moins les grandeurs inconnues qui peuvent le réſoudre ſont toutes, ou en partie, infinies. Par ex. ſi l'on a ces deux équations $2 = 3z - 2y$ & $5 = 6z - 4y$, on trouvera $z = \frac{1}{0}$ & $y = \frac{1}{0}$. Donc z & y ſont des grandeurs infinies, qui ſont l'une à l'autre en raiſon de 2 à 3. En dégageant les inconnues par les Méthodes ordinaires, on tomberoit dans cette équation abſurde $\frac{2}{3} = \frac{1}{0}$. Car la prémiére équation donne $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ & la ſeconde $z = \frac{4}{6}y + \frac{1}{6}$. Donc $\frac{2}{3}y + \frac{2}{3} = \frac{4}{6}y + \frac{1}{6}$, ou $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$: ce qui eſt abſurde, ſi z & y ſont des grandeurs finies. Mais ſi elles ſont infinies, on peut dire ſans abſurdité que $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ & en même tems que $z = \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}$; parce que les grandeurs finies $\frac{2}{3}$ & $\frac{1}{6}$ n'étant rien en comparaiſon des grandeurs infinies z & $\frac{2}{3}y$, les deux équations $z = \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}$ & $z = \frac{2}{3}y + \frac{1}{6}$ ſe réduiſent toutes deux à $z = \frac{2}{3}y$, qui n'a rien de contradictoire.

Digitized by Google

No. II.

Voyez pag. 76.

§. 1. Soient x & y deux grandeurs variables, dont le rapport, tant entr'elles qu'avec des grandeurs conſtantes, ſoit exprimé par les deux équations A & B, la prémiére de l'ordre n & la ſeconde de l'ordre m.

A..... $x^n - [1]x^{n-1} + [1^2]x^{n-2} - [1^3]x^{n-3} + \&c. \ldots\ldots [1^n] = 0$

B.... $(0)x^0 + (1)x^1 + (2)x^2 + (3)x^3 + \&c. \ldots + (m)x^m = 0$

Les $1, 1^2, 1^3$, &c. dans des parenthéſes quarrées, marquent, non les puiſſances de l'unité, mais les coëfficients de x, ou les fonctions rationnelles de y qui multiplient les puiſſances de x dans l'éq: A. Et les chiffres 0, 1, 2, 3, &c. dans les parenthéſes rondes, indiquent auſſi les fonctions rationelles d'y qui multiplient les puiſſances de x dans l'équation B. L'uſage de cette Notation paroitra dans la ſuite, & les parenthéſes ne laiſſent aucune équivoque. On propoſe de faire évanouir x, au moyen de ces deux équations, & de trouver celle qui exprime le raport des fonctions $[1], [1^2], [1^3]$, &c. $(0), (1), (2)$, &c. c'eſt-à-dire de trouver l'équation en y & conſtantes, qui reſte quand on a fait évanouir x. Nous nommerons cette équation C.

§. 2. Que a, b, c, d, &c. repréſentent les racines de l'éq: A, ou les fonctions, rationelles ou irrationelles, de y qui ſont les valeurs de x dans cette équation $x^n - [1]x^{n-1}$ &c... $[1^n] = 0$. Comme elle eſt du dégré n, le nombre de ſes racines eſt n. Et les ſubſtituant ſucceſſivement dans l'éq: B, on aura n équations $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c, où x ne paroit plus.

α ..... $(0)a^0 + (1)a^1 + (2)a^2 \ldots\ldots + (m)a^m = 0$

β..... $(0)b^0 + (1)b^1 + (2)b^2 \ldots\ldots + (m)b^m = 0$

γ..... $(0)c^0 + (1)c^1 + (2)c^2 \ldots\ldots + (m)c^m = 0$

δ ..... $(0)d^0 + (1)d^1 + (2)d^2 \ldots\ldots + (m)d^m = 0$

&c. &c.

Ces

Ces équations ſont le réſultat de l'évanouiſſement de x, & leurs racines ſont les valeurs de y qui ſatisfont aux deux équations A & B, & que donneroit auſſi l'éq: C trouvée en éliminant x par quelque Méthode que ce ſoit. Ainſi l'éq: C doit avoir les mêmes racines que toutes les équat: α, β, γ, δ, enſemble. Elle n'eſt donc autre choſe que le produit de ces équations multipliées les unes par les autres.

§. 3. Or ce produit des éq: α, β, γ, δ, &c. ſe forme en multipliant chaque terme de chaque équation par chaque terme de chacune des autres. Il eſt la ſomme de tous les produits particuliers qu'on peut faire, en prenant, de toutes les maniéres poſſibles, un terme de chaque équation.

Ainſi, multipliant d'abord α par β, ou chaque terme de α par chaque terme de β, on aura

$$\begin{aligned}
&(00)a^0b^0+(01)a^0b^1+(02)a^0b^2+(03)a^0b^3+(04)a^0b^4+\&c.\\
&+(10)a^1b^0+(11)a^1b^1+(12)a^1b^2+(13)a^1b^3+\&c.\\
&+(20)a^2b^0+(21)a^2b^1+(22)a^2b^2+\&c.\\
&+(30)a^3b^0+(31)a^3b^1+\&c.\\
&+(40)a^4b^0+\&c.\\
&+\&c.
\end{aligned}$$

ou plus briévement,

$$(00)a^0b^0+(01)\left\{\begin{matrix}a^0b^1\\+a^1b^0\end{matrix}\right.+(02)\left\{\begin{matrix}a^0b^2\\+a^2b^0\end{matrix}\right.+(03)\left\{\begin{matrix}a^0b^3\\+a^1b^0\end{matrix}\right.+(04)\left\{\begin{matrix}a^0b^4\\+a^4b^1\end{matrix}\right.+\&c.$$
$$+(11)\ a^1b^1+(12)\left\{\begin{matrix}a^1b^2\\+a^2b^1\end{matrix}\right.+(13)\left\{\begin{matrix}a^1b^3\\+a^3b^1\end{matrix}\right.+\&c.$$
$$+(22)\ a^2b^2+\&c.$$

Si on multiplie ce produit des deux éq: α, β, par la troiſiéme γ, ce qui ſe fait en joignant chaque terme de γ à chaque terme combiné de $\alpha\beta$, ou en aſſortiſſant, en toutes les maniéres poſſibles, un terme de α, un de β, & un de γ, on aura

$$(000)a^0b^0c^0+(001)\left\{\begin{matrix}a^0b^0c^1\\+a^0b^1c^0\\+a^1b^0c^0\end{matrix}\right.+(002)\left\{\begin{matrix}a^0b^0c^2\\+a^0b^2c^0\\+a^2b^0c^0\end{matrix}\right.+(003)\left\{\begin{matrix}a^0b^0c^3\\+a^0b^3c^0\\+a^3b^0c^0\end{matrix}\right.+\&c.$$

$$+(011)\left\{\begin{matrix}a^0b^1c^1\\+a^1b^0c^1\\+a^1b^1c^0\end{matrix}\right.+(012)\left\{\begin{matrix}a^0b^1c^2+a^0b^2c^1\\+a^1b^0c^2+a^1b^2c^0+\&c.\\+a^2b^0c^1+a^2b^1c^0\end{matrix}\right.$$

$$+(111)\quad a^1b^1c^1\quad+\&c.$$

Et ainſi de ſuite, quel que ſoit le nombre n des équations α, β, γ, δ, &c. qu'on multiplie les unes par les autres.

§. 4. Dans chaque terme de ce produit, ou équation finale C, on diſtingue deux *Facteurs*. L'un, que nous appellerons *Facteur-prémier*, eſt le produit de quelques coëfficients de l'éq: B, & il eſt exprimé par des chiffres, comme (000), (001), (012) &c. L'autre, que nous nommerons *Facteur-ſecond*, eſt une fonction des racines a, b, c, *&c.* de l'éq: A.

§. 5. Les *Facteurs-prémiers* ſe trouvent aiſément. Il ne s'agit que de combiner n à n les termes du polynome $(0)+(1)+(2)+(3)$ &c.... $+(m)$. Qu'on mette à la prémiére Colomne (0^n), qui eſt (0) élevé à la puiſſance n; à la ſeconde, (0^{n-1}) multipliée par tous les autres termes du polynome (1), (2), (3), &c.; à la troiſiéme, (0^{n-2}) multipliée par tous les produits (11), (12), (13) &c. (22), (23) &c. (33) &c. &c. qu'on peut faire en combinant ces termes deux à deux; à la quatriéme, (0^{n-3}) multipliée par tous les produits de ces termes pris trois à trois, (111), (112), (113) &c. (122), (123) &c. (133) &c. (222), (223) &c. (233) &c. (333) &c. &c; à la cinquiéme, (0^{n-4}) multipliée par tous les produits des mêmes termes pris quatre à quatre; & ainſi de ſuite: On aura les *Facteurs-prémiers* rangés comme on les voit dans la Table ſuivante pour le Cas particulier de $m=3$ & $n=4$.

(000)

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrrrr}
(0000) & + & (0001) & + & (0011) & + & (0111) & + & (1111) \\
 & + & (0002) & + & (0012) & + & (0112) & + & (1112) \\
 & + & (0003) & + & (0013) & + & (0113) & + & (1113) \\
 & & & + & (0022) & + & (0122) & + & (1122) \\
 & & & + & (0023) & + & (0123) & + & (1123) \\
 & & & + & (0033) & + & (0133) & + & (1133) \\
 & & & & & + & (0222) & + & (1222) \\
 & & & & & + & (0223) & + & (1223) \\
 & & & & & + & (0233) & + & (1233) \\
 & & & & & + & (0333) & + & (1333) \\
 & & & & & & & + & (2222) \\
 & & & & & & & + & (2223) \\
 & & & & & & & + & (2233) \\
 & & & & & & & + & (2333) \\
 & & & & & & & + & (3333)
\end{array}
$$

Où l'on voit que le chiffre (o), élevé d'abord à la puiſſance n, puis à la puiſſance $n-1$, &c. ſert en quelque maniére à completter les dimenſions qui manquent aux chifres ſignificatifs, & à faire qu'en chaque terme il y ait n chiffres. De ſorte que dans la ſuite, nous négligerons ordinairement d'écrire ces puiſſances de (o), quoiqu'il faille toujours les ſous-entendre dans ces *Facteurs-prémiers*. Car (o) eſt une grandeur bien réelle.

§. 6. On peut conſidérer, dans cette diſpoſition des *Facteurs-prémiers*, les lignes ſuivant leſquelles ils ſont rangés. Dans chacune le *Facteur* ſuivant ſe forme du précédent par le changement de (o) en (1); de ſorte que le prémier *Facteur* de chaque ligne étant donné, on a tous les autres.

On peut auſſi diſtinguer ces lignes en ordres. Le prémier ne contient que la prémiére ligne, qui commence par le terme (o^n).

Le ſecond a $m-1$ lignes, dont les prémiers termes ſont $(o^{n-1}2)$, $(o^{n-1}3)$ &c. juſqu'à $(o^{n-1}m)$; c'eſt-à-dire, les produits de (o^{n-1}) par tous les termes du polynome excep-

excepté les deux prémiers (o) & (1).

Le troiſiéme ordre eſt compoſé de $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$ lignes, qui commencent par les termes $(o^{n-2}22)$, $(o^{n-2}23)$ &c. leſquels naiſſent en multipliant (o^{n-2}) par tous les produits qu'on peut faire en combinant deux à deux tous les termes du polynome, hors les deux prémiers.

Le quatriéme ordre a $\frac{(m-1).(m-2).(m-3)}{1.2.3}$ lignes, qui commencent par les *Facteurs* $(o^{n-3}222)$, $(o^{n-3}223)$ &c. formés de la multiplication de (o^{n-3}) par tous les produits qu'on trouve en combinant *trois* à trois tous les termes du polynome à l'exception des deux prémiers.

Les ordres ſuivants ſe forment d'une maniére ſemblable; de ſorte qu'en ne comptant point les deux prémiers termes (o), & (1), du polynome $(o)+(1)+(2)+(3)$ &c. on peut dire que les termes du prémier ordre n'ont aucun chiffre, que ceux du ſecond n'en ont qu'un, que ceux du troiſiéme en ont deux &c. comme on le voit aſſez évidemment en jettant les yeux ſur la Table du §. précédent.

§. 7. Quant aux *Facteurs-ſeconds* de l'équation C, leurs *Facteurs-prémiers* les repréſentent. Chaque chifre du *Facteur-prémier* annonce, dans le *Facteur-ſecond* qui lui eſt joint, une puiſſance des lettres *a*, *b*, *c*, *d*, *&c.* dont ce chiffre eſt l'expoſant, & ces puiſſances ſont autant de termes qu'il y a de maniéres de les arranger. Car le produit $\alpha\beta\gamma\delta$ &c (§. 3) étant la ſomme de tous les produits qu'on peut faire en prenant un terme dans chaque équation α, β, γ, δ, &c. chacun de ſes termes aura toutes les lettres *a b c d &c.* élevées aux mêmes ou à différentes puiſſances. Et comme, par la notation des coëfficients dans les équat: $\alpha, \beta,$

α, β, γ, δ, &c. (§. 2), chaque puiſſance des lettres a, b, c, d, &c. porte avec ſoi, comme coëfficient, le même chiffre qui eſt ſon expoſant, le *Facteur-prémier*, produit des coëfficients, ſera compoſé de tous les chiffres qui dans le *Facteur-ſecond* ſont expoſants des lettres a, b, c, d, &c.

Ainſi le terme $a^1b^0c^0d^0$ &c. venant de la multiplication de (1) a^1 par (0) b^0 par (0) c^0 par (0) d^0 &c. aura pour *Facteur-prémier* ($0^{n-1}1$). Et, par la même raiſon, ($0^{n-1}1$) eſt auſſi le *Facteur-prémier* de $a^0b^1c^0d^0$ &c. & de $a^0b^0c^1d^0$ &c. & de $a^0b^0c^0d^1$ &c. Tous ces termes ſe réuniſſent donc en un ſeul, qui a pour *Facteur-prémier* ($0^{n-1}1$), & pour *Facteur-ſecond* $a^1b^0c^0d^0$ &c. $+$ $a^0b^1c^0d^0$ &c. $+$ $a^0b^0c^1d^0$ &c. $+$ $a^0b^0c^0d^1$ &c., ou ſimplement $a+b+c+d$ &c. puiſque toutes les puiſſances zéro ne ſont que des unités.

De même, tous les termes où ſont combinés une racine, un quarré, & un cube de diverſes lettres (car une même lettre ne ſe repéte pas dans un même terme) tels que $a^1b^2c^3$, ou $a^1b^2c^3d^0e^0$ &c. étant produits par la multiplication de (1) a^1 par (2) b^2 par (3) c^3 par (0) d^0 par (0) e^0 &c. auront pour *Facteur-prémier* ($0^{n-3}123$) ou (123) en omettant les 0 (§. 5.) Donc le *Facteur-ſecond* de (123) eſt $a^1b^2c^3 + a^1b^3c^2 + a^2b^1c^3 + a^2b^3c^1 + a^3b^1c^2 + a^3b^2c^1$ &c. $+ a^1b^2d^3 + a^1b^3d^2 + a^2b^1d^3 + a^2b^3d^1 + a^3b^1d^2 + a^3b^2d^1$ &c. $+ a^1c^2d^3 + a^1c^3d^2 + a^2c^1d^3 + a^2c^3d^1 + a^3c^1d^2 + a^3c^2d^1$ &c. $+ b^1c^2d^3 + b^1c^3d^2 + b^2c^1d^3 + b^2c^3d^1 + b^3c^1d^2 + b^3c^2d^1$ &c. c'eſt-à-dire la ſomme de tous les produits qu'on peut faire en combinant une racine, un quarré, & un cube de trois lettres différentes priſes parmi celles qui repréſentent les racines de A.

§. 8. Si donc les racines de l'éq: A étoient connues, il ſeroit aiſé d'avoir tous les *Facteurs-ſeconds* de l'éq: C. Mais ces racines ſont inconnues, lorſque l'éq: A eſt d'un dégré trop élevé pour que l'Algébre en puiſſe donner la ſolution.

Cependant ces *Facteurs-ſeconds* ſe peuvent toujours calculer & exhiber ſous une forme rationelle, au moyen des coëfficiens de l'éq: $A \ldots x^n - [1] x^{n-1} + [1^2] x^{n-2} - [1^3] x^{n-3} \ldots\ldots [1^n] = 0$. Car, les ſignes + & − étant alternatifs, on ſait que [1], coëfficient du ſecond terme, eſt égal à la ſomme $a + b + c + d + \&c.$ des racines, & par conſéquent au *Facteur-ſecond* de $(0^{n-1}1)$: que de même $[1^2]$, coëfficient du troiſiéme terme, eſt égal à $ab + ac + ad + \&c. + bc + bd + \&c. + cd + \&c.$ ſomme des produits des racines priſes deux à deux, ou au *Facteur-ſecond* de $(0^{n-2}11)$ ou (1^2): que pareillement le coëfficient $[1^3]$ du quatriéme terme eſt égal à $abc + abd + \&c. + acd + \&c. + bcd + \&c.$ ſomme des produits des racines priſes trois à trois, & *Facteur-ſecond* de $(0^{n-3}111)$ ou (1^3): que de même $[1^4]$ eſt le *Facteur ſecond* de (1^4) &c. Les coëfficients de l'éq: A donnent donc, immédiatement & ſans calcul, tous les *Facteurs-ſeconds* de la prémiére ligne [§. 5.], ou du prémier Ordre [§. 6]. Et au moyen de ceux-là, ou trouvera tous les autres par le Théorème ſuivant.

§. 9. Si on multiplie un *Facteur-ſecond* quelconque par un *Facteur-ſecond* dont le *Facteur-prémier* n'ait qu'un ſeul chiffre ſignificatif, c'eſt-à-dire différent du zéro: le produit eſt égal à autant de *Facteurs-ſeconds* qu'il y a de chiffres différents dans le *Facteur-prémier* du multiplicande. On aura les *Facteurs-prémiers* de ces *Facteurs-ſeconds* en ajoutant le chiffre du multiplicateur à chacun des différents chiffres du multiplicande. Et s'il arrive que, dans quelcun de ces *Facteurs-prémiers* du produit, un chiffre ſoit repété plus ſouvent que dans le *Facteur-prémier* du multiplicande, on prendra ce *Facteur*-là autant de fois que ce chiffre y eſt repété.

Par ex. le produit du *Facteur-ſecond* de $(0^{n-6}111223)$ par le *Facteur-ſecond* de $(0^{n-1}1)$ eſt égal à la ſomme du *Facteur-ſecond* de $(0^{n-6}111224)$, de deux fois le *Facteur-ſecond* de $(0^{n-6}111233)$, de trois fois le *Facteur-ſecond* de

$(0^{n-6}$

$(o^{n-6}111223)$, & de quatre fois le *Facteur-ſecond* de $(o^{n-7}1111223)$. Ce qu'on exprime en abrégé par cette équation $[111223] \times [1] = [111224] + 2\,[111233] + 3\,[112223] + 4\,[1111223]$, où les chiffres renfermés dans les parenthéſes quarrées déſignent les *Facteurs-ſeconds* dont les *Facteurs-prémiers* auroient les mêmes chiffres dans des parenthéſes rondes, & où, pour abréger, on omet les puiſſances de (o).

Voici comment ſe forme cette équation ſelon le Théorème. Dans le *Facteur-prémier* $(o^{n-6}111223)$ du multiplicande, on voit quatre différents chiffres o, 1, 2, 3. Le produit de $[111223]$ par $[1]$ aura donc quatre parties. On aura le *Facteur-prémier* de la prémiére, en ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur au chiffre 3 du multiplicande, ce qui change $(o^{n-6}111223)$ en $(o^{n-6}111224)$. Et comme aucun chiffre ne ſe trouve plus ſouvent en $(o^{n-6}111224)$ qu'en $(o^{n-6}111223)$, le *Facteur-ſecond* $[111224]$ ne ſera pris qu'une fois. Le *Facteur-prémier* de la ſeconde partie ſe forme en ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur au chiffre 2 du multiplicande, ce qui change $(o^{n-6}111223)$ en $(o^{n-6}111233)$, où le chiffre 3, qui n'étoit qu'une fois dans le multiplicande, ſe trouve deux fois. On prendra donc deux fois le *Facteur-ſecond* $[111233]$. De même pour avoir la troiſiéme partie du produit, on ajoutera le chiffre 1 du multiplicateur à un des chiffres 1 du multiplicande $(o^{n-6}111223)$, ce qui le change en $(o^{n-6}112223)$, où 2 eſt repété trois fois, au lieu qu'il n'étoit que deux fois dans le multiplicande. On prendra donc trois fois le *Facteur-ſecond* $[112223]$. Enfin, ajoutant le chiffre 1 du multiplicateur à un chiffre o du multiplicande, on transforme $(o^{n-6}111223)$ en $(o^{n-7}1111223)$, où l'on voit quatre 1, au lieu des trois qu'il y avoit dans le multiplicande. On prendra donc quatre fois $[1111223]$. Et ainſi l'on aura l'équation

$[111223]\times[1]=[111224]+2[111233]+3[112223]+4[111223]$.

§. 10. On peut remarquer, dans cette équation, que dans chaque terme du ſecond membre, la ſomme des chiffres renfermés dans les parenthéſes eſt la même, ſavoir la ſomme des chiffres du multiplicateur & du multiplicande: parce que les chiffres de chaque terme du ſecond membre de l'équation ſont formés par l'addition des chiffres du multiplicande & du multiplicateur.

§. 11. La preuve de ce Théorème [qu'on ſe contentera d'appliquer au cas particulier qui a ſervi d'Exemple, mais qu'on concevra aiſément être générale] ſe tire de ce que le multiplicande [111223] eſt la ſomme de *tous* les produits, tels que $a^1b^2c^2d^1e^1f^1$, de trois racines $d^1e^1f^1$ par deux quarrés b^2c^2 & par un cube a^3 de différentes lettres (§. 7); & de ce que le multiplicateur [1] eſt la ſomme de toutes les racines $a+b+c+d+e+f+g+h$, *&c.* de A. Multiplier par [1] chaque terme de [111223], comme $a^1b^2c^2d^1e^1f^1$, c'eſt donc le multiplier 1°. par la racine a qui, dans ce terme, a ſon cube a^3, 2°. par les racines b, c, qui y ſont élevées au quarré b^2, c^2. 3°. par les racines d, e, f, qui ſe trouvent dans ce terme, & 4°. par les racines g, h, *&c.* qui ne paroiſſent dans ce terme, ni par elles-mêmes, ni par leurs puiſſances.

Or la multiplication de chaque terme, tel que $a^1b^2c^2d^1e^1f^1$, par la racine a, qui dans ce terme a 3 dimenſions, donne tous les termes tels que $a^4b^2c^2d^1e^1f^1$ qui font enſemble le *Facteur-ſecond* [111224]: & elle ne le donne qu'une fois, parce que chaque terme tel que $a^4b^2c^2d^1e^1f^1$ ne peut être produit, dans la multiplication de [111223] par [1], que d'une ſeule maniére, ſavoir en multipliant $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$ par a.

Mais la multiplication de chaque terme, tel que $a^3b^2c^2d^1e^1f^1$, par une des racines b, [ou c,] qui ont, dans ce terme, leur quarré b^2 [ou c^2], produit tous les ter-

termes, tels que $a^1b^1c^1d^1e^1f^1$, dont la ſomme fait le *Facteur-ſecond* [111233], & elle produit deux fois cette ſomme; parce que chacun de ces termes ſe trouve deux fois dans le produit [111223]×[1]; $a^1b^1c^1d^1e^1f^1$ y paroiſſant, & comme produit de $a^1b^2c^1d^1e^1f^1$ par b, & comme produit de $a^2b^1c^1d^1e^1f^1$ par a.

La multiplication de chaque terme, tel que $a^1b^2c^1d^1e^1f^1$, par une des racines d [ou e, f] qui dans ce terme n'ont qu'une dimenſion, produit tous les termes tels que $a^1b^2c^1d^2e^1f^1$ dont la ſomme eſt le *Facteur-ſecond* [1112223], & elle la produit trois fois; parce que chaque terme ſe trouve trois fois dans le produit [111223]×[1]. Par exemple $a^1b^2c^1d^2e^1f^1$ s'y trouve formé par la multiplication de $a^1b^2c^1d^1e^1f^1$ par d, & par celle de $a^1b^2c^1d^2e^1f^1$ par c, & encore par celle de $a^1b^1c^1d^2e^1f^1$ par b.

Enfin la multiplication de tous les termes, tels que $a^1b^1c^1d^1e^1f^1$, par quelque racine comme g, différente de celles a, b, c, d, e, f, qui y ſont déjà, produit tous les termes, tels que $a^1b^1c^1d^1e^1f^1g^1$, dont la ſomme eſt le *Facteur-ſecond* [1111223], & dans ce produit chaque terme ſe trouve quatre fois; parce que $a^1b^1c^1d^1e^1f^1g^1$ par ex. eſt produit en quatre maniéres, ſç. en multipliant $a^1b^1c^1d^1e^1f^1$ par g, ou $a^1b^1c^1d^1e^1g^1$ par f, ou $a^1b^1c^1d^1f^1g^1$ par e, ou $a^1b^1c^1e^1f^1g^1$ par d.

Le Produit [111223]×[1] eſt donc compoſé des quatre parties [111224] + 2 [111233] + 3 [112223] + 4[1111223].

§. 12. Par ce Théorème, on peut calculer tous les *Facteurs-ſeconds* de l'équation C, au moyen de ceux du prémier ordre, qui ſont les coëfficiens de l'équation donnée A (§. 8). Pour cet effet, on décompoſera en deux parties le *Facteur-prémier* dont on cherche le *Facteur-ſecond*. L'une n'aura que des (o) avec un ſeul chiffre ſignificatif,

gnificatif, qui vaut une unité de moins que le plus grand chiffre du *Facteur* propoſé: L'autre contiendra tous les chiffres du *Facteur* propoſé à la réſerve du plus grand, auquel on ſubſtituera l'unité. En multipliant l'un par l'autre les *Facteurs-ſeconds* dont ces parties ſont les *Facteurs-prémiers*, on aura par le Théorème précédent une équation, dont un des termes ſera le *Facteur* cherché, & dont tous les autres termes ſeront des *Facteurs-ſeconds* qui ſe trouvent dans des lignes ſupérieures, ſi l'on diſpoſe les *Facteurs-prémiers* comme on l'a indiqué au §. 5. Donc, ſi l'on calcule les *Facteurs-ſeconds* ligne par ligne; quand on vient à calculer celui-ci, on aura déjà tous les autres par le moyen deſquels il eſt donné & connu.

On cherche, par ex. la valeur de [0123]. On décompoſera ce nombre en deux parties [0002] & [0112]; dont la prémiére n'a que le chiffre ſignificatif 2, moindre d'une unité que 3 le plus grand chiffre de ceux du *Facteur* propoſé; & dont la ſeconde partie [0112] a tous les chiffres du *Facteur* propoſé [0123], hors le plus grand 3 qu'on a changé en 1. On multipliera [0112] par [0002], & on aura l'équation [0112] × [0002] = [0114] + [0123] + 2 [1122], d'où l'on tirera [0123] = [0112] × [0002] — [0114] — 2 [1122]. Ainſi [0123] eſt donné par [0112], [0002], [0114] & [1122]. Mais ces *Facteurs-ſeconds* ſont déja calculés, quand on viendra à la ligne où ſe trouve [0123]. Car [0112], [0002] & [0114] ſont du ſecond ordre (§. 5), & [1122], qui, auſſi bien que [0123], eſt du troiſiéme ordre, ſe trouve dans la ligne immédiatement ſupérieure, parce que le chiffre 2 précéde immédiatement le chiffre 3. Donc ſi on calcule ces *Facteurs-ſeconds* ligne par ligne, on a déja, quand on vient à calculer [0123], tous ceux par leſquels il eſt donné.

§. 13.

Digitized by Google

§. 13. On peut ſupputer ainſi l'équation C, à quelque dégré que s'éléve la variable x dans les éq: A & B. Il eſt vrai qu'on y trouvera cet inconvénient, c'eſt que pour calculer certains *Facteurs-ſeconds* qui entrent dans l'éq: C, il faut en avoir calculé d'autres qui n'y entrent pas. Ainſi pour avoir la valeur de [0123], il faut connoitre celle de [0114], qui ſeroit d'ailleurs inutile ſi l'éq: B ne paſſe pas le quatriéme dégré. Quoique cet inconvénient ſoit plus apparent que réel, n'ayant d'autre incommodité que celle d'allonger le Calcul; on pourra, ſi l'on veut, le lever au moyen de la Règle ſuivante, qui ſert à ſupputer le produit de deux *Facteurs-ſeconds* quelconques.

1°, Ecrivés de ſuite tous les arrangements poſſibles des chiffres du multiplicande. Le calcul ſera plus court, ſi vous choiſiſſez pour multiplicande celui des deux *Facteurs* dont les chiffres donnent le plus petit nombre d'arrangements.

2°. Sous chaque arrangement écrivés les chiffres du multiplicateur, dans un ordre tel que vous voudrés, mais toujours le même, & ajoutés les chiffres de deſſous à ceux de deſſus. Ces ſommes ſeront les *Facteurs-prémiers* dont les *Facteurs-ſeconds* compoſent le produit.

3°. Multipliés chacun de ces *Facteurs-ſeconds* par la fraction qui a pour numérateur le nombre des permutations des chiffres du multiplicateur, & pour dénominateur le nombre des permutations des chiffres du *Facteur* même.

§. 14. Ce ſeroit trop s'écarter de nôtre but, que de s'arrêter à prouver cette Règle, dont le Lecteur attentif pénétrera aiſement la raiſon. J'ai cru pourtant devoir l'indiquer, parce qu'elle fournit divers moyens plus faciles de calculer l'équation C, & qu'elle m'a été fort utile pour calculer en peu de moments l'équation C*, qu'on voit ici vis-à-

vis-à-vis, & qui eſt celle qui réſulte de l'évanouïſſement de x dans ces deux équations du 4e. dégré,

$$A..... lx^4 - px^3 + qx^2 - rx + f = 0$$
$$B..... (0) + (1)x + (2)x^2 + (3)x^3 + (4)x^4 = 0$$

Cette éq: C*, où l'on a changé pour plus de commodité l'ordre des *Facteurs*, peut ſervir pour tous les dégrés inférieurs, & contient ainſi toutes les Régles que Mr. Newton a données dans ſon *Arithmét. univerſ. pag.* 73, 74, & au delà. Car ſi l'éq: B n'eſt que *du* 3e. dégré, on fera $(4) = 0$, c'eſt-à-dire, on omettra tous les termes de l'éq: C* où le chiffre 4 paroit entre les *Facteurs-prémiers*, & alors toute l'équation ſe peut & doit diviſer par l. Et ſi l'éq: B n'étoit que du 2e. dégré, on omettroit encore tous les termes dans le *Facteur-prémier* dans leſquels paroit un 3, & l'équation ſeroit encore diviſible par l, &c. Mais ſi l'éq: A n'étoit que du 3e. dégré, on omettroit dans les *Facteurs-ſeconds* tous les termes où il y a une f, & toute l'équation ſe diviſeroit par (0). Et ſi A n'étoit que du 2e. dégré, il faudroit encore omettre tous les termes où il y a une r, & diviſer une ſeconde fois l'équation par (0), & ainſi de ſuite.

On propoſe, par ex. d'éliminer x de ces deux équations $x^3 - 2ax^2 + 4ayx - y^3 = 0$ & $ax^2 + y^2x - ay^2 = 0$. On comparera la ſeconde avec l'éq: B, & on aura $(0) = -ay^2$, $(1) = y^2$, $(2) = a$, & $(3) = 0 = (4)$, ce qui réduit d'abord l'éq: C* aux cinq prémiéres lignes, toutes les autres ayant dans leurs *Facteurs-prémiers* les chiffres 3 ou 4. Enſuite on comparera la prémiére des deux équations propoſées avec A, & l'on aura $l = 1$, $p = 2a$, $q = 4ay$, $r = y^3$ & $f = 0$. Cette valeur de f faiſant éva-

. . . . . + (1111) l^3s
. . . . . + (1112) l^2ps
s . . . . . + (1122) l^2qs
r . . . . . + (1222) l^2rs.
+ (2222) l^2s^2
$-l^2ps$ . . . . . + (1113) lp^2s-2l^2qs
$-3lp^2s+4l^2qs$ . . . + (1123) $lpqs-3l^2rs$
$-l^2rs$ . . . . . + (1223) $lprs-4l^2s^2$
+ (2223) lps^2.
$-lpqs+5l^2rs$ . . . . + (1133) $lq^2s-2lprs-2l^2s^2$
$-lprs+4l^2s^2$ . . . . + (1233) $lqrs-3lps^2$
+ (2233) lqs^2
$+3lps^2$ . . . . . + (1333) $lr^2s-2lqs^2$
+ (2333) lrs^2
+ (3333) ls^3

$3l^2r^2-lp^2s+2l^2qs$ . . + (1114) $p^3s-3lpqs+3l^2rs$
$-lpr^2-3p^3s+8lpqs-2l^2rs$. + (1124) $p^2qs-2lq^2s-lprs+4l^2s^2$
$-2p^2qs+4lq^2s-4l^2s^2$ . . + (1224) $p^2rs-2lqrs-lps^2$
+ (2224) $p^2s^2-2lqs^2$
$r^2-p^2qs+10lprs-8ss$. + (1134) $pq^2s-2p^2rs-lqrs+5lps^2$
$^2s-p^2rs+8lqrs-2lps^2$ . . + (1234) $pqrs-3lr^2s-3p^2s^2+4lqs^2$
+ (2234) pqs^2-3lrs^2
$s+3p^2s^2+2lqs^2$ . . . + (1334) $pr^2s-2pqs^2-lrs^2$
+ (2334) prs^2-4ls^3
+ (3334) ps^3
$r^3-pq^2s+5p^2rs-2lqrs+5lps^2$ + (1144) $q^3s-3pqrs+3lr^2s+3p^2s^2-3lqs^2$
$+4pqrs-2lr^2s-3p^2s^2+2lqs^2$ + (1244) $q^2rs-2pr^2s-pqs^2+5lrs^2$
+ (2244) $q^2s^2-2prs^2+2ls^3$
$+5pqs^2+5lrs^2$ . . . . + (1344) $qr^2s-2q^2s^2-prs^3+4ls^4$
+ (2344) qrs^2-3ps^3
+ (3344) qs^3
$s^2+4prs^2-4ls^3$ . . . + (1444) $r^3s-3qrs^3+3ps^4$
+ (2444) $r^2s^2-2qs^3$
+ (3444) rs^3
+ (4444) s^4

Digitized by Google

évanouir toute la cinquiéme colomne, ce qui reſte des cinq prémiéres lignes ſera diviſible par (o) & par ll, & après la diviſion elles ſe réduiront à ceci

$$\begin{array}{llll} (000)l^2 & +(001)lp & +(011)lq & +(111)lr = 0 \\ & +(002)pp - 2lp & +(012)pq - 3lr & +(112)pr \\ & & +(022)qq - 2pr & +(122)qr \\ & & & +(222)rr \end{array}$$

où, ſubſtituant à (o), (1), (2), l, p, q, r, leurs valeurs,

$$\begin{array}{llll} -a^3y^6 & +a^3y^6.2a & -ay^6.\ 4ay & +y^6.y^3 = 0 \\ & +a^2y^4.(4aa-8ay) & -a^2y^4.(8aay-3y^3) & +ay^4.2ay^3 \\ & & -a^3y^2.(16aayy-4ay^3) & +aayy.4ay^4 \\ & & & +a^3.y^6 \end{array}$$

qui ſe réduit à

$$\begin{array}{llll} -a^3y^6 & +2a^3y^6 & -4a^2y^7 & +y^9 = 0 \\ & +4a^3y^4 - 8a^4y^5 & -8a^4y^5 + 3a^2y^7 & +2a^2y^7 \\ & & -16a^3y^4 + 4a^4y^5 & +4a^3y^6 \\ & & & +a^3y^6 \end{array}$$

ou, réuniſſant les termes homogénes, à

$$y^9 + a^2y^7 + 6a^3y^6 - 12a^4y^5 - 12a^5y^4 = 0 = (y^5 + aay^3 + 6a^3y^2 - 12a^4y - 12a^5)y^4.$$

§. 15. On pourroit tirer de ces Principes pluſieurs conſéquences fort utiles dans l'Algébre: mais ne nous écartons point de notre but, qui eſt de démontrer que ſi A & B ſont deux équations, l'une de l'ordre m & l'autre de l'ordre n, l'équation qui réſulte de l'évanouiſſement de la

variable x ne ſauroit être d'un dégré plus élevé que m n.

A..... $x^n - [1]\,x^{n-1} + [1^2]\,x^{n-2} - [1^3]\,x^{n-3} + \ldots\ldots [1^n] = 0$

B..... $(0) + (1)\,x + (2)\,x^2 + (3)\,x^3 + \ldots\ldots (m)\,x^m = 0$

1°. Puiſque l'éq: A eſt de l'ordre n, elle n'a aucun terme où les expoſants de x & de y enſemble faſſent une ſomme plus grande que n. Donc [1] eſt une fonction de y qui ne paſſe pas le prémier dégré, & [1^2] une fonction qui ne paſſe pas le ſecond dégré, &c. & [1^n] une fonction qui ne paſſe pas le dégré n, c'eſt-à-dire, dans laquelle il n'y a aucun terme où y ait un expoſant *plus* grand que n.

Delà on peut conclurre qu'il n'y a aucun *Facteur-ſecond* de l'éq: C où la variable y ait un expoſant plus grand que la ſomme des chiffres de ſon *Facteur-prémier*: Que dans [$0^{n-3}123$] par ex. il n'y a aucune puiſſance de y ſupérieure à la ſixiéme; parce que $1 + 2 + 3 = 6$.

Cette concluſion ſe déduit au moyen de deux Principes. L'un, qui a été indiqué au §. 10, c'eſt que les chiffres de deux *Facteurs* qui ſe multiplient l'un l'autre font enſemble la même ſomme que les chiffres des *Facteurs* qui compoſent le produit de cette multiplication. L'autre, qui eſt connu, c'eſt que ſi on multiplie l'une par l'autre deux Fonctions rationelles, de dégrés quelconques, d'une même variable; le produit ſera une Fonction d'un dégré égal à la ſomme de leurs dégrés. Si donc il eſt vrai de dire de deux *Facteurs-ſeconds* multipliés l'un par l'autre, que chacun eſt une Fonction rationelle de y, où elle n'a point d'expoſant ſupérieur à la ſomme des chiffres de leurs *Facteurs-prémiers*; cela ſera également vrai de leur produit, & par conſéquent de tous les *Facteurs-ſeconds* qui compoſent ce produit. Or on a vû au commencement de ce §. que

cela

cela eſt vrai des *Facteurs-ſeconds* [1], [1²] .... [1ⁿ] de la prémiére ligne. Donc cela eſt vrai des *Facteurs-ſeconds* ſans exception; puiſqu'ils ſont tous produits, immédiatement ou médiatement, par la multiplication des *Facteurs* de la prémiére ligne (§. 12).

Ainſi, pour prouver que *y* ne paſſe pas le 6ᵉ. dégré dans [123], il ſuffit de faire voir qu'elle ne paſſe par le 4ᵉ. dégré dans [112], ni le 2ᵉ. dans [2]. Car, comme [112] × [2] = [114] + [123] + 2[1122], le *Facteur* [123] eſt une des parties qui compoſent le produit de [112] par [2]. Or on prouve que *y* ne paſſe pas le 4ᵉ. dégré dans [112], ni le 2ᵉ. dans [2], par une ſemblable décompoſition. [1] × [1] = [2] + 2[11]. Donc *y*, ne paſſant pas le 1ᵉʳ. dégré dans [1], ne paſſera pas le 2ᵉ dans [1] × [1], ou dans [2], qui n'eſt qu'une partie du produit [1] × [1]. De même, puiſque [111] × [1] = [112] + 4[1⁴], & que *y* ne paſſe pas le 3ᵉ. dégré dans [1³] ni le 1ᵉʳ. dans [1], elle ne paſſera pas le 4ᵉ. dans [1³] × [1], ni par conſéquent dans [112], qui n'eſt qu'une partie de ce produit.

Par de ſemblables raiſonnemens, remontant d'un *Facteur-ſecond* quelconque à ceux du produit deſquels il fait partie, & de ceux-là à d'autres, & ainſi juſqu'aux *Facteurs* [1], [1²] &c. de la prémiére ligne, on prouvera toujours que dans aucun *Facteur-ſecond* de l'éq: C, la variable *y* ne monte à un dégré plus haut que celui dont l'expoſant eſt la ſomme des chiffres de ſon *Facteur-prémier*.

2°. D'un autre côté, l'éq: B étant de l'ordre *m*, elle ne contient aucun terme où les expoſants de *x* & de *y* enſemble faſſent une ſomme plus grande que *m*. Donc *y* dans la Fonction (o) ne paſſe pas le dégré *m*, & dans (1) elle ne paſſe pas le dégré *m* — 1, ni dans (2) le dégré *m* — 2, &c.

Par conſéquent dans aucun *Facteur-prémier* de l'éq: C,

il n'y aura aucune puiſſance de y dont l'expoſant paſſe le nombre qui reſte quand de mn on ôte la ſomme des chiffres de ce *Facteur*. Ainſi dans $(o^{n-3}123)$, y ne ſauroit paſſer le dégré $mn-6$. Car dans (3), y ne paſſe pas le dégré $m-3$, ni dans (2) le dégré $m-2$, ni dans (1) le dégré $m-1$, ni dans (o) le dégré m, ni par conſéquent dans (o^{n-3}) le dégré $m\times(n-3)=mn-3m$. Donc dans $(o^{n-3}123)=(o^{n-3})\times(1)\times(2)\times(3)$, y ne paſſe pas le dégré $mn-3m, +m-1, +m-2, +m-3=mn-1-2-3=mn-6$.

3°. Cela étant ainſi, qu'on prenne dans l'éq: C quel terme on voudra, & ſi l'on cherche qu'elle peut être la plus haute puiſſance de y dans ce terme-là, on trouvera que y ne peut s'élever dans le *Facteur-ſecond* à un dégré plus haut que la ſomme des chiffres du *Facteur-prémier* (n°. 1), ni dans le *Facteur-prémier* à un dégré plus haut que le nombre qui reſte quand on ôte de mn la ſomme de ces chiffres (n°. 2). Donc dans le terme complet, qui eſt le produit du *Facteur-prémier* par le *Facteur-ſecond*, y ne montera point à un dégré plus haut que mn, qui réſulte de l'addition de cette ſomme & de ce reſte.

Ainſi, dans aucun terme de l'équation finale C, y ne monte à une puiſſance plus haute que celle dont mn eſt l'expoſant. L'équation C n'eſt donc, au plus, que du dégré mn: elle ne peut avoir plus de mn racines. *Ce qu'il faloit démontrer.*

N°. III.

Digitized by

No. III.

Démonſtration de la Règle de Mr. HUDDE.

LEMME.

Si on multiplie la ſuite bien ordonnée des termes d'un binome $v+y$ *élevé à une puiſſance quelconque dont l'expoſant ſoit* l, *par les termes de la progreſſion arithmétique* 0, 1, 2, 3, 4, &c. *le produit ſera la puiſſance* $l-1$ *de ce binome multipliée par* ly.

La ſeule inſpection du calcul peut tenir lieu de preuve.

$$(v+y)^l = v^l + lv^{l-1}y + \frac{l.(l-1)}{1.2.}v^{l-2}y^2 + \frac{l.(l-1).(l-2)}{1.2.3}v^{l-3}y^3 + \&c.$$

0 1 2 3

$$lv^{l-1}y + \frac{l.(l-1)}{1.}v^{l-2}y^2 + \frac{l.(l-1).(l-2)}{1.2}v^{l-3}y^3 + \&c.$$

$$= ly \times (v^{l-1} + (l-1)v^{l-2}y + \frac{(l-1).(l-2)}{1.2}v^{l-3}y^2 + \&c.$$

$$= ly \times (v+y)^{l-1}$$

Coroll. I. Si au lieu de la progreſſion 0, 1, 2, 3, 4, &c. on avoit multiplié la ſuite des termes de la puiſſance

$(v+y)^l$, par la progreſſion $0m$, $1m$, $2m$, $3m$, *&c.* le produit auroit été $mly\times(v+y)^{l-1}$.

Car multiplier la ſuite des termes $(v+y)^l$ par $0m$, $1m$, $2m$, *&c.* c'eſt la multiplier par 0, 1, 2, 3, &c. ce qui donne $ly\times(v+y)^{l-1}$, & multiplier le tout par m, ce qui donne $mly\times(v+y)^{l-1}$.

Coroll. II. Si on multiplie la ſuite des termes de $(v+y)^l$ par une progreſſion arithmétique quelconque n, $n+m$, $n+2m$, $n+3m$, *&c.* le produit ſera diviſible par $(v+y)^{l-1}$.

Car multiplier la ſuite des termes de $(v+y)^l$ par la progreſſion n, $n+m$, $n+2m$, *&c.* c'eſt la multiplier 1°. par n, ce qui donne $n\times(v+y)^l = n\times(v+y)\times(v+y)^{l-1} = (nv+ny)\times(v+y)^{l-1}$ & 2°. par la progreſſion $0m$, $1m$, $2m$, *&c.* ce qui donne $mly\times(v+y)^{l-1}$. Le produit complet eſt donc $(nv+ny+mly)\times(v+y)^{l-1}$, qui eſt diviſible par $(v+y)^{l-1}$.

THEOREME.

Si on multiplie, par une progreſſion arithmétique quelconque, la ſuite bien ordonnée des termes d'une Egalité qui ait quelques racines égales; le produit ſera une Egalité, qui aura toutes les mêmes racines égales, moins une.

Le ſecond membre d'une Egalité bien ordonnée étant zéro, le prémier membre eſt diviſible par toutes les racines deſquelles il eſt le produit. Si l'Egalité a l racines égales, repréſentées par $y+v=0$ [y eſt l'inconnue de l'Egalité & $-v$ ſa valeur]; le prémier membre ſera diviſible

l fois

l fois par $v+y$, c'eſt-à-dire diviſible par $(v+y)^l$. On peut donc repréſenter l'Egalité par cette Formule $(v+y)^l \times (p+qy+ry^2+fy^3+\&c.)$: la grandeur $p+qy+ry^2+fy^3+\&c.$ étant ſuppoſée le produit de toutes les racines différentes de $y+v=0$. Si on dévelope la puiſſance $(v+y)^l$, l'Egalité ordonnée ſera

$$0 = pv^l + lpv^{l-1}y + \frac{l.(l-1)}{1.2}pv^{l-2}y^2 + \frac{l.(l-1).(l-2)}{1.2.3}pv^{l-3}y^3 \&c. \ldots = p(v+y)^l$$

$$+qv^ly + lqv^{l-1}y^2 + \frac{l.(l-1)}{1.2}qv^{l-2}y^3 \quad \&c. \ldots = qy(v+y)^l$$

$$+rv^ly^2 \quad +lrv^{l-1}y^3 \quad \&c. \ldots = ry^2(v+y)^l$$

$$+fv^ly^3 \quad \&c. \ldots = fy^3(v+y)^l$$

$$\&c. \ldots = \&c.$$

& ſi on multiplie la ſuite de ces termes par la progreſſion arithmétique

$$n \quad n+m \quad n+2m \quad n+3m \quad \&c.$$

on voit que chaque ligne ſera multipliée par une progreſſion arithmétique, la prémiére par la progreſſion entiére $n, n+m, n+2m, \&c.$ la ſeconde par $n+m, n+2m, n+3m, \&c.$ la troiſiéme par $n+2m, n+3m, \&c.$ Or chaque ligne eſt la puiſſance l de $v+y$; & n'importe qu'elle ſoit multipliée dans la prémiére ligne par p, dans la ſeconde par qy, dans la troiſiéme par ry^2, &c. il ſera toujours vrai [*Cor. préc.*] que le produit de chaque ligne eſt diviſible par $(v+y)^{l-1}$. Donc toute l'Egalité multipliée par la progreſſion, $n, n+m, n+2m, \&c.$ eſt diviſible par $(v+y)^{l-1}$. Donc de l racines égales qu'elle

le avoit avant la multiplication, elle en conſerve $l-1$ après la multiplication.

Cor. Ainſi, une Egalité, qui a une ou pluſieurs racines doubles, les conſerve, mais ſimples, après qu'on a multiplié la ſuite de ſes termes par une progreſſion arithmétique quelconque.

INDI-

INDICE

DES CHAPITRES ET DES PARAGRAPHES.

CHAPITRE PREMIER.

De la Nature des Lignes Courbes en général, & de leurs Equations.

§. 1. *Les Lignes ſont réguliéres ou irréguliéres.* pag. 1
2. *Lignes réguliéres, leur nature.* 2
3. *Elles ſont la même choſe que les Lieux géométriques des Anciens.* 2
4. *Lignes à ſimple ou à double courbure.* 3
5. *Ce que c'eſt que l'Origine, les Axes, les Abſciſſes, les Ordonnées.* 3
6. *Ce que c'eſt que l'Equation d'une Ligne.* 4
Exemple. 4
7. *Une même Ligne peut être repréſentée par diverſes Equations.* 6
8. *Courbes algébriques & tranſcendantes.* 7
9. *Courbes exponentielles, interſcendentes.* 8
10. *Courbes finies, infinies, & mixtes.* 8
11. *Comment une Equation repréſente une Ligne.* 9
12. *Abſciſſes & Ordonnées, poſitives & négatives.* 11
13. *Les Branches d'une Courbe ſont repréſentées par les racines de ſon équation.* p. 11
Exemples. 12
§. 14. *Une Ligne paſſe par l'Origine, quand ſon équation n'a point de terme conſtant.* 16
15. *Trouver en quels points une Ligne coupe ſes Axes.* 17
16. *Une Courbe manque où ſes ordonnées ſont imaginaires.* 18
Exemple. 19
17. *Les limites des ordonnées réelles & imaginaires ſont des doubles-ordonnées,* 24
18. *Parce que les racines imaginaires des équations vont deux à deux.* 25
19. *En quel ſens on peut dire que le cours d'une Ligne eſt continu.* 27
20. *Une ſeule équation peut repréſenter l'aſſemblage de pluſieurs Lignes.* 28
21. *Comment on le peut diſcerner.* 29
22. *Décrire une Courbe par points.* 30
Exemple. 31
23. *Maniére de le faire en pluſieurs cas.* 33
Exemples. 34

CHAPITRE II.

Des transformations que ſubit l'Equation d'une Courbe, quand on la raporte à d'autres coordonnées.

§. 24. *PRincipe général de ces transformations.* pag. 38
25. *Application de ce Principe aux cas particuliers.* 39
26. *Principe pour en abréger le Calcul.* 40
27. *Tranſporter l'Origine ſur un Point donné de l'un ou de l'autre Axe.* 43
Exemple. 44
§. 28. *Maniére plus commode d'éxécuter cette Transformation.* p. 44
29. *Transporter l'Origine ſur un Point quelconque.* 45
Exemple. 48
30. *Changer la poſition d'un des Axes, ſans changer l'Origine.* 49
Exemple. 50

CHAPITRE III.

Des différens Ordres des Lignes algébriques.

§. 31. *PRrincipe de la diviſion des Lignes algébriques en Ordres.* p. 52
32. *Equations générales des Lignes de chaque Ordre.* 52
33. *L'équation d'un aſſemblage de Lignes d'Ordres inférieures eſt d'un Ordre ſupérieur.* 53
34. *Toutes les équations d'une même Ligne ſont d'un même Ordre.* 53
35. *Diſpoſition des termes d'une équation ſur le Parallelogramme, ou ſur le Triangle Analytique.* 54
36. *Ce que c'eſt que les Caſes, les Bandes & les Rangs de ce Triangle.* 56
37. *Nombre des termes des équations générales de chaque Ordre.* p. 57
38. *Nombre des Points par leſquels on peut faire paſſer une Ligne d'un Ordre donné.* 58
Exemple. 59
39. *Nombre des Points dans leſquels une Droite peut rencontrer une Courbe d'un Ordre donné.* 62
40. *La Droite eſt la ſeule Ligne du premier Ordre.* 64
41. *Nombre des Points dans leſquels une Courbe peut être rencontrée par une Droite paralléle à l'un de ſes Axes.* 69
42. *Le nombre des interſections de deux*

Digitized by Google

deux Lignes déterminé par les racines d'une Egalité. pag. 70
§. 43. *Le nombre de ces Points eſt quelquefois plus petit que celui de ces racines.* 71
44. *Cas dans lequel le nombre des Points de rencontre n'eſt pas inférieur au nombre des racines.* 72
Exemple. 72
§. 45. *Le nombre des Points de rencontre eſt quelquefois plus grand que celui des racines.* pag. 73
Exemple. 73
46. *Nombre des Points dans leſquels peuvent ſe rencontrer deux Lignes d'Ordres donnés.* 75
47. *Explication d'une contradiction apparente.* 76
48. *Solution d'une autre difficulté.* 78

CHAPITRE IV.

Quelques Remarques ſur la conſtruction géométrique des Egalités.

§. 49. *LEs Egalités ſe conſtruiſent par les interſections de deux Courbes.* p. 80
Exemple. 80
50. *Manière de trouver ces Courbes.* 82
51. *Limitation de ce choix. Le nombre des interſections des Courbes peut-être moindre que celui des racines de l'Egalité qu'on veut conſtruire.* 83
Exemple. 84
52. *Il peut être plus grand.* 85
Exemple. 85
53. *Manière d'éviter ces inconvéniens.* 86
Exemple. 87
§. 54. *Choix des Courbes les plus ſimples qui peuvent conſtruire une Egalité d'un dégré donné.* 88
55. *Réflexions ſur cette règle.* 91
56. *Conſtruction d'une Egalité quelconque par une Courbe & une Droite.* 92
57. *Uſage de cette conſtruction pour déterminer les limites des Egalités, & le nombre de leurs racines réelles & imaginaires.* 93
58. *Application aux Egalités du ſecond dégré.* 95
59. *Application à celles du troiſiéme,* 97
60. *& du quatriéme dégré.* 103

CHAPITRE V.

Valeur du produit de toutes les Ordonnées d'une même Abſciſſe.

§. 61. THéorème général. pag. 108
62. Application aux Lignes du ſecond Ordre. p. 110
§. 63. Et à celles du troiſiéme. 116

CHAPITRE VI.

Des Diamètres, Contre-Diamètres, & Centres des Lignes Courbes.

§. 64. VAleur de la ſomme de toutes les ordonnées d'une même abſciſſe. p. 129
65. Propriété de deux Lignes du même Ordre, dont les équations ont les deux mêmes premiers termes. 129
66. De ces deux Lignes, l'une peut être un aſſemblage de Droites. 131
67. Ou même une ſeule Droite, qui eſt le Diamètre de la Courbe. 133
68. Toute Courbe a une infinité de Diamètres. 134
69. Diamètres curvilignes. 135
70. Diamètre abſolu. 137
§. 71. Toute Ligne du ſecond Ordre a un Diamètre abſolu. p. 138
72. Trouver les Diamètres abſolus des Courbes des Ordres ſupérieurs, lorſqu'elles en ont. 138
73. Contre-Diamètres. 141
74. Une Courbe qui a un Contre-Diamètre en a une infinité. 143
75. Centre d'une Courbe, ce que c'eſt. 144
76. Déterminer, par l'équation d'une Courbe, ſi elle a un Centre, & quelle eſt ſa poſition. 144
Exemples. 144

CHA-

Digitized by Google

CHAPITRE VII.

Détermination des plus grands termes d'une Equation. Principes de la Méthode des Séries, ou Suites infinies.

§. 77. UNe Equation perd quelques-uns de ſes termes, quand on ſuppoſe l'une de ſes indéterminées infinie ou infiniment petite. pag. 148
78. Ordres des infinis, potentiels & radicaux. 149
79. Ordres des infiniment petits. 150
80. Tentative infructueuſe pour trouver les plus grands termes d'une Equation. 151
81. Maniére de les trouver par voie d'excluſion. 152
Exemple. 153
82. Uſage du Triangle analytique dans cette Recherche. 155
83. Propriété du Triangle analytique. 156
84. Les termes, qui ſont ſur une même Droite, ont des expoſants en progreſſion arithmétique. 158
85. Le rapport des différences de ces progreſſions dépend de l'inclinaiſon de cette Droite. 159
86. Les termes qui ſont ſur deux Droites paralléles ont des expoſans en progreſſions arithmétiques, dont les différences ſont les mêmes. 160
87. Tous les termes qui ſont ſur une même Droite, ſont du même ordre, ſi deux d'entr'eux ſont ſuppoſés du même ordre. 161
§. 88. Raport des ordres des deux indéterminées, dans cette ſuppoſition. p. 162
89. Expoſant de l'ordre des termes qui ſont ſur une même Droite. 162
90. Les termes, qui ſont au-deſſus de cette Droite, ſont d'un ordre ſupérieur : ceux qui ſont au-deſſous, d'un ordre inférieur. 164
91. Delà, la Méthode pour trouver les plus grands termes d'une Equation. 164
92. Dévelopement de cette Méthode. Déterminatrices ſupérieures & inférieures. 165
Exemples. 166
93. Racines de l'équation donnée par une Déterminatrice. pag. 169
94. Elles peuvent être imaginaires. 170
95. Ou demi-imaginaires. 171
96. Remarque ſur l'expoſant de ces racines. 172
97. Méthode des Séries, ou Suites infinies. 173
98. Séries convergentes, & divergentes. 174
99. Les expoſans des termes d'une Série convergente vont toujours en croiſſant, ou toujours en décroiſſant. 175

§. 100. *Séries aſcendantes, Séries deſcendantes.* pag. 177
101. *Forme générale d'une Série.* 177
102. *Inveſtigation des termes ſucceſſifs d'une Série.* 177
103. *Remarque, & Exemples.* 179
104. *Séries imaginaires, demi-imaginaires, Séries qui ſe fourchent.* 184
Exemples. 184
105. *Quelle eſt la place, ſur le Triangle analytique, des termes d'une équation transformée.* 187
Exemple. 188
106. *Méthode abrégée de faire les transformations indiquées au §. 102.* 192
§. 107. *En quels cas, quelques-uns des termes de ces transformées manquent.* pag. 195
108. *Recherche des termes irréguliers d'une Série.* 197
109. *Où eſt-ce que la Série commence à devenir réguliére.* 200
111. *Détermination de la forme d'une Série réguliére, ou de la ſuite des expoſans des termes réguliers.* 204
112. *Détermination des coëfficients de ces termes.* 204
Exemples. 205
113. *Remarque, qui ſert à faire connoître, en bien des cas, ſi une Série eſt demi-imaginaire.* 213

CHAPITRE VIII.

Des Branches infinies des Courbes.

§. 114. *UNe Branche infinie de Courbe l'éloigne infiniment, ou de l'un, ou de l'autre des deux Axes, ou de tous les deux.* p. 215
115. *Une Courbe a autant de Branches infinies, que ſon équation peut donner de Séries deſcendantes réelles différentes.* 216
116. *Ces Séries déterminent la poſition des Branches.* 217
117. *Hyperboles & Paraboles.* 218
118. *Définition & Deſcription de l'Hyperbole.* 219
119. *Ce que c'eſt que ſes Aſymptotes.* 220
§. 120. *Hyperboles oppoſées.* pag. 221
121. *Hyperboles conjuguées.* 221
122. *Hyperboles des Ordres ſupérieurs.* 222
123. *Définition de la Parabole.* 223
124. *Deſcription de la Parabole.* 225
125. *Cette Courbe n'a point d'Aſymptotes.* 226
126. *Paraboles des Ordres ſupérieurs.* 226
127. *Différence de l'équation d'une même Parabole, ſuivant l'Axe auquel on la raporte.* 227
128. *Nombre & poſition des Branches des Paraboles & des Hyperboles de tous les Ordres.* 228

129. *Les*

Digitized by Google

§. 129. *Les Branches des Courbes ſont ou hyperboliques ou paraboliques.* pag. 230
130. *Maniére de les diſcerner.* 230
131. *Branches hyperboliques ; trouver leur Aſymptote droite.* 231
132. *Ce que c'eſt que leur Aſymptote courbe, & leur Hyperbole-aſymptote.* 232
133. *Branches paraboliques ; trouver leur derniére direction.* 234
134. *Ce que c'eſt que leur Aſymptote courbe, & leur Parabole-aſymptote.* 236
135. *Trouver, par le Triangle analytique, la derniére direction des Branches infinies d'une Courbe.* 237
136. *En quel cas une Courbe eſt finie.* 239
Exemple. 239
137. *Quatre poſitions differentes des des déterminatrices, par leſquelles on trouve les Branches infinies d'une Courbe.* 240
138. *Cas I. Branches hyperboliques, ayant un des Axes pour Aſymptote.* 243
Exemples. 245
139. *Cas II. Branches hyperboliques, ayant leur Aſymptote parallèle à l'un des Axes.* 261
Exemples. 262
140. *Poſition de ces Branches autour de leur Aſymptote.* 263
Exemples. 264
141. *Abrégé du Calcul néceſſaire dans ce cas-là.* pag. 273
Exemples. 274
§. 142. *Cas III. Branches paraboliques, dont la derniére direction eſt parallèle à l'un des deux Axes.* 284
Exemples. 285
143. *Cas IV. Branches infinies, dont la derniére direction eſt oblique aux deux Axes.* 308
Exemples. 311
144. *Les Branches infinies d'une Courbe ſont toujours en nombre pair.* 342
145. *Une Ligne algébrique d'un Ordre impair a, au moins, deux Branches infinies.* 343
146. *Une Courbe algébrique ne peut avoir plus de Branches infinies, qu'il n'y a d'unités dans le double de l'expoſant de ſon Ordre.* 343
147. *Une Courbe algébrique ne peut avoir plus d'Aſymptotes droites qu'il n'y a d'unités dans l'expoſant de ſon Ordre.* 344
148. *Lorſqu'elle a ce nombre d'Aſymptotes, toutes ſes Branches ſont hyperboliques.* 345
149. *Propriété de ces Aſymptotes & de ces Branches.* 345
150. *En combien de Points une Courbe peut rencontrer ſon Aſymptote droite.* 347
151. *Combien une Courbe algébrique peut avoir d'Aſymptotes droites parallèles à ſes ordonnées.* 349
152. *Combien elle peut avoir d'Aſympto-*

ſymptotes droites parallèles en tout. pag. 350

§. 153. *En quel cas elle peut les couper.* pag. 351

CHAPITRE IX.

Diviſions générales des Lignes des cinq premiers Ordres.

§. 154. *LE ſecond Ordre n'a que trois Courbes, l'Ellipſe, dont le Cercle eſt une eſpéce, l'Hyperbole & la Parabole.* p. 352

155. *Le troiſiéme Ordre a quatorze Genres de Courbes.* 359

156. *Les Courbes du quatriéme Ordre,*

157. *ſe peuvent réduire à neuf Claſſes, qui ſe ſubdiviſent en pluſieurs Genres.* 369

§. 158. *Le cinquiéme Ordre a onze Claſſes.* p. 397

159. *Nombre des Branches infinies, paraboliques & hyperboliques, des Courbes des cinq premiers Ordres.* 398

160. *Règle générale ſur le nombre des Branches, ſoit paraboliques, ſoit hyperboliques, dans chaque Ordre.* 399

CHAPITRE X.

Des Points ſinguliers ; Points multiples, Points d'Inflexion & de Serpentement.

§. 161. *POints ſimples & multiples.* pag. 400

162. *Secantes & Tangentes.* 400

163. *Points d'Inflexion.* 401

164. *Point de double Inflexion, ou de Serpentement.* 403

165. *Point de triple, quadruple, &c. Inflexion.* 403

166. *Inflexions viſibles & inviſibles.* 403

167. *A quels Ordres les Courbes commencent à être ſuſceptibles des diverſes Inflexions.* 404

§. 168. *Exemples de ces Inflexions dans les Paraboles des divers Ordres.* p. 404

169. *Points doubles, triples, quadruples, &c.* 408

170. *Connoître la ſimplicité ou multipliciué d'un Point ſitué à l'Origine d'une Courbe.* 409

Exemples. 411

171. *Connoître la ſimplicité ou multipliciué d'un Point quelconque d'une Courbe.* 415

Exemples. 417

172. *Abrégé du Calcul, quand le Point*

Digitized by Google

Point eſt ſitué ſur l'un des deux Axes. pag. 423
Exemple. 423
§. 173. *Trouver ſi une Courbe a des Points multiples, où ils ſont, & quels ils ſont.* 426
Exemples. 428
174. *Trouver, dans l'équation d'une Courbe, les conditions qui lui donnent des Points multiples.* 440
Exemples. 441
175. *Une Courbe ne peut avoir aucun Point, dont la multiplicité ait le même expoſant que l'Ordre de la Courbe.* 455
176. *En quel cas une Courbe ne peut avoir qu'un ſeul Point multiple.* 456
§. 177. *Une Courbe ne peut avoir deux Points tels que les expoſans de leur multiplicité faſſent une ſomme égale à l'expoſant de l'Ordre de cette Courbe.* p. 456
178. *Une Courbe ne peut avoir cinq Points, dont les dégrés de multiplicité faſſent une ſomme double de l'expoſant de ſon Ordre.* 456
179. *Une Courbe ne peut avoir neuf Points, dont les dégrés de multiplicité faſſent une ſomme triple de l'expoſant de ſon Ordre.* 457
180. *Nombre des Points multiples qu'une Courbe d'un Ordre donné peut avoir.* 458

CHAPITRE XI.

De la Méthode des Tangentes : Des Points d'Inflexion, &c. Des plus grandes & des plus petites abſciſſes & ordonnées, &c.

§. 181. *Tangentes des Points ſimples & multiples, combien de fois ſont cenſées rencontrer la Courbe.* p. 460
182. *Trouver les Tangentes d'un Point ſitué à l'Origine.* 461
183. *Un Point peut avoir autant de Tangentes qu'il y a d'unités dans l'expoſant de ſa multiplicité.* 462
184. *En quel cas la Courbe touche, à l'Origine, un de ſes Axes, ou tous les deux.* 463
185. *Détermination des Tangentes du Point ſitué à l'Origine.* pag. 464
Exemples. 464
§. 186. *Déterminer s'il y a une Inflexion à l'Origine, & quel eſt ſon dégré.* 467
Exemples. 468
187. *Trouver les Tangente d'un Point ſitué hors de l'Origine.* 471
Exemple. 472
188. *Détermination de cette Tangente.* 472
189. *Trouver la Soû-tangente.* 473

Digitized by Google

§. 190. *Calcul abrégé pour trouver la Soû tangente.* pag. 475
191. *Trouver les Tangentes d'un Point double.* 477
Exemples. 477
192. *Trouver les Tangentes d'un Point triple, &c. & en général multiple.* 480
Exemple. 480
193. *Déterminer ſi un Point, hors de l'Origine, a une Inflexion, & quel en eſt le dégré.* 481
Exemples. 482
194. *Trouver les Points d'une Courbe, deſquels la Tangente fait avec les Axes des angles donnés.* 485
Exemple. 486
195. *Trouver les* Maxima & Minima *d'une Courbe, c. a. d. les Points dont les Tangentes ſont parallèles aux Axes.* 487
196. *Remarques ſur cette Solution.* 487
Exemples. 489
§. 197. *Uſages de ce Problème.* p. 494
Exemples. 495
198. *Autre uſage, pour mieux connoître le cours des Courbes.* 500
Exemples. 500
199. *Trouver les Points d'Inflexion d'une Courbe.* 511
Exemples. 512
200. *Réſolution de tous ces Problèmes par la Méthode des Séries.* 517
201. *Séries aſcendantes tirées de l'équation d'une Courbe.* 519
202. *Le premier terme indique l'ordonnée primitive.* 521
203. *Le ſecond détermine la poſition de la Tangente.* 522
204. *Le troiſième fait connoître les Inflexions.* 524
205. *Diſcerner les* Maxima *des* Minima. 526
206. *Poſition de la Courbe par rapport à ſa* Tangente. 526
Exemples. 528

CHAPITRE XII.

De la Courbure des Lignes Courbes en leurs différens Points.

§. 207. *LA Courbure des Courbes ſe meſure par celle des Cercles.* pag. 539
208. *Centre, & raion de Courbure en chaque Point d'une Courbe.* 541
209. *Trouver le raion de Courbure en un Point quelconque d'une Courbe.* 542
Exemples. 543
§. 210. *Trouver en quel Point une Courbe a une Courbure donnée.* 547
211. *Trouver en quels Points d'une Courbe ſa Courbure eſt infinie.* 548
212. *Trouver en quels Points elle eſt nulle, ou infiniment petite.* 549
213. *Trouver en quels Points elle eſt la*

Digitized by Google

la plus grande ou la plus petite. pag. 549
§. 214. *Courbures infinies & infiniment petites.* 552
215. *Courbures des Courbes comparées à celles des ſommets de Paraboles.* 555
216. *Déterminer, par cette comparaiſon, la direction d'un Point quelconque d'une Courbe.* 556
217. & 218. *Déterminer la poſition & la Courbure de chaque Branche en un Point ſimple ou multiple d'une Courbe.* 556
Exemples. 561
219. *Remarque néceſſaire pour prévenir les erreurs où pourroit jetter cette Méthode.* 566

CHAPITRE XIII.

Des différentes eſpéces de Points multiples dont peuvent être ſuſceptibles les Courbes des ſix premiers Ordres.

§. 220. *DEs Points doubles.* p. 568
Exemples. 580
221. *Des Points triples.* 600
Exemples. 608
§. 222. *Des Points quadruples.* p. 630
Exemples. 636
223. *Des Points quintuples.* 652

APPENDICE.

De l'évanouiſſement des inconnues. . . . . . pag. 656
N°. I. pag. 657 N°. II. 660
N°. III. *Démonſtration de la Règle de Mr.* HUDDE. 677

FAU-

FAUTES A CORRIGER.

Page.	*Ligne.*	*Faute.*	*Correction.*
26.	1.	impair . .	pair
45.	3.	$(z)y^2$. . .	$(1)zy^2$
76.	*Note * l. dern,*	N°. 3. .	N°. 2.
77.	*en marge.*	*Fig.* 23. .	*Fig.* 24.
87.	11.	$-15ax$.	$+15ax$
109.	12.	PS×PT . .	PR×PS
110.	16.	troiſiéme . .	ſecond
121.	12.	$\alpha\beta$. . .	αB
169.	*pénult.*	$R\pm o$ . .	$R=o$
198. . .	11. . .	qO . . .	QO
207. . .	14. . .	$AA=4A$	$AA-4A$
228. . .	13. . .	$\frac{h}{l}$ ou k . . .	h ou $\frac{k}{l}$
233. . .	7. . .	AB [x] . .	AP [x]
289. . .	7. . .	2 . .	$\sqrt[3]{2}$
300. . .	18. . .	-9 . . .	9
373. . .	*dernière.* .	$-\frac{D}{D'}=1$.	$\frac{D}{D'}=-1$
389. . .	18. . .	ſimple . . .	double
402. . .	22. . .	trois . .	en trois
405. . .	10. . .	$-bx^3$ . .	$-bx^2$
407. .	14. *en marge.*	*Fig.* 122. .	*Fig.* 121.
430. . .	2. . .	$-3a^3y$ . .	$-8a^3y$
451. . .	19. . .	$-4ayy$.	$-4aayy$
509. . .	5. . .	$\sqrt{\frac{15+23}{2}}$ . .	$\sqrt{\frac{15+\sqrt{33}}{2}}$
520. . .	26. . .	p . . .	νp
585. . .	22. . .	poſitif . .	négatif
	23.	négatif . .	poſitif.
590. . .	9. . .	$bb > \frac{1}{4}aa$.	$bb < \frac{1}{4}aa$

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google